SUOMEN PANKIN
KESKUSTELUALOITTEITA

1/91

Risto Peltokangas
15.1.1991

USEAN FAKTORIN KORKORAKENNE-MALLIT JA IMMUNISAATIO

FINLANDS BANKS DISKUSSIONSUNDERLAG • BANK OF FINLAND DISCUSSION PAPERS

SUOMEN PANKIN KESKUSTELUALOITTEITA **1/91**

Risto Peltokangas

Suomen Pankin markkinaoperaatioiden osasto
15.01.1991

USEAN FAKTORIN KORKORAKENNEMALLIT JA IMMUNISAATIO

ISBN 951-686-274-8
ISSN 0785-3572

Suomen Pankin monistuskeskus
Helsinki 1991

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksessa tarkastellaan, miten joukkovelkakirjoihin sijoitettaessa voidaan erityyppisten korkorakennemallien avulla saavuttaa immunisaatio. Lähtökohtana on sijoittaja, joka sijoittaa ainoastaan luottoriskittömiin ja kiinteäkorkoisiin joukkovelkakirjoihin ja joka haluaa suojautua täydellisesti korkoriskiltä immunisaatiostrategialla.

Kolme esimerkinomaista keinoa mallittaa korkojen vaihtelu esitellään, ja niitä kutsutaan epätasapainomalliksi, tasapainomalliksi ja empiiriseksi lähestymistavaksi. Malleille on yhteistä, että eksogeenisia riskin lähteitä eli faktoreita on useita; kaikkien mallien taustalla onkin arbitraasihinnoitteluteoria (APT). Ensimmäinen vaihtoehto, epätasapainomalli on perinteisen duraatiomallin yleistys. Mallille on ominaista, että sen olettama korkoprosessi implikoi arbitraasimahdollisuuksia. Toinen vaihtoehto on korkorakenteen tasapainomalli, jossa faktoreita on kaksi. Mallin johtamisessa ehtoa arbitraasin eliminoitumisesta käytetään hyväksi. Sekä epätasapaino- että tasapainomallissa faktorit määritellään a priori. Kolmannessa, empiirisessä lähestymistavassa toimitaan päinvastoin: velkakirjoille yhteiset faktorit etsitään faktorianalyysin keinoin velkakirjojen tuottohistoriasta.

Esittelyn jälkeen malleja vertaillaan ja niiden realistisuutta ja soveltuvuutta käytännön hyödyntämisen kannalta arvioidaan.

Avainsanat: korkojen aikarakenne, korkoriski, immunisaatio

SISÄLLYS sivu

1 JOHDANTO

Tutkimuksessani tarkastelen kiinteäkorkoisiin joukkovelkakirjalainoihin sijoittavan kohtaamaa ongelmaa: miten suojata sijoitus markkinakorkojen odottamattomilta muutoksilta, korkoriskiltä[1]. Selväpiirteisin tapaus suhtautumisessa korkoriskiin on immunisaatio, jolloin korkoriskiltä pyritään suojautumaan täydellisesti.

Sijoittajalla on käytettävissään useita eri apuvälineitä, jotka kaikki perustuvat jonkintyyppiseen malliin joukkovelkakirjalainan hinnan määräytymisestä. Nykyisin laajasti käytössä oleva korkoriskimittari on modifioitu duraatio, jonka taustalla olevan mallin oletukset korkojen muutoksista ovat kuitenkin hyvin rajoittavat. Tarkoituksena on esitellä malleja, jotka kuvaavat korkojen muutoksia olennaisesti modifioitua duraatiota monipuolisemmin.

Esityksessäni käyn läpi esimerkinomaisesti kolme hyvin erilaista mallityyppiä, joiden avulla immunisaatio voidaan toteuttaa. Käsittelemilleni malleille on yhteistä, että faktoreita eli eksogeenisia riskin lähteitä on enemmän kuin yksi. Riskin lähteet edustavat kaikkea systemaattista riskiä. Lopussa mallien ominaisuuksia, niiden realistisuutta ja "käyttäjäystävällisyyttä" vertaillaan.

Esityksessäni keskityn ainoastaan luottoriskittömiin, käytännössä valtion liikkeeseen laskemiin kiinteäkorkoisiin joukkovelkakirjalainoihin[2]. Luottoriskittömyys ja kiinteäkorkoisuus takaavat sen, että velkakirjojen tulevaisuudessa lupaamat kassavirrat tunnetaan aina varmasti. Kassavirrat ovat nimellisiä rahamääriä, joten niiden ostovoimaan sisäl-

---

[1] Johdannossa esiintyviä joukkovelkakirjoihin, korkoihin ja korkoriskiin liittyviä käsitteitä käsitellään perusteellisemmin ja teknisemmin luvussa 2.

[2] Joukkovelkakirjalainoja kutsutaan tästä lähtien lyhyemmin joukkovelkakirjoiksi, velkakirjoiksi tai pelkästään lainoiksi.

tyy edelleen riski. Inflaatioriskiä ei tässä yhteydessä kuitenkaan käsitellä, vaan keskitytään ainoaan jäljelle jäävään riskiin, korkoriskiin.

Joukkovelkakirjojen hinnat ja toisaalta eripituiset markkinakorot ovat toistensa kääntöpuolia[3]. Usein markkinoilla niistä voidaan suoraan havaita ainoastaan velkakirjan hinta, joka implisiittisesti sisältää eripituisia markkinakorkoja. Tavallisesti kuitenkin ajatellaan, että kaikkien hintojen taustalla on eripituisten korkojen aikarakenne tai lyhyemmin korkorakenne. Kun velkakirjan kassavirrat diskontataan nykyhetkeen korkorakenteessa esiintyvillä koroilla, saadaan tulokseksi velkakirjan hinta eli nykyarvo.

Esityksessäni tarkastellaan täydellistä korkoriskiltä suojautumista immunisaatiolla[4]. Immunisaatio voidaan ymmärtää kahdella tavalla. Ensimmäisessä tapauksessa sijoittaja haluaa varmistaa, että hänellä on varmasti käytettävissään tietty rahamäärä tietyn ajanjakson kuluttua; puhutaan sijoittajan sijoitushorisontista, ja tälle ajanjaksolle hän haluaa varmistaa tietyn tuoton. Varmimmin ja vaivattomimmin hän saavuttaa tavoitteen sijoittamalla sijoitushorisonttinsa pituiseen nollakuponkilainaan. Niitä on kuitenkin harvoissa tapauksissa saatavilla.

Toisessa tapauksessa sijoittaja pyrkii toimimaan siten, että hänen taseensa eri puolet, varat ja velat ovat samalla tavalla riippuvaisia markkinakorkojen muutoksista. Tällöin tase ei nettomääräisesti riipu koroista: tase on immunisoitu koronmuutoksia vastaan.

---

[3] Esityksessäni oletan, että rahoitusmarkkinat ovat täydelliset ja transaktiokustannuksia ei ole.

[4] Korkoriskiin ja sen hallintaan ml. immunisaatioon liittyvää termistöä ja problematiikkaa on käsitellyt Ilmanen (1989).

Ensimmäinen tapaus voidaan nähdä taseen immunisaation erikoistapauksena. Sijoittajalle lankeaa maksettavaksi tiettynä hetkenä tulevaisuudessa jokin velkakassavirta. Hän pyrkii rakentamaan sijoitussalkkunsa (varat) siten, että korkojen muutoksista huolimatta salkun arvo vastaa velan arvoa sen erääntyessä. Sijoittajan "tase" on immunisoitu, ja varojen ja velkojen antama tuotto kyseisenä ajanjaksona on sama.

Kiinteäkorkoisille velkakirjoille on tyypillistä, että niiden herkkyys markkinakorkojen vaihtelulle muuttuu, kun velkakirjojen jäljellä oleva juoksuaika lyhenee. Siten immunisaatio suojaustoimenpiteenä on väistämättä dynaaminen. Kun aika kuluu, alunperin immunisoiduksi rakennettu tase tulee herkäksi markkinakorkojen muutoksille. Jos aikoo pitää taseen immunisoituna, sijoitussalkun rakennetta on muutettava koko ajan; näin varojen ja velkojen korkoherkkyydet pysyvät jatkuvasti samana.

Johdannon lopuksi käydään läpi tutkielman luvut pääpiirteissään yleiskuvan saamiseksi. Kaikkien velkakirjojen hinnoittelumallien taustalla on ainakin jossain määrin arbitraasihinnoitteluteoria (APT), jonka mukaan velkakirjan tuotto riippuu rajallisesta määrästä kaikille velkakirjoille yhteisiä riskin lähteitä[5]. Teoriassa johdetaan ns. arbitraasin eliminoitumisen avulla tasapainoehto, jonka kaikkien velkakirjojen tuottojen on täytettävä, jotta markkinat olisivat tasapainossa. Arbitraasihinnoitteluteoriaa sekä joukkovelkakirjoihin ja korkoriskiin liittyviä käsitteitä valotetaan luvussa 2.

Esittelen luvuissa 3, 4 ja 5 kolme rakenteeltaan hyvin erilaista keinoa mallittaa velkakirjojen hinnan määräytyminen ja korkoriski. Kaikille malleille on yhteistä, että riskin lähteitä on useita. Jokaisessa luvussa käsitellään myös immunisaatiota kyseisen mallin avulla.

---

[5] APT ja ehto arbitraasivoittojen eliminoitumisesta esitellään luvussa 2.2.

Luvussa 3 esitellään korkorakenteen liikkeitä kuvaava malli, jonka yksinkertainen erikoistapaus perinteinen duraatiomalli on. Jos velkakirjojen hinnat määräytyisivät todellisuudessa mallin mukaisesti, sijoittajan olisi mahdollista saavuttaa markkinoilla riskittömiä arbitraasivoittoja: tästä syystä puhutaankin epätasapainomallista.

Tasapainomallia, jossa ehtoa arbitraasin eliminoitumisesta käytetään hyväksi, käsitellään luvussa 4. Ensin luodaan silmäys mallin yleiseen muotoon, jossa faktorien lukumäärää ei ole rajoitettu. Sitten käsitellään kahden faktorin mallia ja sen approksimatiivista versiota, jonka hyödyntäminen käytännössä on olennaisesti helpompaa kuin alkuperäisen kahden faktorin mallin.

Luvussa 5 esiteltävä kolmas lähestymistapa korkoriskin arviointiin ja velkakirjojen hinnoitteluun on empiirinen. Kun kahdessa aiemmassa mallissa faktorit määritellään *a priori* ja koko korkorakenteen oletetaan riippuvan ainoastaan niistä, empiirisessä menetelmässä kaikille velkakirjoille yhteiset faktorit "etsitään" faktorianalyysin keinoin velkakirjojen varianssi-kovarianssihistoriasta. Immunisaatio voidaan toteuttaa myös tässä kehikossa, vaikka faktoreita ei pystytäkään suoraan havaitsemaan.

Epätasapainomalliin, tasapainomalliin ja faktorianalyysiin perustuvia lähestymistapoja vertaillaan lopuksi luvussa 6. Huomiota kiinnitetään sekä teoreettisiin että immunisaation kannalta käytännöllisiin eroihin.

Esityksessäni en pyri kattamaan kaikkia usean faktorin korkorakennemalleja ja mallien tiimoilta julkaistua kirjallisuutta. En myöskään yritä asettaa eri lähestymistapoja paremmuusjärjestykseen puhumattakaan siitä, että kartoittaisin aiheen ympärillä tehtyä empiiristä työtä: se voisi hyvinkin olla erillisen tutkimuksen aiheena. Päällimmäisenä tavoitteenani on esitellä esimerkinomaisesti kolme perusvaihtoehtoa mallittaa korkoriski, ja esittää ne arbitraasihinnoitteluteorian taustaa vasten. Malleja myös vertaillaan sekä teorian että käytännön hyödyntämisen kannalta.

2 TAUSTAA VELKAKIRJOJEN HINNOITTELULLE JA IMMUNISAATIOLLE

Aluksi käydään läpi muutamia joukkovelkakirjojen hinnoitteluun ja korkorakenteeseen liittyviä peruskäsitteitä[6]. Faktorimallien taustalla olevaan arbitraasihinnoitteluteoriaan ja immunisaatiostrategiaan tutustutaan peruskäsitteiden jälkeen.

2.1 PERUSKÄSITTEITÄ

Nollakuponkilaina on joukkovelkakirja, joka lupaa yhden kassavirran tietyllä hetkellä tulevaisuudessa. Oletetaan, että nollakuponkilainan liikkeeseenlaskija lupaa maksaa 1 markan velan erääntyessä i periodin kuluttua ja että laina on luottoriskitön. Jos nollakuponkilainan markkinahinta tällä hetkellä on $B_0(i)$, voidaan markkinakorko $r_0(i)$ i periodin pituiselle sijoitukselle (yhden periodin korkona ja laskettuna korkoa korolle) määritellä seuraavasti[7]:

(2.1) $$B_0(i) \equiv C_i (1 + r_0(i))^{-i}.$$

Kun kaikkien eripituisten nollakuponkilainojen hinnat tunnetaan, voidaan määritelmän (2.1) avulla ratkaista vastaavat markkinakorot, joita kutsutaan nykykoroiksi. Korkojen aikarakenne taas koostuu nykykoroista, jotka vastaavat eripituisia nollakuponkilainoja.

---

[6] Tässä luvussa ja epätasapainomallin yhteydessä luvussa 3 aika oletetaan diskreetiksi. Periodit ovat yhtä pitkiä, ja ne on indeksoitu nollasta eteenpäin. Tasapainomallin yhteydessä luvussa 4 siirrytään jatkuva-aikaiseen kehikkoon, mistä syystä joitakin tässä luvussa esiintyviä käsitteitä määritellään uudella tavalla. Luvun 2.1 peruskäsitteet löytyvät esim. Ingersollin (1987) luvusta 18.

[7] Käsitteitä on yksinkertaistettu. Markkinoilla havaitaan tulevien kassavirtojen nykyarvo, esim. nollakuponkilainan hinta $B_0(i)$. Käytännössä on olemassa lukuisa määrä erilaisia laskentakonventioita, joilla erilaiset korot liittyvät lainojen hintoihin.

Nykykorot sisältävät implisiittisesti termiinikorot. Ne ovat korkoja, jotka voidaan "lukita" tuleviksi ajanjaksoiksi tällä hetkellä. Termiinikorko $h_0(\tau,\tau+1)$ hetkestä τ hetkeen $\tau+1$ määritellään:

$$(2.2) \qquad h_0(\tau,\tau+1) \equiv \frac{(1 + r_0(\tau+1))^{\tau+1}}{(1 + r_0(\tau))^{\tau}} - 1,$$

joka yhtälön (2.1) avulla voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$(2.2') \qquad h_0(\tau,\tau+1) = \frac{B_0(\tau)}{B_0(\tau+1)} - 1.$$

Yhtälöstä (2.2) seuraa rekursiivisesti, että mikä tahansa nykykorko $r_0(i)$ voidaan esittää tämän hetken ja hetken i välillä olevien termiinikorkojen avulla:

$$(2.3) \qquad r_0(i) = \{\Pi_{\tau=0}^{i-1}(1 + h_0(\tau,\tau+1))\}^{1/i} - 1.$$

Korkorakenteen odotusteoria on eräs korkoja selittävistä perinteisistä teorioista. Sen mukaan täydellisen varmuuden vallitessa yli ajan arbitraasi takaa, että tällä hetkellä havaittavat termiinikorot ovat tulevia nykykorkoja: esimerkiksi $h_0(\tau,\tau+1) = r_\tau(\tau+1)$. Samalla tavalla kaikki muutkin tulevat eripituiset nykykorot voidaan ratkaista tällä hetkellä havaittavista termiinikoroista, jotka siis tämänhetkiset nykykorot implikoivat. Vaikka teoria yleisesti ottaen ei ole saanut tukea empiriasta[8], se on teoreettisena lähtökohtana silti kiinnostava, kun epätasapainomallia ryhdytään johtamaan luvussa 3.

Vielä on mainittava seuraava korkoriskin hallinnan ja immunisaation kannalta merkittävä odotusteorian implikaatio, kun epävarmuutta ei ole: tällä hetkellä voidaan tietää

---

[8] Froot (1989) s. 283 ja siinä alaviitteessä 1 mainitut lähteet.

minkä tahansa velkakirjan hinta myös tulevaisuudessa, kun tiedetään tämän hetken korkorakenne. Esimerkiksi i periodin kuluttua erääntyvän 1 markan nollakuponkilainan hinta τ periodin ($\tau \leq i$) kuluttua on

(2.4) $$B_\tau(i) = (1 + r_0(i))^{-i}(1 + r_0(\tau))^{\tau}.$$

Odotusteorian vallitessa sijoittajan kannalta on samantekevää, pitääkö hän hallussaan i periodin kuluttua erääntyvän nollakuponkilainan vai sijoittaako hän aina vain yhden periodin lainaan periodeittain "rollaten"; saatu tuotto i periodin jälkeen on sama yhtälön (2.3) mukaisesti, koska tällä hetkellä havaittavat yhden periodin termiinikorot ovat tulevia yhden periodin nykykorkoja. Yhtälö (2.4) otetaan lähtökohdaksi, kun korkoriskiä käsitellään epätasapainomallin avulla luvussa 3.

Nollakuponkilaina lupaa vain yhden kassavirran tietyn ajanjakson jälkeen. Kuponkilaina lupaa useita, joten sitä voidaankin pitää salkkuna nollakuponkilainoja. Kun kuponkilainan sisältämät kassavirrat C_i diskontataan nykyhetkeen kunkin kassavirran maturiteettia vastaavalla nykykorolla, saadaan kuponkilainan hinta P_0:

(2.5) $$P_0 = \sum_{i=1}^{I} C_i (1 + r_0(i))^{-i}.$$

Lainan lopullinen erääntymishetki eli maturiteetti on I, jolloin nimellispääoma maksetaan takaisin.

Kuponkilainan sisäinen korkokanta y ratkaistaan iteroimalla yhtälöstä

(2.6) $$P_0 = \sum_{i=1}^{I} C_i (1 + y)^{-i}.$$

Toisin sanoen haetaan y:lle sellainen arvo, että kassavirtojen nykyarvojen summa asettuu yhtä suureksi kuponkilainan hinnan kanssa. Sisäinen korkokanta on jonkinlainen monimutkainen painotettu keskiarvo kassavirtoja vastaavista nykykoroista. Nollakuponkilainan sisäinen korkokanta on samalla lainan maturiteettia vastaava nykykorko.

2.2 Arbitraasihinnoitteluteoria

Seuraavissa luvuissa esiteltäville malleille on yhteistä, että velkakirjojen tuottojen oletetaan riippuvan useista kaikille velkakirjoille yhteisistä faktoreista, eksogeenisista riskin lähteistä arbitraasihinnoitteluteorian (APT) hengessä[9]. Todellisuudessa ei tiedetä varmasti, mitkä faktorit ovat hintojen määräytymisen taustalla. Faktoreina voisivat olla esimerkiksi raha- ja finanssipolitiikka. Seikalla ei kuitenkaan ole suurta merkitystä, koska pyrkimyksenä on ainoastaan mallittaa korkorakenteen dynamiikka ja toisaalta velkakirjojen hintojen määräytyminen niin, että mallia voidaan käyttää korkoriskin hallinnan apuvälineenä. Pyrkimyksenä ei siten ole saada selville, mistä korkojen vaihtelut johtuvat.

Määritelmällisesti epätasapainomallissa ei käytetä hyväksi argumentaatiota arbitraasin eliminoitumisesta, mutta APT:n oletuksen tuotot synnyttävästä mallista voi katsoa olevan siinäkin taustalla. Tasapainomallissa ja empiirisessä lähestymistavassa teoriakehikkona on APT kokonaisuudessaan: velkakirjojen hintojen määräytymisessä myös arbitraasin eliminointiehtoa käytetään hyväksi. Seuraavaksi käydään läpi APT:n pääkohtia.

Arbitraasihinnoitteluteoriassa perusajatuksena on, että minkä tahansa sijoituskohteen, osakkeen tai velkakirjan, tuoton vaihtelu eli riski voidaan jakaa systemaattiseen ja epäsystemaattiseen osaan. Epäsystemaattinen riski on sijoituskohdekohtaista, ja se voidaan eliminoida hajauttamalla

---

[9] APT:n johti Ross (1976, 1977). APT:sta velkakirjojen hinnoittelun taustalla ks. Elton - Gruber - Nabar (1986), Chambers - Carleton - McEnally (1988) ja Knez - Litterman - Scheinkman (1989).

sijoitukset tarpeeksi useaan kohteeseen. Systemaattinen riski on peräisin rajallisesta määrästä riskin lähteitä, jotka ovat kaikille sijoituskohteille yhteisiä. Systemaattista riskiä ei voi hajauttaa pois.

Koska kaikki sijoituskohteet sisältävällä markkinaportfoliolla ei ole teoriassa mitään roolia kuten CAPM:ssä (Capital Asset Pricing Model), teoriaa voidaan soveltaa myös sijoituskohteiden osajoukkoon, esimerkiksi pelkästään velkakirjoihin[10].

Teoriassa sijoituskohteen tuoton oletetaan määräytyvän seuraavan lineaarisen faktorimallin mukaan[11]:

(2.7) $$\tilde{R} = E(\tilde{R}) + \sum_{k=1}^{K} b_k \tilde{f}_k + \tilde{\epsilon},$$

jossa
- $\tilde{R}$ = sijoituskohteen tuotto,
- $E(\tilde{R})$ = sijoituskohteen odotettu tuotto (*ex ante*),
- $\tilde{f}_k$ = kaikille riskillisille sijoituskohteille yhteinen faktori, jonka odotusarvo on nolla,
- b_k = kerroin, joka kertoo sijoituskohteen tuoton sensitiivisyyden k:nnelle faktorille (*ex ante*), ja
- $\tilde{\epsilon}$ = virhetermi, jonka odotusarvo on nolla, varianssi äärellinen ja joka on riippumaton faktoreista.

Termit $b_k \tilde{f}_k$ edustavat sijoituskohteen systemaattista riskiä ja virhetermi $\tilde{\epsilon}$ epäsystemaattista riskiä.

Markkinoiden oletetaan toimivan tehokkaasti ja kitkattomasti. Veroja ja transaktiokustannuksia ei ole, ja lyhyeksi-

---

10 Roll - Ross (1980) s. 1080.

11 Ross (1977) s. 194.

myynti on sallittua ja rajoittamatonta[12]. Mallissa ei tarvitse tehdä oletuksia tuottojen jakaumasta eikä sijoittajien preferensseistä paitsi, että sijoittajat ovat riskin karttajia ja vaativat siksi korvauksen otetusta riskistä[13].

Sijoituskohteita oletetaan olevan paljon. Tällöin on mahdollista rakentaa hyvin hajautettuja salkkuja, joiden epäsystemaattinen riski on mitätön. Lisäksi faktoreita oletetaan olevan olennaisesti vähemmän kuin sijoituskohteita, jolloin on helppo tehdä hyvin hajautettuja salkkuja, joiden sensitiivisyys kaikille faktoreille on sama. Salkut ovat toistensa täydellisiä substituutteja, ja markkinatasapainossa niiden hinnan täytyy olla sama, jotta riskittömiä arbitraasivoittoja ei pääsisi syntymään.

Seuraavaksi käytetään hyväksi oletusta, että markkinat ovat tasapainossa. Kun rakennetaan täysin suojattu arbitraasisalkku, jonka herkkyys kaikkien faktoreiden suhteen on nolla, eikä salkkuun sijoiteta lainkaan varallisuutta (yhdistellään lyhyitä ja pitkiä positioita eri sijoituskohteissa), salkun antaman tuoton pitäisi olla tasapainossa likimain nolla[14]. Toisin sanoen tehokkailla markkinoilla kaikki kohteet hinnoitellaan siten, ettei riskittömiä arbitraasivoittoja pääse syntymään. Tätä kutsutaan arbitraasin eliminointiehdoksi.

Kun markkinat ovat tasapainossa, voidaan osoittaa, että sijoituskohteen odotettu tuotto on[15]

---

[12] Sijoittaja myy lyhyeksi, kun hän myy sijoituskohdetta, jota ei omista. Hänellä on kohteessa lyhyt positio.

[13] Copeland - Weston (1988) s. 222.

[14] Tuotto on ainoastaan likimain nolla, koska epäsystemaattisen riskin vaikutus tuottoon lähestyy nollaa vasta, kun salkun sijoituskohteiden lukumäärä lähestyy ääretöntä (suurten lukujen laki).

[15] Esim. Lehmann - Modest (1988) s. 215.

(2.8) $$E(\tilde{R}) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} b_k \lambda_k \quad \text{tai}$$

$$E(\tilde{R}) - \lambda_0 \approx \sum_{k=1}^{K} b_k \lambda_k ,$$

jossa λ_0 = riskitön tuotto; se on jokin hyvin lyhyt korko tai tuotto sijoituskohteelle, jonka herkkyys kaikille faktoreille on nolla, ja

λ_k = faktoriin $\tilde{f}_k$ liittyvä riskipreemio; se on korvaus otetusta riskistä, joka aiheutuu faktorista $\tilde{f}_k$.

Kun sijoitetaan pääomaa salkkuun, jonka herkkyys muiden kuin faktorin $\tilde{f}_k$ suhteen on nolla, se antaa riskittömän tuoton lisäksi tuottoa sen mukaan, kuinka monta "yksikköä" kyseistä riskiä on otettu ja mikä on yhden "riskiyksikön" markkinahinta eli riskipreemio. Edellä kuvattu arbitraasisalkku ei anna tasapainossa omistajalleen mitään rahallista tuottoa, koska salkku ei ole altis systemaattiselle riskille.

2.3 Immunisaatio

Immunisaatio on suojausstrategia, jonka avulla pyritään varmistamaan, että sijoitussalkku (varat) antaa joka hetki vähintään saman tuoton kuin velkasalkku. Redington (1952) pohti immunisaatiota, keksi kyseisen käsitteen ja esitti ongelmaan oman ratkaisunsakin[16].

Redigtonin ongelmana oli, miten vakuutusyhtiö voi varmistaa, että sen tunnetut velkakassavirrat voidaan aina rahoittaa riippumatta korkojen muutoksista. Ilmeisin ratkaisu olisi dedikaatiostrategia, jossa sijoitussalkku rakennetaan

---

[16] Hicks (1939) ja Samuelson (1945) olivat ensimmäisiä, jotka pohtivat korkomuutosten ja velkakirjan hinnan välistä yhteyttä. Schaefer (1984) esittää selkeästi Redingtonin ongelmanasettelun ja immunisaation.

siten, että jokaista velkakassavirtaa vastaa varojen puolella oma samansuuruinen kassavirtansa[17]. Ratkaisu ei aina tule kyseeseen, koska tarvittavia sijoituskohteita ei yksinkertaisesti ole saatavilla markkinoilta.

Redingtonin mukaan tavoite voidaan yhtä hyvin saavuttaa strategialla, joka varmistaa, että varojen ja velkojen markkina-arvo on aina sama. Immunisaatio saavutetaan, kun seuraavat ehdot ovat koko ajan voimassa:

(2.9a) $MV^A = MV^L$, ja

(2.9b) $D^A_{MAC} = D^L_{MAC}$,

jossa MV^A (MV^L) = varojen (velkojen) markkina-arvo, ja

D^A_{MAC} (D^L_{MAC}) = varojen (velkojen) keskimääräinen jäljellä oleva juoksuaika eli Macaulay-duraatio[18].

Macaulay-duraatio on velkakirjan (tai velkakirjasalkun) keskimääräinen jäljellä oleva juoksuaika, kun painoina käytetään kassavirtojen velkakirjan sisäisellä korkokannalla y diskontattuja nykyarvoja:

(2.10) $D_{MAC} \equiv \sum^I_{i=1} (iC_i (1 + y)^{-i})/P,$

jossa P on velkakirjan hinta. Voidaan helposti osoittaa, että modifioitu duraatio

(2.11) $D_{MOD} \equiv D_{MAC}/(1 + y)$

suhteuttaa sisäisessä korkokannassa (korkotasossa) tapahtu-

---

[17] Sijoitusstrategioista velkakirjamarkkinoilla ks. Vanhanen (1988).

[18] Macaulay- ja modifioidusta duraatiosta ks. Ilmanen (1989) s. 30 - 34 ja 41 - 44 tai Bierwag (1987b) luku 3.

vat muutokset ja velkakirjan markkina-arvon muutokset toisiinsa seuraavasti[19]:

$$(2.12) \qquad \frac{dP}{P} = -D_{MAC} \frac{\Delta y}{1 + y} = -D_{MOD} \Delta y.$$

Modifioitu duraatio kuvaa siten velkakirjan herkkyyttä muutoksille sisäisessä korkokannassa[20]. Kun ehdot (2.9a-b) ovat voimassa, taseen eri puolten markkina-arvo reagoi korkotason muutoksiin aina samalla tavalla, ja immunisaatio saavutetaan.

Immunisaatiosta puhutaan tavallisesti myös sijoittajan sijoitushorisontin yhteydessä. Sijoitushorisontti on ajanjakso, jolle sijoittaja haluaa varmistaa tietyn tuoton; sijoittaja haluaa, että hänellä on käytettävissään tietty rahamäärä sijoitushorisontin lopussa. Velkakirjan tai velkakirjasalkun sanotaan olevan immunisoitu korkojen muutosta vastaan, jos sen antama tuotto korkojen muutoksen jälkeen sijoitusperiodin aikana, tästä hetkestä sijoitushorisontin loppuun, on yhtä suuri tai suurempi, kuin sen tuotto olisi ollut ilman korkojen muutosta[21].

Aiemmin käytettyä notaatiota seuraten salkku on immunisoitu korkojen muutosta vastaan, jos

$$(2.13) \qquad P_{\tau}' \geq (1 + r_0(\tau))^{\tau} P_0,$$

jossa P_{τ}' on salkun arvo korkojen muutoksen jälkeen sijoitushorisontin lopussa τ periodin kuluttua.

---

[19] Hicks (1939) ja Samuelson (1945) johtivat ensimmäisinä sisäisen korkokannan muutosten ja velkakirjan tuottojen yhteyden.

[20] Perinteisiin duraatiomittareihin ja niiden taustalla olevaan malliin palataan epätasapainomallin yhteydessä luvussa 3.2.

[21] Ingersoll - Skelton - Weil (1978) s. 628.

Markkinat lupaavat tällä hetkellä periodille varman tuoton $r_0(\tau)$, joka on vastaavan nollakuponkilainan sisäinen korkokanta. Jos sijoittajalla on hallussaan kyseinen nollakuponkilaina, hänen sijoituksensa on immunisoitu korkojen muutosta vastaan. Jos hän sen sijaan pitää hallussaan salkkua, jonka kassavirrat ajoittuvat johonkin muuhun hetkeen kuin hetkeen τ, hänen salkkunsa on altis korkoriskille.

Korkoriski voidaan jakaa kahteen osaan, jälleensijoitusriskiin ja hintariskiin. Sijoittaja on altis jälleensijoitusriskille, jos sijoitussalkun kassavirtoja erääntyy ennen sijoitushorisontin loppua: hän ei tiedä, millä korolla hän voi sijoittaa edelleen tulevaisuudessa saatavat kassavirrat. Sijoittaja on altis hintariskille, mikäli hän joutuu myymään erääntymättömän velkakirjan sijoitushorisonttinsa lopussa: hän ei voi tietää velkakirjan markkinahintaa myyntihetkellä, koska korkojen muuttuessa hinta muuttuu.

Sijoitushorisonttiin liittyvä immunisaatio-ongelma voidaan nähdä taseen immunisaationa: kyseisen nollakuponkilainan antama rahamäärä on velkakassavirta, ja se ajoittuu sijoitushorisontin loppuun. Sijoittajan on rakennettava sijoitussalkkunsa siten, että hänen koko positionsa ei ole riippuvainen korkojen muutoksista.

Perinteisten duraatiomittareiden taustalla on korkorakennemalli, jossa riskin lähteitä on ainoastaan yksi. Immunisaatiota voidaan tarkastella yleisemmässä APT-kehikossa, ja faktoreita voi olettaa olevan useita. Immunisaatio on suojausstrategia, jolla taseen nettomääräinen herkkyys kaikille faktoreille on nolla; sekä varat että velat ovat samalla tavalla herkkiä korkojen muutoksille, eli niiden systemaattinen riski on sama.

Immunisoitaessa sijoitussalkun velkakirjoja pitää olla aina vähintään K + 1 kappaletta, kun K on riskin lähteiden lukumäärä. Vain silloin suojaus on mahdollinen olettaen, että lyhyeksimyynti on sallittua ja rajoittamatonta. Samalla oletetaan, että matriisi, joka muodostuu K + 1 velkakirjan herkkyyksistä K faktorille, ei ole singulaarinen.

Kiinteäkorkoisille joukkovelkakirjoille on tyypillistä, että niiden riskillisyys muuttuu jäljellä olevan juoksuajan lyhetessä. Tase tai positio, joka kerran on rakennettu immunisoiduksi, altistuu systemaattiselle riskille, kun aika kuluu. Siksi immunisaation on oltava dynaamista suojausta. Black - Scholes (1973) käyttivät täydellisen dynaamisen suojauksen ajatusta johtaessaan optioiden hinnoittelumallinsa: sijoituskohteilla on käytävä kauppaa jatkuva-aikaisesti, jotta osto-optioiden, osakkeiden ja velkakirjojen positio säilyisi riskittömänä. Velkakirjoilla on myös käytävä kauppaa jatkuva-aikaisesti, jotta tase pysyisi suojattuna; immunisoitaessa sijoitussalkun rakennetta on muutettava jatkuvasti.

Immunisaatioon palataan tämän jälkeen kunkin luvun lopussa lyhyesti: miten kyseisellä mallilla immunisaatio toteutetaan.

Duraatiokäsitettä käytetään tästä eteenpäin seuraavassa yleismerkityksessä: duraatio kertoo velkakirjan tuoton herkkyyden tietylle faktorille, ja se on sisällöllisesti sama kuin kerroin b_k yhtälössä (2.7).

3 EPÄTASAPAINOMALLI

Seuraavaksi esiteltävälle mallille on ominaista, että se ei täytä markkinoiden tasapainoehtoa: jos korkorakenteen liikkeet noudattaisivat täsmälleen seuraavaa mallia, sijoittajan olisi mahdollista saavuttaa riskittömiä arbitraasivoittoja tietyllä strategialla.

Ensin tutustutaan hyvin yleiseen mallimuotoon, minkä jälkeen luodaan lyhyt katsaus perinteisiin yksifaktorimalleihin, esimerkiksi modifioituun duraatioon. Yleinen malli sisältää ne erikoistapauksinaan. Seuraavaksi tutustutaan immunisaatioon yleisen mallin avulla. Markkinoiden tasapainoehdon rikkoutumista käsitellään luvun lopuksi. Luvussa seurataan luvun 2.1 notaatiota.

3.1 Korkorakenteen epätasapainomalli yleisessä muodossa

3.1.1 Oletus korkorakenteen liikkeistä

Mallin taustalla on oletus, että jokainen nykykorko ja siis koko korkojen aikarakenne voidaan esittää jonkin polynomin avulla[22]. Oletetaan, että jokainen nykykorko $r_0(t)$ määräytyy seuraavan mallin mukaisesti[23]:

$$(3.1) \qquad r_0(t) = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 t + \tilde{f}_3 t^2 + \ldots + \tilde{f}_K t^{K-1},$$

jossa t viittaa nykykorkoa vastaavan nollakuponkilainan maturiteettiin. Kertoimet $\tilde{f}_k$ ovat stokastisia kertoimia, riskin lähteitä, eikä niiden yhteisjakaumasta tehdä oletusta.

---

[22] Cooper (1977) lähestyi immunisaatio-ongelmaa tavalla, joka on lähellä tässä esitettävää. Hän tosin käytti yksinkertaisempaa funktiomuotoa korkorakenteen kuvaamiseen.

[23] Chambers - Carleton - Waldman (1984) s. 236.

Kun nykykorko $r_0(t)$ on laskettu jatkuva-aikaisesti korkoa korolle, on $\ln(1 + r_0(t)) \approx r_0(t)$, ja nykykoron muutos voidaan esittää seuraavasti:

$$(3.2) \qquad \Delta r_0(t) = (1 + r_0(t))(\Delta \tilde{f}_1 + \Delta \tilde{f}_2 t + \Delta \tilde{f}_3 t^2 + \ldots + \Delta \tilde{f}_K t^{K-1}).$$

Nykykoron muutos riippuu siten muutoksista kertoimissa $\tilde{f}_k$, joita voidaan näin ollen pitää korkorakennetta ja velkakirjojen hintoja ohjaavina faktoreina. Koko korkorakenne riippuu faktoreista siten, että kerroin $\tilde{f}_1$ ohjaa korkorakenteen paralleeleja liikkeitä, $\tilde{f}_2$ korkorakenteen jyrkkyyttä, $\tilde{f}_3$ korkorakenteen kuperuutta ja niin edelleen yhtälön (3.2) mukaisesti.

3.1.2 Korkoshokki ja immunisaatio[24]

Tarkastellaan seuraavaksi sijoitusta (kuponkilainaa), jonka hinta tällä hetkellä on P_0. Otetaan lähtökohdaksi odotusteoria varmuuden vallitessa. Sijoituksen arvo τ periodin kuluttua on

$$(3.3) \qquad P_\tau = (1 + r_0(\tau))^\tau P_0.$$

Kuten luvusta 2 kävi ilmi, sijoittajan kannalta on samantekevää, pitääkö hän hallussaan τ periodin pituisen nollakuponkilainan vai juoksuajaltaan jonkin muunlaisen velkakirjan; velkakirjat ovat toistensa täydellisiä substituutteja, ja sijoituksesta saadaan aina sama tuotto. Sijoittajan kannalta tilanne muuttuu, kun epävarmuus liitetään tarkasteluun.

Oletetaan, että kaikki nykykorot muuttuvat diskreetisti ja välittömästi hetkellä nolla, ja merkitään

---

[24] Tämän luvun esitys seuraa melko tarkasti Bierwag - Kaufman - Lattan (1988) esitystä.

(3.4) $\quad r_0'(t) \equiv r_0(t) + \Delta r_0(t), \qquad \forall\, t \quad (\text{ml. } t = \tau).$

Oletukset siitä, miten korot tarkasti ottaen muuttuvat, tehdään vasta myöhemmin, kun faktoreihin liittyvät immunisaatioehdot johdetaan. Yhtälön (2.4) mukaisesti i periodin kuluttua erääntyvän nollakuponkilainan hinta τ periodin kuluttua esimerkiksi sijoitushorisontin lopussa ilman koronmuutosta on

(2.4) $\quad B_\tau(i) = C_i(1 + r_0(i))^{-i}(1 + r_0(\tau))^\tau,$

ja koronmuutoksen jälkeen sen hinta on

(3.5) $\quad B_\tau'(i) = C_i(1 + r_0'(i))^{-i}(1 + r_0'(\tau))^\tau.$

Approksimaatio nollakuponkilainan uudesta hinnasta voidaan esittää Taylor-sarjana:

(3.6) $$B_\tau'(i) = \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{j!}\left[\frac{\partial}{\partial r_0(\tau)}\Delta r_0(\tau) + \frac{\partial}{\partial r_0(i)}\Delta r_0(i)\right]^j B_0(i) + R_j,$$

jossa j:s potenssi viittaa j:nteen osittaisderivaattaan ja R_j on jäännöstermi, joka jää jäljelle j termin approksimaatiosta.

Tarkastellaan kuponkilainaa, jonka hinta P_0 tällä hetkellä ennen koronmuutosta ilmenee yhtälöstä (2.5). Koronmuutoksen ja τ periodin kuluttua velkakirjan hinta P_τ' on

(3.7) $\quad P_\tau' = \sum_{i=1}^{I} C_i(1 + r_0'(i))^{-i}(1 + r_0'(\tau))^\tau,$

ja vastaava Taylor-sarja on

$$(3.8)\qquad P_\tau' = \sum_{i=1}^{I}\{\sum_{j=0}^{J}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial}{\partial r_0(\tau)}\Delta r_0(\tau) + \frac{\partial}{\partial r_0(i)}\Delta r_0(i)\right]^j B_0(i) + R_{ij}\},$$

jossa R_{ij} on i:nteen kassavirtaan liittyvä jäännöstermi. Otetaan uudesta hinnasta Taylor-sarjan avulla ensimmäisen asteen approksimaatio, ja pudotetaan jäännöstermi pois, jolloin uusi hinta saadaan muotoon

$$(3.9)\qquad P_\tau' \approx P_\tau + \tau(1 + r_0(\tau))^\tau\frac{\Delta r_0(\tau)}{1+r_0(\tau)}\sum_{i=1}^{I} C_i(1 + r_0(i))^{-i} - (1 + r_0(\tau))^\tau\sum_{i=1}^{I} iC_i(1 + r_0(i))^{-i}\frac{\Delta r_0(i)}{1+r_0(i)}.$$

Mitä enemmän Taylor-sarjan termejä otettaisiin mukaan, sitä tarkemmin koronmuutoksen jälkeistä hintaa voitaisiin approksimoida. Koska velkakirjan hinnan ja korkojen välinen suhde ei ole lineaarinen, approksimaatiosta johtuva virhe on sitä suurempi, mitä suurempi korkojen muutos on. Yllä oleva lauseke antaisi velkakirjan uuden hinnan tarkasti, jos korkojen ja hinnan suhde olisi lineaarinen.

Tarkastellaan seuraavaksi, missä olosuhteissa immunisaatio on mahdollinen eli ehto (2.13) toteutuu. Silloin sijoittajalla on varmasti käytettävissään tietty rahamäärä sijoitushorisonttinsa lopussa τ periodin kuluttua. Jaetaan yhtälö (3.9) velkakirjan tämän hetken hinnalla P_0, ja järjestellään termejä hiukan, niin saadaan

$$(3.10)\qquad \frac{P_\tau'}{P_0} \approx (1 + r_0(\tau))^\tau\{1 + \tau\frac{\Delta r_0(\tau)}{1+r_0(\tau)} - \sum_{i=1}^{I}[iC_i(1 + r_0(i))^{-i}/P_0]\frac{\Delta r_0(i)}{1+r_0(i)}\}.$$

Yhtälöstä nähdään, että koronmuutoksen jälkeen velkakirja antaa likimain koronmuutosta edeltävän tuoton $r_0(\tau)$ hetkeen τ saakka vain siinä tapauksessa, että aaltosulkeiden sisällä oleva lauseke on yksi eli, kun

$$(3.11) \qquad \tau \frac{\Delta r_0(\tau)}{1+r_0(\tau)} = \sum_{i=1}^{I} [iC_i(1 + r_0(i))^{-i}/P_0] \frac{\Delta r_0(i)}{1+r_0(i)}.$$

Velkakirja on immunisoitu koronmuutoksia vastaan vain, kun (3.11) on voimassa, ja olettaen, että ensimmäisen asteen approksimaatio riittää. Jos korot seuraavat jotain tiettyä sijoittajan tuntemaa prosessia eli jos sijoittajalla on jotakin etukäteistietoa yhtälössä (3.11) esiintyvien nykykorkojen muutoksista, kassavirrat voidaan ajoittaa (velkakirja voidaan valita) siten, että immunisaatioehto täyttyy. Tarkastellaan seuraavaksi, miten saatu tulos liittyy perinteisiin yksifaktorimalleihin.

3.2 Perinteiset yksifaktorimallit yleisen epätasapainomallin erikoistapauksina

Oletetaan, että nykykorot määräytyvät yhtälön (3.1) mukaisesti ja että $\Delta\tilde{f}_k = 0$, $\forall\ k \neq 1$; kaikki nykykorot riippuvat vain faktorin $\tilde{f}_1$ muutoksista siten, että[25]

$$(3.12) \qquad \Delta r_0(i)/(1 + r_0(i)) = \delta, \qquad \forall\ i,$$

jossa faktorin $\tilde{f}_1$ muutosta merkitään δ:lla: kaikki nykykorot muuttuvat "suhteellisesti" yhtä paljon. Tällöin immunisaatioehto (3.11) supistuu muotoon

$$(3.13) \qquad \tau = \sum_{i=1}^{I} [iC_i(1 + r_0(i))^{-i}/P_0].$$

---

[25] On mahdollista, että on olemassa $k \neq 1$ siten, että $\tilde{f}_k \neq 0$; jonkin faktorin kerroin ei ole nolla, mutta se on vakio. Tällöin korkorakenne ei ole vaakasuora, mutta se tekee paralleeleja liikkeitä.

Mitä yhtälön (3.13) mukaan sijoittajan on tehtävä immunisoidakseen velkakirjansa koronmuutoksilta? Sijoittajan on valittava velkakirjansa tai yleisemmin salkkunsa kassavirtojen rakenne niin, että salkun keskimääräinen jäljellä oleva juoksuaika on yhtä pitkä kuin sijoitushorisontti, kun painoina käytetään kassavirtojen nykyarvoja. Tulos on tuttu perinteisistä yksifaktorimalleista[26].

Yllä olevan yhtälön oikea puoli muistuttaa paljon luvussa 2.3 esiteltyä Macaulay-duraatiota, mutta sillä erolla, että nyt kassavirtojen nykyarvojen laskennassa käytetään nykykorkoja eikä sisäistä korkokantaa. Kyseistä duraatiota kutsutaan Fisher-Weil-duraatioksi[27]. Nimitys ei ole kovin vakiintunut. Korkorakenteen ei tarvitse olla vaakasuora, mutta sen oletetaan silti tekevän vain paralleeleja liikkeitä (tarkasti ottaen "suhteellisia" yhtälön (3.12) mukaisesti).

Kaikki kassavirrat voidaan diskontata myös velkakirjan sisäisellä korkokannalla y, jolloin saadaan Macaulay-duraatio D_{MAC} (yhtälön oikea puoli):

(3.14) $\tau = \sum_{i=1}^{I} [iC_i (1 + y)^{-i}/P_0]$.

Kun eri kassavirtojen diskonttauskorkona käytetään sisäistä korkokantaa, korkorakenne oletetaan implisiittisesti aina vaakasuoraksi eli $\tilde{f}_k = 0$, $\forall$ $k \neq 1$ ja $r_0(i) = y$, $\forall$ i[28].

Luvussa 2.3 mainittiin, että Macaulay-duraatiosta voidaan johtaa modifioitu duraatio, joka on perinteisistä duraa-

---

[26] Perinteisistä yksifaktorimalleista ks. Bierwag - Kaufman - Toevs (1983) tai Ilmanen (1989).

[27] Fisher - Weil (1971) suosittivat kyseisen mittarin käyttöä, ja jo Macaulay (1938) johti sen kuvaamaan velkakirjan keskimääräistä jäljellä olevaa juoksuaikaa.

[28] Ingersoll - Skelton - Weil (1978) s. 630 - 631.

tiomittareista nykyään suosituin. Modifioidun duraation etuna on, että se liittää suoraan sisäisen korkokannan muutokset velkakirjan antamaan tuottoon yhtälön (2.12) mukaisesti[29]:

$$(2.12)\qquad \frac{dP}{P} = -D_{MAC}\frac{\Delta y}{1+y} = -D_{MOD}\Delta y.$$

Korkoja ohjaavana faktorina voidaan yksifaktorimalleissa pitää esimerkiksi hetkellistä nykykorkoa, mutta se voisi olla yhtä hyvin mikä muu nykykorko tahansa.

Immunisaatiota perinteisillä duraatiomalleilla kuvattiin jo luvussa 2.3. Luonnollisesti myös tässä kehikossa sijoitussalkun rakennetta on muutettava dynaamisesti, jotta suojaus pysyisi koko ajan yllä.

3.3 Immunisaation parantaminen yleisen epätasapainomallin avulla

Kuten aiemmin mainittiin, korkojen ja velkakirjan arvon suhde ei ole todellisuudessa lineaarinen. Siksi perinteiset yksifaktorimallit eivät voi oikein kuvata hintojen määräytymistä, ja yhtälön (3.9) antamaa hinta-approksimaatiota voidaan parantaa ottamalla mukaan useampia Taylor-sarjan termejä. Lisäksi tähän mennessä on otettu huomioon vain korkorakenteen paralleelit liikkeet, joten mahdollisten lisäfaktoreiden mukaanottaminen parantaa immunisaatiota. On koko ajan pidettävä mielessä, että oletuksen (3.1) ajatellaan olevan voimassa.

---

29 Esim. jos velkakirjan tai salkun modifioitu duraatio on viisi, yhden prosenttiyksikön muutos sisäisessä korkokannassa aiheuttaa viiden prosentin suhteellisen muutoksen velkakirjan tai salkun arvossa.

3.3.1 Approksimaation parantaminen ja immunisaatio

Korkojen muutoksen jälkeisen hinnan approksimaatiota voidaan parantaa ottamalla mukaan useampia Taylor-sarjan termejä yhtälöstä (3.8). Samalla immunisaatioehtojen lukumäärä lisääntyy aina yhdellä jokaista uutta termiä kohti. Tilan säästämiseksi Taylor-sarjaa ei kirjoiteta tähän näkyviin, vaan esitetään ainoastaan j:nnettä termiä vastaava immunisaatioehto[30]:

$$(3.15) \qquad \tau^j = \sum_{i=1}^{I} [i^j C_i (1 + r_0(i))^{-i}/P_0], \qquad j = 2,\ldots,J,$$

jossa j viittaa sarjan termin järjestyslukuun. Edellä esitetyn lineaarisen approksimaation tapauksessa j sai arvon yksi. Ehto (3.15) kertoo sijoittajalle, kuinka hän voi mahdollisimman hyvin suojautua korkorakenteen parallelleilta tai tarkemmin sanoen nykykorkojen suhteellisilta muutoksilta[31].

On täysin empiirinen kysymys, kuinka monta termiä immunisaatiossa kannattaa ottaa huomioon. Toisaalta lisätermit tarkentavat approksimaatiota: nykykorkojen suhteellisen muutoksen vaikutus velkakirjan tai salkun arvoon otetaan huomioon yhä tarkemmin. Mutta toisaalta ne asettavat samalla sijoitustoiminnalle lisärajoitteita.

---

[30] Bierwag - Kaufman - Latta (1988) s. 7.

[31] Kun j = 2 ja kaikkien nykykorkojen $r_0(i)$ tilalle asetetaan sisäinen korkokanta y, yhtälön (3.15) oikea puoli on modifioidun duraation yhteydestä tuttu konveksisuus hiukan yksinkertaistettuna (ks. Goodman - Vijayaraghavan (1987, s. 103). Konveksisuus johdetaan velkakirjan hinnan toisesta derivaatasta korkotason suhteen, joten se kertoo samalla, kuinka modifioitu duraatio muuttuu korkotason suhteen. Samanlaiset "konveksisuudet" voidaan luonnollisesti johtaa muillekin korkorakenteeseen vaikuttaville faktoreille.

3.3.2 Lisäfaktorien mukaanottaminen ja immunisaatio

Onnistuneen immunisaation kannalta ehkä tärkeämpi tekijä on ottaa huomioon useampien faktorien vaikutus: tässä tapauksessa muu kuin korkorakenteen paralleeli liike[32]. Jos nykykorot on mahdollista lausua yhtälön (3.1) avulla, voidaan osoittaa, että jokaista lisäfaktoria $\tilde{f}_k$ vastaava immunisaatioehto on

$$(3.16) \qquad \tau^k = \textstyle\sum_{i=1}^{I} [i^k C_i (1 + r_0(i))^{-i} / P_0], \qquad k = 2,\ldots,K.$$

Kun aiemmin k sai arvon yksi, päädyttiin Fisher-Weil-duraatioon. Yllättäen ehto (3.16) on täsmälleen samanlainen kuin ehto (3.15), joka vastaa parempaa hinnan ja korkojen suhteen approksimaatiota ensimmäisen faktorin muuttuessa. Sijoittajan on mahdollista saavuttaa kaksi tavoitetta samalla kertaa: ottamalla huomioon toisen faktorin (joka määrää korkorakenteen jyrkkyyden) vaikutuksen velkakirjan hintaan hän tulee samalla parantaneeksi ensimmäiseen faktoriin (joka määrää korkotason) liittyvää approksimaatiota yhden Taylor-sarjan termin verran. Molemmat edut saavutetaan samalla, kun toiminnan rajoitteet lisääntyvät vain yhdellä ehdolla.

Tulos ei ole yleinen, vaan seuraa pelkästään oletuksesta, että korkorakenteen liikkeet voidaan mallittaa yhtälön (3.1) tapaan[33]. Jos nykykorkojen oletetaan määräytyvän jonkin muun mallin mukaan esimerkiksi seuraavasti:

$$(3.17) \qquad 1 + r_0(i) = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 t + \tilde{f}_3 t^2 + \ldots + \tilde{f}_K t^{K-1},$$

jolloin nykykoron muutos on

---

[32] Garbade (1985), Goodman - Vijayaraghavan (1987) ja Chambers - Carleton - McEnally (1988) ovat esittäneet samanlaisen menetelmän parantaa perinteisen yksifaktorimallin antamaa immunisaatiota. He käyttävät termiä "yleinen immunisaatio" tai "duraatiovektori".

[33] Bierwag - Kaufman - Latta (1988) s. 10.

(3.18) $\Delta r_0(t) = \Delta\tilde{f}_1 + \Delta\tilde{f}_2 t + \Delta\tilde{f}_3 t^2 + \ldots + \Delta\tilde{f}_K t^{K-1}$.

Approksimaation tarkennuksesta ja lisäfaktorien mukaanottamisesta seuraavat immunisaatioehdot eivät enää käy yhteen. Lisätermit ja lisäfaktorit voi ottaa huomioon vain täyttämällä kullekin ominainen immunisaatioehto. Näin ollen toiminnan rajoitteet lisääntyvät jälleen yksi yhteen saavutettujen tavoitteiden kanssa.

Kuinka monta faktoria immunisaatiossa kannattaa ottaa huomioon? Tähänkään kysymykseen ei ole suoraa vastausta, vaan sijoittajan on päätettävä siitä itse nojautuen käytännön kokemuksiinsa. Taustalla on luonnollisesti etujen ja rajoitteiden "trade-off", joka on aiemmin käynyt ilmi.

3.4 Tasapainoehdon rikkoutuminen ja stokastisen prosessin riski

Kolmannessa luvussa on käyty läpi korkorakenteen dynamiikkaa kuvaavia faktorimalleja, joille kaikille on ominaista, että ne eivät täytä markkinoiden tasapainoehtoa. Sijoittaja voi saavuttaa riskittömiä arbitraasivoittoja, jos korkorakenne seuraa oletettua stokastista prosessia. Seuraavaksi tutkitaan syitä tähän.

Luvussa 2 immunisaatio määriteltiin yhtälön (2.13) avulla:

(2.13) $P_\tau{}' \geq (1 + r_0(\tau))^\tau P_0$.

Mikä tahansa salkku, joka antaa vähintään sijoitushorisontin pituisen nollakuponkilainan tuoton $r_0(\tau)$, on sijoittajan kannalta immunisoitu sijoitus. Sijoittajalle tarjoutuu välittömästi arbitraasin mahdollisuus: hän myy lyhyeksi kyseistä nollakuponkilainaa ja ostaa immunisoitua salkkua siten, että sijoitettu pääoma on nolla. Kun korkorakenne muuttuu tavalla, joka salkkua rakennettaessa on oletettu (tiedetty), voidaan osoittaa, että arbitraasisalkun rahallinen tuotto on aina positiivinen[34].

On samantekevää, tarkastellaanko yksinkertaista Macaulay-duraatiota vai immunisaatioehtoja, jotka ottavat huomioon useampia faktoreita. Koska immunisoitu salkku rakennetaan edellä esitetyin periaattein, arbitraasin mahdollisuus ei koskaan häviä. Siksi markkinoiden tasapaino edellyttää, että korkorakenteen on tehtävä myös sellaisia liikkeitä, joita immunisaatioehtoja johdettaessa ei ole otettu huomioon.

Epätasapainomallien yhteydessä puhutaankin stokastisen prosessin riskistä: oletettu malli ei täydellisesti kuvaa korkorakenteen stokastista prosessia. Riski on välttämätön edellytys markkinoiden tasapainolle[35].

---

[34] Ingersoll - Skelton - Weil (1978) s. 630 - 632.

[35] Bierwag - Kaufman - Latta (1988) s. 7.

4 TASAPAINOMALLI

4.1 Tasapainomallin yleispiirteitä

Tasapainomallin johtamisessa lähdetään liikkeelle arbitraasihinnoitteluteoriasta. Kaikkien kiinteäkorkoisten velkakirjojen odottamattomien tuottojen oletetaan riippuvan lineaarisesti rajallisesta määrästä faktoreita. Samalla luonnollisesti oletetaan, että faktorit ovat eksogeenisia ja että mikä tahansa nykykorko tasapainossa voidaan esittää faktoreiden ja vastaavan nollakuponkilainan jäljellä olevan juoksuajan funktiona. Tasapainomalleissa suosituin faktorikandidaatti on hetkellinen nykykorko[36]. Muita faktoreita voivat olla esimerkiksi jokin pitkä nykykorko tai muuttuja, joka kuvaa korkorakenteen kuperuutta (vrt. epätasapainomallin yleinen muoto luvussa 3.1).

Tasapainomalleissa faktoreiden ei oleteta tekevän diskreettejä liikkeitä, kuten epätasapainomalleissa, vaan seuraavan jotakin Ito-prosessia jatkuva-aikaisessa maailmassa. Malleja johdettaessa prosesseja ei välttämättä parametroida vaan tämä jää tehtäväksi sitten, kun mallia aletaan testata. Eräissä tasapainomalleissa on joko tehty *a priori* -oletus faktorin seuraamasta prosessista (esim. Vasicek (1977)) tai prosessin muoto määräytyy yleisen tasapainon mallissa (Cox - Ingersoll - Ross (1985)), jossa reaalitalous ja sijoittajien preferenssit ovat eksplisiittisesti mukana.

Tässä luvussa keskitytään Brennan - Schwartzin kahden faktorin tasapainomalliin, jossa korkorakennetta ohjaavina faktoreina ovat korkorakenteen molemmat "päät", lyhyt korko ja pitkä korko, jotka esitellään luvussa 4.3.1. Mallin tasapainon johtamisessa käytetään hyväksi arbitraasin eliminointiehtoa. Tulokseksi saadaan nollakuponkilainan tasapainohinnan määräytymistä kuvaava osittaisdifferentiaaliyhtälö, joka on ratkaistavissa numeerisin menetelmin.

---

[36] Hetkellinen nykykorko määritellään luvussa 4.3.

Menetelmän laskennallinen hankaluus rajoittaa kuitenkin mallin käyttömahdollisuuksia korkoriskin hallinnassa. Avuksi tulee empiirinen havainto, että pitkä korko ja pitkän ja lyhyen koron erotus ovat käytännössä korreloimattomia. Hinnoitteluyhtälön muoto yksinkertaistuu, kun malliin lisätään oletus korreloimattomuudesta. Mallista tulee samalla käyttökelpoisempi, koska pienellä lisäoletuksella hinnalle voidaan johtaa suljetun muodon ratkaisu. Tällöin immunisaatiokin tulee huomattavasti helpommaksi toteuttaa.

Arkikokemus ja myös empiirinen tutkimus ovat osoittaneet[37], että lyhyt ja pitkä korko ovat tärkeimmät korkorakenteen sijaintiin ja muotoon vaikuttavat tekijät. Niillä on siksi eniten potentiaalia selittää velkakirjojen tuoton vaihtelua. Paitsi että Brennan - Schwartz -malli käyttää lyhyttä ja pitkää korkoa faktoreina, se tarjoaa teoreettisesti konsistentin lähtökohdan toteuttaa immunisaatiostrategiaa. Ennen kuin Brennan - Schwartz -malli esitellään, tutustutaan sen taustalla olevaan APT:n mukaiseen yleiseen malliin.

4.2 Korkorakenteen tasapainomalli yleisessä muodossa

APT:n hengessä kaikkien luottoriskittömien velkakirjojen tuoton oletetaan riippuvan lineaarisesti K faktorista[38], jotka seuraavat Ito-prosessia[39]:

$$(4.1) \qquad df_k = \mu_k(f_1,\ldots,f_K,t)dt + \sigma_k(f_1,\ldots,f_K,t)dz_k, \qquad k = 1,\ldots,K,$$

---

[37] Esim. Nelson - Schaefer (1983) s. 78 - 81.

[38] Tasapainomallin yleisestä muodosta ks. Nelson - Schaefer (1983) s. 63 - 64, jota tämä esitys pääpiirteissään seuraa.

[39] Diffuusioprosesseista mukaanluettuna Ito-prosessit ks. Malliaris - Brock (1982).

jossa $\mu_k(\cdot)$ = faktorin k odotettu muutos,

$\sigma_k(\cdot)$ = faktorin k muutoksen sisältämän stokastisen osan hetkellinen keskihajonta, ja

dz_k = Wiener-prosessin (Brownin liikettä) lisäys:

$E(dz_k) = 0, \quad \forall k,$

$E(dz_j dz_k) = dt, \quad j = k$, ja

$E(dz_j dz_k) = \rho_{jk} dt, \quad j \neq k.$

Faktorien odotettu muutos ja hetkellinen varianssi riippuvat kaikkien faktorien senhetkisistä arvoista ja ajanhetkestä. Lisäksi Wiener-prosessien innovaatiot ovat hetkellisesti korreloituneet kertoimella ρ_{jk}.

Kun nollakuponkilainan tasapainohinta $B(\tau)$ tunnetaan, määritellään nykykorko $r(\tau)$ seuraavasti[40]:

(4.2) $$B(\tau) \equiv \exp[-\tau r(\tau)].$$

Hinta $B(\tau)$ riippuu lainan jäljellä olevasta juoksuajasta τ samoin kuin tasapainonykykorko $r(\tau)$. Notaation yksinkertaistamiseksi diskonttaus on tehty jatkuva-aikaisesti korkoa korolle, mikä ei olennaisesti vaikuta itse analyysiin. On huomattava, että lainan hinta on nimenomaan tasapainohinta; se ei ole välttämättä markkinoilla havaittava hinta, sillä se ei sisällä epäsystemaattista riskiä. Samoin vastaava nykykorko on nimenomaan tasapainonykykorko.

Yhtälöstä (4.2) nähdään, että luonnollisesti jo ajan kuluminen antaa lainalle tuottoa, koska $B(\tau)$ lähestyy lainan nimellisarvoa 1 markkaa. Lisäksi tuotto riippuu faktoreista, joiden muutokset ohjaavat korkorakennetta. Käyttämällä hyväksi Iton lemmaa lainan hinnan muutos voidaan esittää muodossa[41]

---

[40] Määritelmä (4.2) on analoginen määritelmän (2.1) kanssa.

[41] Stokastisesta differentiaalilaskennasta ks. Malliaris - Brock (1982).

$$(4.3) \qquad dB(\tau) = \mu_B(\tau)dt - \tau B(\tau)\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r(\tau)}{\partial f_k} \sigma_k dz_k .$$

Termiin $\mu_B(\cdot)dt$ on sisällytetty kaikki lainan odotettu tuotto, joten se sisältää riskittömän koron (hetkellisen nykykoron) lisäksi kaikkiin faktoreihin liittyvät riskipreemiot yhtälön (2.8) mukaisesti. Odotettu tuotto esitetään näin kompaktissa muodossa, koska immunisaatioon pyrittäessä kiinnostus kohdistuu vain riskikomponenttiin.

Jälkimmäinen termi edustaa riskiä. Termistä voi erottaa summan sisältä kyseisen nykykoron osittaisderivaatat kunkin faktorin suhteen sekä summan edestä nollakuponkilainan osittaisderivaatan vastaavan nykykoron suhteen: faktorien muutokset välittyvät lainan hintaan "nykykoron kautta"[42].

Kuponkilaina, joka sisältää I eri hetkiin (merk. τ_i) ajoittuvaa kassavirtaa, on salkku nollakuponkilainoja, ja sen tasapainohinta P on funktio ajanhetkestä ja I nykykorosta:

$$(4.4) \qquad P = \sum_{i=1}^{I} \exp[-\tau_i r(\tau_i)].$$

Kuponkilainan hinnan muutos on yhtälön (4.3) mukaisesti:

$$(4.5) \qquad dP = \sum_{i=1}^{I} \mu_B(\tau_i)dt - \sum_{i=1}^{I} \tau_i B(\tau_i)\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r(\tau_i)}{\partial f_k} \sigma_k dz_k .$$

Kaikkien kassavirtojen hintojen muutosten deterministiset ja stokastiset osat on yksinkertaisesti summattu yhteen.

---

[42] Luonnollisesti hinta ja nykykorko ovat saman asian eri puolet, joten tällainen vaikutuksen jakaminen on hiukan keinotekoista. Jako on kuitenkin hyödyllinen, kun aletaan tarkastella kuponkilainan hinnan riippuvuutta korkorakenteen liikkeistä.

APT:ssa tuotto riippuu faktorien odottamattomista muutoksista yhtälön (2.7) mukaisesti. Yhtälö (4.5) saadaan samaan muotoon jakamalla molemmat puolet velkakirjan hinnalla P ja muuttamalla yhtälön jälkimmäisen osan summauksen järjestystä:

$$(4.6) \qquad \frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\,\mu_P(\cdot)dt - \textstyle\sum_{k=1}^{K} D_k \sigma_k dz_k ,$$

jossa $\mu_P(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{I} \mu_B(\tau_i)$, ja

$$D_k \equiv \frac{1}{P} \textstyle\sum_{i=1}^{I} \tau_i B(\tau_i) \displaystyle\frac{\partial r(\tau_i)}{\partial f_k}.$$

Yhtälön ensimmäinen termi on kuponkilainan odotettu tuotto, joka sisältää sekä riskittömän tuoton (hetkellisen nykykoron) että APT:n mukaiset riskipreemiot korvauksena systemaattisesta riskistä.

Toinen termi sisältää kuhunkin faktoriin liittyvät duraatiot D_k, jotka kertovat velkakirjan tuoton herkkyyden kullekin faktorille: kun k:s faktori muuttuu odottamattomasti $\sigma_k dz_k$:n verran, siitä aiheutuva tuotto on $- D_k \sigma_k dz_k$.

Tasapainomallin yleisessä muodossa riskin lähteitä ei ole eksplisiittisesti ilmaistu. Seuraavaksi tutustutaan kahden faktorin malliin, jossa tämä tehdään.