Vakuutusvalvonta

RAHOITUKSEN TEORIAA JA SOVELLUKSIA AKTUAAREILLE

Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja
MONISTEET 2007:3

Vakuutusvalvontavirasto
Mikonkatu 8, PL 449
00101 Helsinki
+358-9-4155 950
+358-9-4155 9515
www.vakuutusvalvonta.fi

Försäkringsinspektionen
Mikaelsgatan 8, PB 449
FIN-00101 Helsingfors
+358-9-4155 950
+358-9-4155 9515
www.vakuutusvalvonta.fi

Insurance Supervisory Authority
Mikonkatu 8, P.O. Box 449
FIN-00101 Helsinki
+358-9-4155 950
+358-9-4155 9515
www.vakuutusvalvonta.fi

ISSN 1457-201X
ISBN 978-952-5350-44-9

KUVAILULEHTI

Julkaisija/Utgivare
Vakuutusvalvontavirasto, Försäkringsinspektionen

Tekijät/Redaktörer
Luis Alvarez ja Lasse Koskinen

Julkaisun nimi/Titel
Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille

Sisältö/ Innehåll

1. Hyötyfunktiot ja riskinkaihdanta
2. Portfolioteoria
3. APT-malli
4. Jatkuva-aikainen rahoitusteoria
5. Korkojen aikarakennemallit
6. Hiukan riskin mittaamisesta ja aikasarja-analyysistä
7. Henkivakuutussopimuksen käyvän arvon määritys

Tiivistelmä/Referat

Tämä moniste on tarkoitettu aktuaaritutkinnon suorittajille sijoitustoiminnan osuuden oppimateriaaliksi. Toivomme siitä olevan hyötyä myös muille rahoituksen teoriasta ja vakuutusalasta kiinnostuneille. Monisteen tarkoituksena on perehdyttää lukija rahoituksen perusteoriaan ja tarjota sitä kautta välineistö syvemmän teorianmuodostuksen ymmärtämiseen sekä soveltamiseen. Lukijan matematiikan lähtötiedoiksi oletetaan todennäköisyyslaskennan ja stokastisten prosessien sekä tilastotieteen perusteet. Lisäksi rahoituksen perusteet oletetaan tunnetuksi esimerkiksi Helsingin yliopiston kurssin rahoituksen matematiikkaa tasoisesti.

Detta kompendium är avsett som studiematerial i avsnittet om placeringsverksamhet för dem som avlägger aktuarieexamen. Vi hoppas att det också skall vara till nytta för andra som är intresserade av finansieringsteori och försäkringsbranschen. Syftet med kompendiet är att redogöra för grundteorin inom finansiering och därigenom erbjuda redskap för förståelse och tillämpning av mer djupgående teoribildning. Läsarna förväntas ha matematiska baskunskaper inom sannolikhetskalkylering och stokastiska processer samt statistik. Därtill antas det att läsaren har grundläggande kunskaper om finansiering motsvarande t.ex. Helsingfors universitets kurs i finansmatematik.

Avainsanat/Nyckelord

Rahoitus, sijoitustoiminta, sijoitusriski, optio, johdannainen, vakuutus
Finansiering, placeringsverksamhet, placeringsrisk, option, derivat, försäkring

Sarja/nimi ja numero Serie/namn och nummer	ISSN	ISBN
Monisteet/Kompendium 2007:3	1457-201X	978-952–5350-44-9

Sivumäärä/Antal sidor	Kieli/Språk	Hinta/Pris
112	Suomi	---

Jakaja/Distributör
Vakuutusvalvontavirasto/
Försäkringsinspektionen
Insurance Supervisory Authority
Jaana Nuortia-Kujanpää · +358 9 4155 9530
e-mail: kirjaamo@vakuutusvalvonta.fi

Kustantaja/Förläggare
Vakuutusvalvontavirasto
Försäkringsinspektionen
Insurance Supervisory Authority

Sisältö

Actuaries provide commercial, financial and prudential advice on the management of assets and liabilities - especially where long term management and planning are critical factors. FACULTY &INSTITUTE OF ACTUARIES, UK

Tämä moniste, joka on ensimmäinen korjattu painos Vakuutusvalvontaviraston julkaisurajan monisteesta 2004:2, on tarkoitettu aktuaaritutkinnon suorittajille sijoitustoiminnan osuuden oppimateriaaliksi. Uutena osana on luku 7, joka käsittelee henkivakuutussopimusten arvottamista. Toivomme monisteesta olevan hyötyä myös muille rahoituksen teoriasta ja vakuutusalasta kiinnostuneille. Monisteen tarkoituksena on perehdyttää lukija rahoituksen perusteoriaan ja tarjota sitä kautta välineistö syvemmän teorianmuodostuksen ymmärtämiseen sekä soveltamiseen. Tämä moniste ei sisällä harjoitustehtäviä, mutta niitä löytyy runsaasti lähdeluettelossa mainituista teoksissa. Lukijan matematiikan lähtötiedoiksi oletetaan todennäköisyyslaskennan ja stokastisten prosessien sekä tilastotieteen perusteet. Lisäksi rahoituksen perusteet oletetaan tunnetuksi esimerkiksi Helsingin yliopiston kurssin "rahoitusteoria"tai "sijoitustoiminnan matematiikka"tasoisesti. Helppolukuinen ja hyödyllinen johdanto erityisesti vakuutuslaitosten sijoitustoimintaan löytyy lähdeluettelossa mainitun teoksen "*Modern Actuarial Theory and Practice*"(toinen painos, Booth ym., 2004) kahdessa ensimmäisessä luvussa. Laajempi ja syvällisempi aktuaareja varten kirjoitettu teos on "*Financial Economics with applications to investments, insurance and pensions*"(toimittanut Panjer, 1998). Korkojen mallinnukseen hyvän johdannon tarjoaa teos "*Interest rate models: An introduction*"(Cairns, 2004).

Haluamme kiittää monisteen tekemisen edesauttamisesta SHV-lautakunnan jäseniä ja sihteeriä eli Tarja Härköstä, Esko Kivisaarta, Hannu Parviaista, Martti Pesosta, Tarmo Pukkilaa, Jukka Rantalaa ja Onerva Savolaista. Lisäksi haluamme kiittää Helsingin yliopiston yliopistolehtori Harri Nyrhistä ja Ilmarisen matemaatikko Antero Rannetta hyödyllisistä kommenteista. Monisteen ensimmäisen painoksen kieliasun puutteiden ja muiden epätäsmällisyyksien korjausehdotuksista haluamme lämpimästi kiittää Jari Niittuinperää. Jäljelle jääneet virheet ovat toki tekijöiden vastuulla.

Luis Alvarez
Professori

Turun Kauppakorkeakoulu

Lasse Koskinen
Tutkimusjohtaja

Vakuutusvalvontavirasto

1 Hyötyfunktiot ja riskinkaihdanta

Finance is a fun game to play but hard to win. BREDLAY and MYERS

1.1 Staattiset valintaongelmat

1.1.1 Hyötyfuntio

Jos päätöksien seuraukset olisivat varmoja ja siten etukäteen tunnettuja, tekisi rationaalinen päättäjä aina sen päätöksen, jonka lopputulos olisi hänen omalta kannaltaan mieluisin. Valitettavasti käytännössä valinta ei ole ihan näin yksinkertainen, sillä eri sijoittajat ovat keskenään erilaisia ja siten preferoivat eri riskitasoja eri tavalla. Sijoittajat poikkeavat keskenään erityisesti riskiä koskevissa preferensseissään (toinen karttaa riskiä, kun taas toinen pitää riskinotosta). Tämän takia tarvitsemmekin teknisen välineen, hyötyfunktion, jolla arvioimme ja arvostamme erilaisia satunnaisia varallisuuden tasoja odotetun hyödyn periaatteella. Karkeasti ottaen hyötyfunktioksi kelpaa mikä tahansa tarkastelun kohteena olevan taloudellisen suureen määrittelyjoukossa määritelty jatkuva ja monotonisesti kasvava kuvaus $U : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$, missä $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ on hyötykuvauksen $U(x)$ määrittelyjoukko. On myös syytä huomata, että mikäli tarkasteltava hyötyfunktio on differentioituva, kutsutaan kuvausta $U'(x)$ *rajahyödyksi.* Yleensä oletetaan, että hyötyfunktio toteuttaa ns. *vähenevän rajahyödyn lain,* jonka mukaan $U'(x)$ on vähenevä (jokainen lisäyksikkö siis kasvattaa hyötyä, mutta hidastuvaa vauhtia). Selvästi siis nähdään, että mikäli vähenevän rajahyödyn laki toteutuu, on hyötyfunktio $U(x)$ konkaavi. Erityisesti, vertailtaessa satunnaisia varallisuuden tasoja x ja y tulee ensiksi määrittää arvot $\mathbf{E}[U(x)]$ ja $\mathbf{E}[U(y)]$ ja sen jälkeen valita $\max\{\mathbf{E}[U(x)], \mathbf{E}[U(y)]\}$.

Esimerkki: Tarkastellaan kahta satunnaista varallisuuden tasoa x ja y ja oletetaan, että $\ln x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ja $\ln y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ (ts. varallisuustasot x ja y ovat ns. Log-normaalijakautuneita joukolle $\mathbb{R}_+$; tämä on enemmän kuin keskeinen jakauma rahoituksen teoriassa!). Ennen kuin etenemme esimerkissä, määritetään hyötyfunktion $U(z)$ odotusarvo, kun $z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ja $\mathbf{E}[U(z)] < \infty$. Nyt on selvää, että

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(z)] &= \mathbf{E}[U(e^{\ln z})] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} U(e^{\ln y}) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma v} U(v) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv.\end{aligned}$$

Edellisessä esityksessä esiintyvä funktio

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma v} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln v-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

on lognormaalijakauman tiheysfunktio. Erityisesti siis huomataan, että $\mathbf{E}[e^z] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$ ja $\text{var}[e^z] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$. Oletetaan nyt, että $U(x) = x^b$, missä $b > 0$ on tunnettu vakio. Ottamalla hyötyfunktiosta luonnollinen logaritmi nähdään, että $\ln U(x) = b \ln x$. Oletuksen mukaan $\ln x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, joten siis $b \ln x \sim N(b\mu_x, b^2\sigma_x^2)$. Vastaavasti nähdään, että $b \ln y \sim N(b\mu_y, b^2\sigma_y^2)$, joten soveltamalla edellä johdettua odotusarvon kaavaa saadaan $\mathbf{E}[U(z)] = e^{b\mu+\frac{1}{2}b^2\sigma^2}$. Tällöin valintatilanteessa täytyy vertailla pelkästään arvoja $\mathbf{E}[U(x)] = e^{b\mu_x+\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}$ ja $\mathbf{E}[U(y)] = e^{b\mu_y+\frac{1}{2}b^2\sigma_y^2}$. Luonnollisesti, sijoittaja valitsee

$$\max\{e^{b\mu_x+\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2}, e^{b\mu_y+\frac{1}{2}b^2\sigma_y^2}\} = e^{b\mu_x+\frac{1}{2}b^2\sigma_x^2} \max\{1, e^{b(\mu_y-\mu_x)+\frac{1}{2}b^2(\sigma_y^2-\sigma_x^2)}\}.$$

Huomataan, että jos $\mu_x = \mu_y$, niin sijoittaja valitsee aina sen kohteen, jonka logaritmisen arvon hajonta on suurin! On syytä huomata, ettei tämä kuitenkaan suoraan tarkoita sijoittajan valitsevan riskillisimmän projektin. Miksi? Koska yllä esitetyssä muodossa muutos parametrissa σ_x tai parametrissa σ_y muuttaa sekä odotusarvoa että varianssia. Tämä on tärkeä huomio, sillä riskillisyyttä mitataan yleensä pelkästään keskihajonnan avulla. Määritellään tämän takia parametri $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$. Tällöin nähdään suoraan, että

$$\mathbf{E}[z] = e^{\alpha}, \quad \text{var}[z] = e^{2\alpha}(e^{\sigma^2}-1), \quad \text{ja} \quad \mathbf{E}[z^b] = e^{\alpha b+\frac{1}{2}\sigma^2 b(b-1)}.$$

Tästä esityksestä nähdään suoraan, että valitsemalla jakauman parametreiksi α ja σ voidaan tutkia riskin kasvattamista ilman, että keskiarvo muuttuu (ns. *mean preserving spread*). Erityisesti nähdään, että sijoittajan edellä tarkasteltu valintaongelma tulee muotoon

$$\max\{e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)}, e^{\alpha_y b+\frac{1}{2}\sigma_y^2 b(b-1)}\} = e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)} \max\{1, e^{(\alpha_y-\alpha_x)b+\frac{1}{2}(\sigma_y^2-\sigma_x^2)b(b-1)}\}.$$

Erityisesti siis huomataan, että mikäli $\alpha_x = \alpha_y$, niin valintaongelma tulee muotoon

$$e^{\alpha_x b+\frac{1}{2}\sigma_x^2 b(b-1)} \max\{1, e^{\frac{1}{2}(\sigma_y^2-\sigma_x^2)b(b-1)}\}.$$

Tämä tapaus on mielenkiintoinen, sillä se osoittaa, että hyötykuvauksen muoto todella vaikuttaa valintaan. Nyt nähdään suoraan, että

(i) jos $b > 1$ (jolloin rajahyöty on kasvava), niin sijoittaja valitsee aina sen projektin, jonka volatiliteetti on korkein, ts. projektin, jonka hajonta on $\max(\sigma_x, \sigma_y)$;

(ii) jos $b = 1$ (jolloin rajahyöty on vakio), niin riski ei vaikuta päätäntään ja valitsemalla kumpi tahansa projekteista sijoittaja odottaa saavansa tuoton $e^{\alpha_x} = e^{\alpha_y}$;

(iii) jos $b < 1$ (jolloin rajahyöty on vähenevä), niin sijoittaja valitsee aina sen projektin, jonka volatiliteetti on matalin, ts. projektin jonka hajonta on $\min(\sigma_x, \sigma_y)$;

Tämä ominaisuus on tärkeä ja se kannattaakin pitää mielessä aina kun tarkastelee jakautumia jotka voidaan ilmaista kahden parametrin avulla. Syynä tähän argumenttiin on se, että useasti tavoitteena on nimenomaisesti tehdä valintatarkasteluja juuri saman odotetun tuoton mutta eri riskin kohtaavan sijoituksen välillä. Toisaalta on syytä myös painottaa, että esimerkin valossa vähenevän rajahyödyn lain toteuttava hyötykuvaus johtaa matalimman riskin omaavan projektin valintaan (ja siten riskin kaihdantaan). Vaikka tämä johtopäätös onkin tämän tyyppisissä esimerkeissä oikea, ei se välttämättä päde yleisesti malleissa, joissa riskillisten päätösten intertemporaalisuus on huomioitu.

Esimerkki: Sijoittaja jonka hyötyfunktio on muotoa $U(x) = \sqrt{x}$ pohtii kahta sijoitusvaihtoehtoa, joista valtion obligaatiot antavat 6 miljoonan varman varallisuuden. Toisella sijoituksella on kolme mahdollista lopputulosta 10, 5 ja 4 miljoonaa todennäköisyyksillä 0.25, 0.5 ja 0.25, jolloin kyseisen sijoituksen odotettu tuotto on siis

$$\mathbf{E}[x_2] = 10 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.25 = 6$$

joka on täsmälleen yhtä suuri kuin obligaatioiden tuotto. Määritetään nyt sijoittajan odotetut hyödyt kummastakin sijoituksesta. Suoraan sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\sqrt{x_1}] &= \sqrt{6} \approx 2,4495 \\ \mathbf{E}[\sqrt{x_2}] &= 0.25\sqrt{10} + 0.5\sqrt{5} + 0.25 \cdot 2 \approx 2,4086,\end{aligned}$$

eli sijoittaja valitsee vieläkin ensimmäisen varman sijoituksen siitä huolimatta, että molemmat tuottavat keskimäärin saman verran. Oletetaan nyt, että

$$x_2 = \begin{cases} 10 + M & \text{tn:llä } 0.25 \\ 5 & \text{tn:llä } 0.5 \\ 4 & \text{tn:llä } 0.25, \end{cases}$$

missä $M > 0$ on tuntematon vakio, ja pyritään vastaamaan seuraavaan kysymykseen:

> *Kuinka suuri tulee hyvään maailmantilaan liittyvän kompensaation M olla, jotta sijoittaja olisi indifferentti varman tuoton ja epävarman tuoton antavan sijoituksen välillä?*

Nyt huomataan, että

$$\mathbf{E}[x_2] = 6 + \frac{M}{4} > 6,$$

sillä $M > 0$. Määrittämällä odotetut hyödyt ja asettamalla ehto $\mathbf{E}[\sqrt{x_2}] = \mathbf{E}[\sqrt{x_1}]$ saadaan

$$\frac{\sqrt{M+10}}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{6} M = 1,0611,$$

jolloin epävarman sijoituksen odotettu tuotto on 6,2653, joka on siis suurempi kuin varman sijoituksen tuotto.

Esimerkki: Oletetaan, että varallisuustasoille X ja Y pätevät ehdot

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{tn:llä } p \\ x_2 & \text{tn:llä } 1-p \end{cases}$$

ja $Y = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) = \mathbf{E}[x]$ todennäköisyydellä 1, missä $p \in [0,1]$ ja $(x_2, x_1) \subset \mathbb{R}_+$. Oletetaan myös, että sijoittajan hyötykuvaus $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ on aidosti konkaavi. Kuten edellä tehdystä analyysista on selvää, tällöin $E[U(X)] \leq U(Y)$, joten rationaalinen sijoittaja valitsee aina riskittömän vaihtoehdon. Tarkastellaan nyt varallisuustasoa $Z = X + M$, missä $M > 0$ on tunnettu kompensaatio. Määritellään nyt kuvaus $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ muotoa

$$f(M) = E[U(X+M)] - U(Y) = pU(x_1 + M) + (1-p)U(x_2 + M) - U(px_1 + (1-p)x_2).$$

Hyötyfunktion ominaisuuksista seuraa, että kuvaus f on jatkuva, monotonisesti kasvava sekä aidosti konkaavi. Lisäksi

$$f(0) = pU(x_1) + (1-p)U(x_2) - U(px_1 + (1-p)x_2) < 0$$

ja

$$f(p(x_1 - x_2)) = p[U(x_1 + p(x_1 - x_2)) - U(px_1 + (1-p)x_2)] > 0,$$

sillä $x_1 + p(x_1 - x_2) > px_1 + (1-p)x_2$. Näin ollen monotonisuuden ja jatkuvuuden nojalla yhtälöllä $f(M) = 0$ on olemassa yksikäsitteinen juuri M^* joukossa $(0, p(x_1 - x_2))$. Tälle juurelle pätee siis ehto

$$pU(x_1 + M^*) + (1-p)U(x_2 + M^*) = U(px_1 + (1-p)x_2),$$

jonka mukaan sijoittaja on indifferentti riskillisen ja riskittömän sijoituskohteen välillä, aina kun riskin otosta kompensoidaan M^*:n verran.

Hyötyfunktion numeroarvolla ei itsessään ole merkitystä ja ainoastaan vaihtoehtojen paremmuusjärjestys on tärkeä. Tämän takia hyötyfunktioihin voidaankin tehdä järjestyksen (monotonisuuden) säilyttäviä muunnoksia.

(a) vakion lisääminen ei muuta järjestystä: $U(x)$ ja $V(x) = U(x) + b$ tuottavat saman järjestyksen, sillä odotusarvon lineaarisuuden nojalla $\mathbf{E}[V(x)] = \mathbf{E}[U(x) + b] = \mathbf{E}[U(x)] + b$

(b) positiivisella vakiolla kertominen ei muuta järjestystä, sillä $\mathbf{E}[V(x)] = \mathbf{E}[aU(x)] = a\,\mathbf{E}[U(x)]$ aina, kun $V(x) = aU(x)$, missä $a > 0$.

Yleisesti huomataankin, että jos $U(x)$ on hyötyfunktio, niin mikä tahansa kuvaus $V(x) = aU(x) + b$ on ekvivalentti hyötyfunktio (kun $a > 0$). Ekvivalentit funktiot tuottavat identtiset järjestykset eri vaihtoehdoille.

Esimerkki: $V(x) = \ln(cx^a)$ $(c > 0, a > 0)$ ja $U(x) = \ln(x)$ ovat ekvivalentteja hyötykuvauksia, koska $\ln(cx^a) = a \ln x + \ln c$.

1.1.2 Riskin kaihtaminen

Hyötyfunktioiden avulla voimme vertailla eri vaihtoehtoja siten, että vertailussa otamme huomioon *riskin kaihtamisen* periaatteen.

Riskin kaihdanta Tarkastellaan seuraavaa tilannetta: Sijoittajalle tarjotaan kahta eri vaihtoehtoa (ns. *arpa*), joista hän saa vapaasti valita. Toinen vaihtoehdoista tuottaa varmuudella tuoton $px + (1-p)y$, kun taas toinen tuottaa tuoton x todennäköisyydellä p ja tuoton y todennäköisyydellä $1 - p$ (luonnollisesti $p \in [0, 1]$). Tällöin

$$\mathbf{E}[U(x_1)] = U(y + p(x - y)) \quad \text{ja} \quad \mathbf{E}[U(x_2)] = U(y) + p(U(x) - U(y))$$

ja sijoittaja valitsee siis sijoituksen joka antaa tuoton

$$\max\{U(y + p(x - y)), U(y) + p(U(x) - U(y))\}.$$

Mikäli sijoittaja valitsee varman kohteen ennen saman odotetun tuoton tuottavan epävarman sijoituskohteen, kutsutaan sijoittajaa riskiä kaihtavaksi. Mikäli sijoittaja on *indifferentti edellämainittujen sijoituskohteiden välillä, kutsutaan sijoittajaa riskineutraaliksi.*

On tärkeätä huomata, että riskin kaihtamisen periaate voidaan introdusoida melko yksinkertaisella tavalla hyötyfunktioon rajoittamalla rajahyödyn muotoa (kuperuutta tai koveruutta). Hyötyfunktio $U(x)$ totetuttaa riskin kaihtamisen periaatteen välillä $[a, b]$, mikäli se on konkaavi välillä $[a, b]$. Jos $U(x)$ on konkaavi kaikkialla, se toteuttaa riskin kaihtamisen periaatteen kaikkialla. Jos hyötyfunktio $U(x)$ on aidosti konkaavi, sanotaan sijoittajaa riskiä kaihtavaksi. Nähdään siis, että *staattisessa tapauksessa vähenevän rajahyödyn laki on riskin kaihtamisen periaatteen kanssa konsistentti ominaisuus.*

Esimerkki: Oletetaan, että päättäjän tulee tehdä valinta satunnaisten varallisuustasojen x ja y väliltä, kun

$$x = \begin{cases} x_1 & \text{tn:llä } p \\ x_2 & \text{tn:llä } 1 - p \end{cases}$$

ja $y = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) = \mathbf{E}[x]$ todennäköisyydellä 1, missä $p \in [0, 1]$ ja $x_1, x_2 \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Jos sijoittajan hyötykuvaus on muotoa $U(x) = x^2$ ja $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, niin

$$U(px_1 + (1-p)x_2) - pU(x_1) - (1-p)U(x_2) = p(p-1)(x_1 - x_2)^2 < 0,$$

mistä seuraa, että konveksille hyötyfunktiolle $U(x) = x^2$ valitaan aina riskillisempi projekti.

Psykologisia havaintoja

The rational man - like the Loch Ness monster - is sighted often, but photographed rarely.
DAVID DREMAN

Psykologisilla havainnoilla voidaan tuoda lisää realismia malleihin, joilla rahoituksessa kuvataan ihmisten käyttäytymistä. Laaja-alainen yhteenveto aiheesta on mm. Rabinen artikkeli Psychology and Economics (1998). Osakesijoituksen psykologiaa on kiinostavasti valotettu Shillerin best seller -kirjassa Irrational Exeburance (2000), jossa hän kritisoi Yhdysvaltojen osakemarkkinoiden kestämättömän korkeaa hintatasoa juuri ennen romahdusta. Rahoituksen kannalta tärkeitä empiirisiä ihmisten käyttäytymiseen liittyviä havaintoja ovat mm.:

• Ihmiset ankkuroituvat psykologisesti menneisyyden hintoihin tai trendeihin. Esimerkiksi 22 euron hinnalla ostamaansa osaketta he pitävät tyypillisesti halpana, mikäli sen hinta on tippunut 12 euroon.

• Ihmiset kuvittelevat usein tietävänsä asioista enemmän kuin he todellisuudessa tietävät ja yliarvioivat omat kykynsä. Esimerkiksi sijoitusasiantuntija saattaa itse kuvitella lyövänsä markkinat selvästi, vaikka selvitykset eivät tukisi sitä millään tavalla.

• Sijoittajien joukossa esiintyy laumakäyttäytymistä. Näin sijoitusmarkkinoille saattaa syntyä fundamentteihin verrattuna hyvin korkeita hintoja eli ns. kuplaperiodeja.

• Ihmiset tekevät epävarmuuden vallitessa epäloogisia päätöksiä. Tämä asettaa odotetun hyödyn käytön yksilöiden käyttäytymisen kuvaamisessa jossain määrin kyseenalaiseksi.

1.1.3 Riskin kaihtamisen mittareita

On selvää, että hyötyfunktion kaarevuus vaikuttaa riskin kaihtamiseen. Mitä voimakkaammin hyötyfunktio on konkaavi, sitä suurempi ero on odotetun hyödyn ja varman hyödyn odotetulla varallisuustasolla (ts. sitä suurempi on erotus $u(\bar{x}) - \mathbf{E}[u(x)]$). Kuten edellä jo huomattiin, tulee riskin kaihtajalle tarjota hyvitys riskinottamisesta tai vastaavasti on varman vaihtoehdon arvoa alennettava. Yritetään nyt määrittää niitä mittareita, joilla tätä indifferenssiin johtavaa preemiota voidaan kuvata. Täsmällisemmin esitettynä, pyritään määrittämään se *preemio* π, jolle yhtälö

$$\mathbf{E}[u(x)] = u(\bar{x} - \pi),$$

toteutuu ainakin osalle riskeistä kun odotettu varallisuustaso $\bar{x} < \infty$ on tunnettu. Oletetaan nyt, että riskiä kaihtavan päättäjän hyötykuvaus on monotonisesti kasvava, aidosti konkaavi sekä kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva.

Additiivisen riskin tapaus: Muodostetaan satunnaismuuttuja $z = \bar{x} + \varepsilon$, missä ε on satunnaisesta varallisuustasosta x riippumaton satunnaismuuttuja joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$, $\mathrm{var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^k] \approx 0$ kun $k \geq 3$. Satunnaismuuttujaa z kutsutaan muuttujan $\bar{x}$ additiiviseksi satunnaisperturbaatioksi (*additive random perturbation*) ja satunnaismuuttujaa ε kutsutaan *pieneksi additiiviseksi kohinaksi* (*small additive noise*).

Esimerkki: Tarkastellaan satunnaismuuttujaa ε, joka on tasaisesti jakautunut välille $\left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$, missä $n \in \mathbb{N}$. Tällöin saadaan, että kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}[\varepsilon^k] = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} y^k dy = \frac{n}{(k+1)} \left(\frac{1}{2n}\right)^{k+1} (1 - (-1)^{k+1}),$$

mistä seuraa, että

$$\mathbf{E}[\varepsilon^k] = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)} \left(\frac{1}{2n}\right)^k & k \text{ parillinen} \\ 0 & k \text{ pariton.} \end{cases}$$

Nyt on selvää, että mikäli n on suuri, niin satunnaismuuttujan ε keskusmomentit kaikille $k \geq 3$ ovat pieniä ja siten siis toteuttavat pienen satunnaisperturbaation ehdot. Jos $n = 4$, niin

$\mathbf{E}[\varepsilon^k] = (0, 0.005, 0, 0.00005, 0, 5.4 \cdot 10^{-7}, 0, 6.6 \cdot 10^{-9}, 0, 8.47 \cdot 10^{-11}, \dots)$.

Esimerkki: Tarkastellaan satunnaismuuttujaa ε, joka on normaalisti jakautunut keskiarvonaan 0 ja keskihajontanaan $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\text{var}[\varepsilon] = 1/n^2$, $\mathbf{E}[x^{2k+1}] = 0$ (parittomat keskusmomentit häviävät) kaikille $k \in \mathbb{N}$ ja $\mathbf{E}[x^{2k}] = o(1/n^{2k-1})$ kaikille $k \geq 2$. Merkinnällä $o(1/n^{2k-1})$ tarkoitetaan sitä, että kyseiset termit suppenevat kohti nollaa vielä nopeammin kuin kuvaus $1/n^{2k-1}$. Tämän tyyppinen kohina on selkeästi "pientä"ja siten toteuttaa edellä esitetyt momenttiehdot. Tämän jakauman keskusmomentit voidaan määrittää kätevästi derivoimalla momentit generoivaa funktiota $f(s) = \mathbf{E}[e^{s\varepsilon}] = e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$ ja antamalla $s \downarrow 0$. Havainnollistuksen vuoksi määritetään momentit generoivan kuvauksen viisi ensimmäistä derivaattaa. Derivoimalla saadaan tulokseksi

$f'(s)$	$\frac{s}{n^2}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0
$f''(s)$	$\frac{\left(n^2+s^2\right)}{n^4}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	$\frac{1}{n^2}$
$f'''(s)$	$\frac{s\left(3n^2+s^2\right)}{n^6}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0
$f''''(s)$	$\frac{\left(3n^4+6n^2s^2+s^4\right)}{n^8}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	$\frac{3}{n^4}$
$f'''''(s)$	$\frac{s\left(15n^4+10n^2s^2+s^4\right)}{n^{10}}e^{\frac{1}{2}\frac{s^2}{n^2}}$	0

josta näemme suoraan, että

$$\left\{\mathbf{E}[\varepsilon^k]\right\}_{k=1,\dots,5} = \left(0, \frac{1}{n^2}, 0, \frac{3}{n^4}, 0\right).$$

Merkitään nyt riskipreemiota merkinnällä $\pi_\varepsilon(\bar{x})$, jotta sen suora riippuvuus keskituotosta $\bar{x}$ sekä epäsuora riippuvuus kohinatermistä ε tulisi selkeästi esitetyksi. Soveltamalla nyt Taylorin kehitelmää kuvaukseen $u(z)$ sekä kuvaukseen $u(\bar{x} - \pi_\varepsilon(\bar{x}))$ saadaan

$$\begin{aligned} u(z) &\approx u(\bar{x}) + u'(\bar{x})\varepsilon + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\varepsilon^2 \\ u(\bar{x} - \pi_\varepsilon(\bar{x})) &\approx u(\bar{x}) - u'(\bar{x})\pi_\varepsilon(\bar{x}), \end{aligned}$$

sillä kohinan ε ja siten preemion $\pi_\varepsilon(\bar{x})$ oletettiin olevan "pieniä". Ottamalla ensimmäisestä yhtälöstä odotusarvo puolittain saadaan

$$\mathbf{E}[u(z)] = \mathbf{E}[u(\bar{x} + \varepsilon)] \approx u(\bar{x}) + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\sigma_\varepsilon^2,$$

jolloin yhdistämällä tämä tulos jälkimmäiseen yhtälöön saadaan tulokseksi, että tasapainoehto $\mathbf{E}[u(z)] = u(\bar{x} - \pi_\varepsilon(\bar{x}))$ on voimassa aina, kun ehto

$$u(\bar{x}) + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\sigma_\varepsilon^2 = u(\bar{x}) - u'(\bar{x})\pi_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow \pi_\varepsilon(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}$$

toteutuu. Preemiossa $\pi_\varepsilon(\bar{x})$ esiintyvä tekijä

$$A(\bar{x}) = -\frac{u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})} = -\frac{d}{d\bar{x}}\ln u'(\bar{x})$$

on ns. *Arrowin ja Prattin absoluuttisen riskinkaihtamisen kerroin* (*Arrow Pratt's coefficient of absolute risk aversion*), joka on siis samalla rajahyödyn logaritmisen derivaatan (eli prosentuaalisen rajahyödyn muutoksen) käänteisluku. Tämä lokaali kerroin on riskinkaihtamisen mittana huomattavasti parempi kuin esimerkiksi hyötyfunktion $u(x)$ toinen derivaatta $u''(x)$ tai hyötyfunktion kuperuusmitta $u''(x)/(1 + u'^2(x))^{3/2}$, sillä $A(\bar{x})$ on rippumaton hyötykuvauksen kasvavista lineaarimuunnoksista. Ts. $A(\bar{x})$ *säilyy muuttumattomana ekvivalenteille hyötykuvauksille.*

Multiplikatiivisen riskin tapaus: Muodostetaan satunnaismuuttuja $z = \bar{x}(1+\varepsilon)$, missä ε on satunnaisesta varallisuustasosta x riippumaton satunnaismuuttuja, joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$, $\text{var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$ ja $\mathbf{E}[\varepsilon^k] \approx 0$, kun $k \geq 3$. Satunnaismuuttujaa z kutsutaan muuttujan $\bar{x}$ multiplikatiiviseksi satunnaisperturbaatioksi (*multiplicative random perturbation*) ja satunnaismuuttujaa ε kutsutaan *pieneksi multiplikatiiviseksi kohinaksi* (*small multiplicative noise*). Merkitään tämän tapauksen riskipreemiota merkinnällä

$\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})$. Soveltamalla nyt Taylorin kehitelmää kuvaukseen $u(z)$ sekä kuvaukseen $u(\bar{x}(1-\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})))$ saadaan

$$\begin{aligned} u(z) &\approx u(\bar{x}) + u'(\bar{x})\varepsilon\bar{x} + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\varepsilon^2\bar{x}^2 \\ u(\bar{x}(1-\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x}))) &\approx u(\bar{x}) - u'(\bar{x})\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})\bar{x}, \end{aligned}$$

sillä kohinan ε ja siten preemion $\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})$ oletettiin olevan "pieniä". Ottamalla ensimmäisestä yhtälöstä odotusarvo puolittain saadaan

$$\mathbf{E}[u(z)] = \mathbf{E}[u(\bar{x}(1+\varepsilon))] \approx u(\bar{x}) + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\sigma_\varepsilon^2\bar{x}^2,$$

jolloin yhdistämällä tämä tulos jälkimmäiseen yhtälöön saadaan tulokseksi, että tasapainoehto $\mathbf{E}[u(z)] = u(\bar{x}(1-\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})))$ on voimassa aina kun ehto

$$u(\bar{x}) + \frac{1}{2}u''(\bar{x})\sigma_\varepsilon^2\bar{x}^2 = u(\bar{x}) - u'(\bar{x})\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})\bar{x} \Rightarrow \hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\frac{\bar{x}u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})}$$

toteutuu. Preemiossa $\hat{\pi}_\varepsilon(\bar{x})$ esiintyvä tekijä

$$R(\bar{x}) = -\frac{\bar{x}u''(\bar{x})}{u'(\bar{x})} = \bar{x}A(\bar{x})$$

on ns. *suhteellisen riskinkaihtamisen kerroin* (*coefficient of relative risk aversion*). Tällä lokaalilla kertoimella on samat hyvät ominaisuudet kuin absoluuttisella riskinkaihtamisen kertoimella. On syytä huomata, että lokaalisuudestaan huolimatta kertoimet $A(x)$ ja $R(x)$ ovat hyvin keskeisiä, sillä ne nousevat lähes poikkeuksetta esiin tutkittaessa optimaalista päätäntää riskinkaihdannan vallitessa. Rahoituksen kirjallisuudessa ilmeneekin tyypillisesti neljä eri hyötyfunktioiden pääluokkaa, jotka generoituvat nimenomaisesti riskinkaihtamisen kertoimien $A(x)$ sekä $R(x)$ avulla. Nämä päätyypit ovat CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*), HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) sekä HRRA (*Hyperbolic Relative Risk Aversion*).

Huomautus: Edellä mainitut satunnaisperturbaatiot ovat hyvin keskeisiä analysoitaessa myös eri riskillisten tuottovirtojen arvostusta riskinkaihdannan vallitessa. Oletetaan, että sijoituksen tuotto x on satunnainen ja määritellään tuotot $x_a = x + \varepsilon$ sekä $x_m = x(1+\varepsilon)$, missä ε on x:stä riippumaton satunnaismuuttuja joka toteuttaa ehdot $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0$ ja $\mathrm{var}[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2$. Riippumattomuudesta seuraa, että $\bar{x} = \bar{x}_a = \bar{x}_m$, joten odotetut tuotot ovat yhtä suuret. Toisaalta

$$\mathrm{var}[x_a] = \sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2 > \sigma_x^2$$

ja

$$\mathrm{var}[x_m] = \sigma_x^2 + (\sigma_x^2 + \bar{x}^2)\sigma_\varepsilon^2$$

joten huomataan, että x_a ja x_m antavat saman keskituoton kuin x mutta korkeammalla riskillä. Tämän tyyppistä satunnaisperturbaatiota kutsutaan satunnaismuuttujan x *keskiarvon säilyttäväksi levitykseksi* (*mean preserving spread*). On syytä painottaa, että tämän luokan perturbaatiot eivät aina ole välttämättä additiivisia tai multiplikatiivisia, vaan mikä tahansa muunnos (siis myös funktionaalinen), joka säilyttää keskituoton muuttumattomana samalla riskiä kasvattaen, kelpaa. Jottei tämä jäisi epäselväksi, tarkastellaan lineaarista kuvausta $f(x) = ax + b$, missä x on satunnainen ja $a, b \in \mathbb{R}$ ovat tunnettuja parametreja. Kuten hyvin tiedetään, pätee tälle kuvaukselle ehdot $\mathbf{E}[f(x)] = a\bar{x} + b$ ja $\mathrm{var}[f(x)] = a^2\sigma_x^2$. Tällöin mikä tahansa parametrinen muutos, joka toteuttaa ehdon

$$\frac{db}{da} = -\bar{x}$$

säilyttää keskiarvon keskihajontaa muuttamalla!

Esimerkki: (A) Eksponentiaaliselle hyötyfunktiolle $U(x) = -e^{-ax}$, $a > 0$ pätee $A(x) = a$, $R(x) = ax$, $A'(x) = 0$ ja $R'(x) = a$

(B) Logaritmiselle hyötyfunktiolle $U(x) = \ln x$ pätee $A(x) = 1/x$, $R(x) = 1$, $A'(x) = -1/x^2$ ja $R'(x) = 0$.
(C) Kvadraattiselle hyötykuvaukselle $U(x) = x - bx^2$ (joka on hyvin määritelty joukossa $(0, 1/(2b))$) pätee

$$A(x) = \frac{2b}{1-2bx} \quad \text{ja} \quad R(x) = \frac{2bx}{1-2bx}$$

sekä

$$A'(x) = \frac{4b^2}{(1-2bx)^2} \quad \text{ja} \quad R'(x) = \frac{2b}{(1-2bx)^2}$$

(D) HARA-hyötykuvaukselle (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion*)

$$U(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{ax}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma},$$

pätee

$$A(x) = \frac{(1-\gamma)a}{ax + b(1-\gamma)} \quad \text{ja} \quad R(x) = \frac{(1-\gamma)ax}{ax + b(1-\gamma)}$$

sekä

$$A'(x) = -\frac{a^2(1-\gamma)}{(ax + b(1-\gamma))^2} \quad \text{ja} \quad R'(x) = \frac{(1-\gamma)^2 ab}{(ax + b(1-\gamma))^2}.$$

Esimerkki: Tarkastellaan seuraavaa ongelmaa: Päättäjän hyötyfunktio on eksponentiaalinen $u(x) = -e^{ax}$ ja sijoituksen tuotto on normaalisti jakautunut jakaumanaan $N(\mu, \sigma^2)$. Pyritään nyt määrittämään se preemio $M > 0$, jolla ehto $\mathbf{E}[u(x)] = u(\mu - M)$ toteutuu. Tämä tasapainoehto voidaan tämän esimerkin tapauksessa esittää muodossa $e^{-a\mu + a^2\sigma^2/2} = e^{-a\mu + aM}$, josta puolestaan seuraa, että $M = a\sigma^2/2$. Koska a mittaa kuitenkin eksponentiaalisen hyödyn tapauksessa absoluuttista riskinkaihtamista nähdään, että preemio on tässä tapauksessa identtinen pienen additiivisen satunnaisperturbaation tapauksessa ilmenevän preemion kanssa. Syynä tähän havaintoon on luonnollisesti se, että $N(\mu, \sigma^2)$-jakautunut satunnaismuuttuja x voidaan aina esittää muodossa $x \sim \mu + \sigma Y$, missä $Y \sim N(0, 1)$. Tällöin x voidaan siis tulkita keskiarvon μ additiivisena satunnaisperturbaationa.

1.1.4 Riskin kaihdanta ja vakuutus

Tarkastellaan lyhyesti taloudellista riskiteoriaa yksinkertaisen esimerkin valossa. Oletetaan, että päättäjä kohtaa mahdollisen vakuutettavissa olevan riskin, joka realisoituessaan alentaa päättäjän hyvinvointia L yksikön verran. Oletetaan, että riskin realisoitumistodennäköisyys on κ ja määritellään päättäjän varallisuus muodossa

$$W = \begin{cases} w - qz & \text{tn:llä } 1-\kappa \\ w - L + z - qz & \text{tn:llä } \kappa, \end{cases}$$

missä w on päättäjän perusvarallisuus, q on vakuutuksen yksikköhinta ja z on vakuutusta kysytty määrä. Oletetaan myös, että päättäjän hyötyfunktio $u(x)$ on kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva, monotonisesti kasvava sekä aidosti konkaavi (jolloin päättäjä on siis riskiä kaihtava). Annettuna nämä oletukset tarkastellaan odotetun hyödyn maksimointiongelmaa

$$\max_{z \in \mathbb{R}} \left[(1-\kappa)u(w - qz) + \kappa u(w - L + z - qz)\right].$$

Ensimmäisen kertaluvun ehto on nyt muotoa

$$(1-\kappa)qu'(w - qz^*) = \kappa(1-q)u'(w - L + z^* - qz^*)$$

Jos vakuutus on "oikeudenmukainen"(*actuarially fair*), yhtyy vakuutuksen yksikköhinta riskin toteutumistodennäköisyyteen, jolloin $q = \kappa$. Tällöin edellä mainittu ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehto voidaan esittää muodossa

$$u'(w - \kappa z^*) = u'(w - L + z^* - \kappa z^*) \Rightarrow z^* = L.$$

Ts. päättäjän kannalta *täysi vakuutus on optimaalinen.*

Esimerkki: Tarkastellaan tilannetta, jossa päättäjän hyötyfunktio on logaritmista muotoa $u(x) = \ln x$ ja $w > qL$. Tällöin kuvaukselle

$$f(z) = (1-\kappa)\ln(w-qz) + \kappa\ln(w-L+z-qz)$$

pätevät ehdot

$$f'(z) = \frac{\kappa(1-q)}{w-L+(1-q)z} - \frac{(1-\kappa)q}{w-qz}$$

ja

$$f''(z) = -\frac{\kappa(1-q)^2}{(w-L+(1-q)z)^2} - \frac{(1-\kappa)q^2}{(w-qz)^2}.$$

Erityisesti siis nähdään, että optimaalinen määrä vakuutusta on

$$z^* = \frac{(\kappa-q)w}{(1-q)q} + \frac{1-\kappa}{1-q}L.$$

On syytä huomata, että edellä tarkasteltu malli olettaa, ettei taloudellinen päättäjä voi omilla toimillaan tai käytöksellään vaikuttaa riskin realisoitumiseen. Ongelman yleistämiseksi oletetaan, että päättäjällä on mahdollisuus vaikuttaa riskiin realisoitumistodennäköisyyteen κ valitsemalla rahayksiköissä ilmaistu henkilökohtainen suojaus x, jolloin riskin realisoitumistodennäköisyys on siis $\kappa(x)$. Mikäli vakuutus- yhtiö pystyy havaitsemaan tämän henkilökohtaisen suojautumisen asteen generoiman riskin realisoitumistodennäköisyyden $\kappa(x)$ ja vakuutus on oikeudenmukainen eli $q = \kappa(x)$, huomataan, että päättäjän varallisuus tulee muotoon

$$W = \begin{cases} w - x - \kappa(x)z & \text{tn:llä } 1-\kappa(x) \\ w - L - x + z - \kappa(x)z & \text{tn:llä } \kappa(x). \end{cases}$$

Annettuna nämä oletukset tulee päättäjän odotetun hyödyn maksimointiongelma muotoon

$$\max_{(z,x)} \left[(1-\kappa(x))u(w-x-\kappa(x)z) + \kappa(x)u(w-L-x+z-\kappa(x)z)\right].$$

Ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdot ovat nyt muotoa

$$\kappa(x^*)(1-\kappa(x^*))\left[u'(w-L-x^*+z^*-\kappa(x^*)z^*) - u'(w-x^*-\kappa(x^*)z^*)\right] = 0 \quad (1)$$

$$\kappa'(x^*)(u(w_1)-u(w_2)) - (1+\kappa'(x^*)z^*)(\kappa(x^*)u'(w_1) + (1-\kappa(x^*))u'(w_2)) = 0, \quad (2)$$

missä $w_1 = w - L - x + z - \kappa(x)z$ ja $w_2 = w - x - \kappa(x)z$. Optimaalisuusehdosta (1) seuraa suoraan, että mikäli $\kappa(x) \in (0,1)$ on täydellinen, on vakuuttaminen optimaalista. Ts. mikäli $\kappa(x) \in (0,1)$, niin silloin $z^* = L$, jolloin $w_1 = w_2$. Sijoittamalla tämä tulos optimaalisuusehtoon (2) saadaan $1 + \kappa'(x^*)L = 0$. Tuloksen luonne muuttuu kuitenkin dramaattisesti, mikäli vakuuttaja ei kykene havainnoimaan täsmällisesti riskin realisoitumistodennäköisyyttä $\kappa(x)$ (katso esim. Laffont 1989, kappale 8).

1.2 Lineaarinen hinnoittelu ja arbitraasi

Ennen dynaamiseen valinnan teoriaan siirtymistä on tarkoituksenamme nyt kehittää yleinen hinnoitteluteoria arbitraasivapauden vallitessa. Tätä tarkoitusta varten tarkastellaan yksinkertaista tilannetta, jossa epävarmuus esitetään s:n vaihtoehtoisen tilan avulla (ns. äärellistilainen malli). Jos taloudessa on n arvopaperia, niin niiden mahdollisia tuottoja kuvataan matriisilla

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{ns} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times s}.$$

Ts. d_{ij} voidaan tulkita i:nnen arvopaperin arvoksi tilassa j. Erityisesti siis tuottomatriisin D rivi $D_k = (d_{k1}, d_{k2}, \dots, d_{ks})$ voidaan tulkita k:nnen arvopaperin vaihtoehtoisten tuottojen generoimaksi vektoriksi. Arvopaperisalkku (tai sijoitusportfolio) on vektori $\theta \in \mathbb{R}^n$, jossa komponentilla θ_i viitataan i:nnen arvopaperin määrään sijoitussalkussa. Tällöin huomataan, että jos vallitsevat arvopapereiden hinnat ovat $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ niin salkun hinta on $\mathbf{P} \cdot \theta \in \mathbb{R}$ ja vaihtoehtoisiin tiloihin ehdollistettu (ja siten siis satunnainen) tuotto on

$$D^T\theta = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \theta_j d_{j1} \\ \sum_{j=1}^n \theta_j d_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \theta_j d_{js} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s.$$

Ennen kuin etenemme tarkastelussa, tehdään seuraava lineaarialgebrasta tuttu määritelmä:

Määritelmä: Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen (tai kanoninen) ortonormaalikanta $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ koostuu vektoreista $\mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{nk})$, missä

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Tällöin esimerkiksi reaaliavaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisen kannan $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ muodostavat kantavektorit $\mathbf{e}_1^T = (1,0,0), \mathbf{e}_2^T = (0,1,0)$ ja $\mathbf{e}_3^T = (0,0,1)$. On syytä huomata, että tuottoavaruuden $\mathbb{R}^s$ luonnollisen kannan vektorit $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \ldots, s$, tunnetaan rahoituksen teoriassa *alkeistila-arvopapereina,* sillä ne generoivat tuoton joka realisoituu pelkästään yhdessä tilassa. On myös syytä pitää mielessä, ettei vektoriavaruuden kanta (eikä myöskään ortonormaali kanta) ole yksikäsitteisesti määritelty, vaan mikä tahansa kokoelma $L(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ lineaarisesti riippumattomia vektoreita $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, n$, riittää virittämään $\mathbb{R}^n$:n.

Annettuna edellä tehty määritelmä huomataan, että valitsemalla sijoitusportfolioksi $\theta = \mathbf{e}_j$ saadaan aikaiseksi tuotto $D^T\theta = D^T\mathbf{e}_j = D_j^T$, jonka hinta on muotoa $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j = P_j$. Tämä tulos voidaan nyt luonnollisesti tulkita siten, että tuoton D_j hinta on kuvaus $p : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}$, jolle pätee ehto $p(D_j) = P_j$. Koska tuotto $D_j \in \mathbf{R}^s$ voidaan puolestaan esittää vektoriavaruuden $\mathbf{R}^s$ luonnollisen kannan avulla muodossa

$$D_j = \sum_{k=1}^s d_{jk}\mathbf{e}_k,$$

huomataan, että edellä johtamallemme hinnoittelutulokselle pätee ehto

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j = P_j = p\left(\sum_{k=1}^s d_{jk}\mathbf{e}_k\right).$$

Mikäli ns. *yhden hinnan laki* (jonka mukaan hinnoittelu on *lineaarinen operaatio* ja siten tuottojen summien arvo on niiden arvojen summa) on voimassa, niin silloin edellisestä seuraa, että

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j = P_j = \sum_{k=1}^s d_{jk} p\left(\mathbf{e}_k\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

joka voidaan yhtäpitävästi esittää vektorimuodossa $\mathbf{P} = D\mathbf{p}$, missä $\mathbf{p}^T = (p\left(\mathbf{e}_1\right), \ldots, p\left(\mathbf{e}_s\right))$ on alkeistilasopimusten hintojen muodostama vektori. Annettuna nämä tekijät esitetään seuraava määritelmä:

Määritelmä: *Arbitraasi* tai yleisesti ottaen *arbitraasimahdollisuus* on sijoitusportfolio $\theta \in \mathbb{R}^n$, jolle pätevät joko ehdot $-\mathbf{P}\cdot\theta \geq 0$ ja $(D^T\theta)_k = \sum_{j=1}^n \theta_j d_{jk} > 0$, $k = 1, \ldots, s$, tai ehdot $-\mathbf{P}\cdot\theta > 0$ ja $(D^T\theta)_k = \sum_{j=1}^n \theta_j d_{jk} \geq 0$, $k = 1, \ldots, s$. Markkinat ovat *arbitraasivapaat,* mikäli arbitraasimahdollisuuksia ei ole.

Arbitraasi voidaan siis tulkita sijoitusmahdollisuudeksi, jossa sijoittajalla on mahdollisuus saada tuottoa ilman todellista nettoinvestointia. Toinen keskeinen tekijä on ns. *tilahintavektori* joka määritellään vektoriksi $\psi \in \mathbb{R}_+^s$, jolle pätee ehto $\mathbf{P} = D\psi$. Ensimmäinen päätulos on nyt esitetty seuraavassa:

Lause 1.1. *Markkinat ovat arbitraasivapaat, jos ja vain jos on olemassa tilahintavektori.*

Tämä edellä esitetty havainto on sopimusten hinnoittelun kannalta erittäin keskeinen monestakin syystä, sillä sen mukaan markkinoiden arbitraasivapauden varmistamiseksi riittää positiivisen tilahintavektorin identifiointi. Esimerkiksi edellä tekemämme tarkastelun nojalla (valitsemalla alkeistilahintojen vektori tilahintavektoriksi) havaitsemme välittömästi seuraavaa:

Seurauslause 1.2. *Jos yhden hinnan laki on voimassa ja alkeistilahinnat ovat positiivisia, niin silloin markkinat ovat arbitraasivapaat.*

Lauseen 1.1 avulla voidaan myös johtaa tuttu riskineutraalia arvottamista (ja siihen liittyviä riskineutraaleita markkinatodennäköisyyksiä) koskeva tulos. Täsmällisemmin ilmaistuna, jos $\psi \in \psi \in \mathbb{R}^s_+$ on tilahintavektori ja $\psi_0 = \sum_{i=1}^s \psi_i$ niin silloin yhtäsuuruudesta $\mathbf{P} = D\psi$ seuraa, että

$$\frac{P_i}{\psi_0} = \sum_{j=1}^s D_{ij} \frac{\psi_j}{\psi_0} \equiv \mathbf{E}^0[D_i] \Rightarrow P_i = \psi_0 \mathbf{E}^0[D_i],$$

missä $\mathbf{E}^0$:lla viitataan "synteettisten"markkinatodennäköisyyksien ψ_j/ψ_0 suhteen määriteltyyn odotusarvoon. On syytä painottaa, ettei näillä todennäköisyyksillä ole mitään tekemistä objektiivisten todennäköisyyksien kanssa. Lisäksi huomataan, että mikäli markkinat ovat arbitraasivapaat ja on olemassa portfolio $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee ehto $D^T\theta_0 = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^s_+$, niin silloin tilahinnan määritelmän nojalla $\mathbf{P} \cdot \theta_0 = \psi^T D^T \theta_0 = \psi^T \mathbf{1} = \psi_0$. Tämän valossa huomataan, että ψ_0 voidaan siis tulkita riskittömäksi diskonttaustekijäksi.

Annettuna arbitraasivapauden määritelmä on nyt tärkeätä myös miettiä, minkälaiset vaihtoehtoisiin tiloihin ehdollistetut tuotot ovat ylipäätään saavutettavissa jollakin mahdollisella sijoitusportfoliolla. Tätä varten tehdään seuraava määritelmä:

Määritelmä: Ehdollistettu tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ on *toistettavissa (suojattavissa, saavutettavissa; replicable, hedgeble,* attainable*)*, jos on olemassa sijoitusportfolio $\theta \in \mathbb{R}^n$ siten, että $D^T\theta = \mathbf{y}$. Markkinat ovat *täydelliset* (*complete*), jos mielivaltainen ehdollistettu tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ on toistettavissa.

On syytä huomata, että täydellisyys ja arbitraasivapaus eivät ole keskenään ekvivalentteja määritelmiä (vaikka ne usein liittyvätkin toisiinsa). Arbitraasivapailla markkinoilla ei ole mahdollista muodostaa tuottoisaa sijoitusstrategiaa ilman todellista nettoinvestointia (markkinoilla ei saa olla vapaita lounaita). Täten arbitraasivapaus liittyy oleellisesti siihen, minkälaisia hintoja markkinoilla voi vallita. Markkinoiden täydellisyys sen sijaan edellyttää sitä, että mielivaltainen ehdollistettu (ja siten satunnainen) tuotto täytyy olla saavutettavissa oleva (riippumatta siitä, mikä sen generoivan salkun hinta on). Äärellistilaisessa tapauksessa huomataan, että markkinoiden täydellisyys liittyy kiinteästi vektoriavaruuksien kannan käsitteeseen ja sijoitusstrategioiden hintojen ja tuottojen esityksiin näiden kanta-alkioiden avulla (ottaen kuitenkin huomioon sen, ettei lineaarisen vektoriavaruuden kanta ole yksikäsitteinen). Jotta tämä huomio ei jäisi epäselväksi, oletetaan, että vaihtoehtoisia tuottoja kuvaavien vektoreiden D_j^T (tuottomatriisin rivien) joukosta löytyy s kappaletta toisistaan lineaarisesti riippumatonta tuottovektoria (oletamme siis myös, että $n \geq s$). Merkitään näiden toisistaan lineaarisesti riippumattomien vektoreiden muodostamaa $s \times s$-matriisia merkinnällä $\tilde{D}$. Tällöin mielivaltainen vahtoehtoinen tuotto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ voidaan siis saavuttaa portfoliolla $\tilde{\theta} = (\tilde{D}^{-1})^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ joka lineaarisen riippumattomuuden nojalla on yhtälöryhmän $\tilde{D}^T\tilde{\theta} = \mathbf{y}$ yksikäsitteinen ratkaisu.

Huomautus: (*Projektiohinnoittelu*) Oletetaan, että $L(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_s)$ on mielivaltainen $\mathbb{R}^s$:n ortonormaali kanta (ts. $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_j = 0$ aina kun $j \neq k$ ja $\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_k = \| \mathbf{X}_k \|^2 = 1$, $k, j = 1, \ldots, s$). Tällöin mielivaltainen tuottovektori $D_j^T \in \mathbb{R}^s$ voidaan esittää kantavektoreiden avulla muodossa $D_j^T = \sum_{k=1}^s (D_j^T \cdot \mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k$. Erityisesti siis havaitaan, että $P_j = p(D_j^T) = \sum_{k=1}^s (D_j^T \cdot \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k)$.

Arbitraasin hyödyntäminen käytännön sijoitustoiminnassa

• Todellisessa kaupankäynnissä arbitraasi esiintyy harvoin yllä esitetyssä täysin riskittömässä ideaalimuodossa. Arbitraasiksi tai tilastolliseksi arbitaasiksi kutsutaan myös hintojen välistä epäsuhtaa, jonka hyödyntäminen vaatii pääomaa ja sisältää riskin. Esimerkiksi Nokian osakkeen hinta voi olla eri (valuuttakurssit huomioon ottaen) Helsingin ja New Yorkin pörsseissä. Sijoittaja voi pyrkiä hyödyntämään tätä yhden hinnan periaatteen rikkomista ja arvioida hintaeron kaventuvan jatkossa. Selvästi tähän toimintaan sisältyy riski. Edelleen on pikemminkin poikkeus kuin sääntö, että arbitraasiehto määrää hinnan yksikäsitteisesti. Tällöin hinta voidaan määrittää odotetun hyödyn avulla.

• Kuuluisin esimerkki arbitraasin hyödyntämiseen perustuvan strategian riskeistä lienee Long Term Capital Management (LTCM) niminen vipurahasto (Hedge Fund). Rahasto oli toiminut perustamisestaan saakka (v. 1994) erittäin kannattavasti, mutta vuoden 1998 suuret tappiot olivat LTCM:n suurien vastuiden takia lähellä aiheuttaa kansainvälisen rahoitusjärjestelmän kriisin. Tapauksen mielenkiintoa lisää se, että LTCM:n palveluksessa toimi joukko huippuluokan matemaatikkoja sekä ns. taloustieteen nobelistit Scholes ja Merton. Shleifer ja Vishny julkaisivat arbitraasien riskeistä varoittavan teoreettisen artikkelin jo 1997.

1.3 Optimaalinen salkun valinta

Tarkastellaan nyt tapausta, jossa sijoittaja soveltaa odotetun hyödyn periaatetta optimaalisen sijoitussalkun valintaongelmaan. Optimointiongelma on nyt muotoa

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^n} \mathbf{E}[U(x)]$$

rajoitteena ehdot $\mathbf{d} \cdot \theta = x \geq 0$ ja $\mathbf{P} \cdot \theta \leq W$. Sijoittajan ongelmana on siis valita budjettirajoitteensa $\mathbf{P} \cdot \theta \leq W$ (jonka mukaan menot ovat pienemmät kuin tulot) puitteissa salkku $\theta \in \mathbb{R}^n$ siten, että hänen odotettu hyötynsä maksimoituu. Sijoituksen kokonaistuotto $\mathbf{d} \cdot \theta = \sum_{i=1}^n \theta_i d_i = x$ oletetaan satunnaiseksi, ja rajoite $x \geq 0$ tarkoittaa, että valinta tehdään vain sellaisten kohteiden joukosta, jotka takaavat vähintään nollatuoton. Tämän ongelman keskeisin implikaatio on nyt esitetty seuraavassa lauseessa:

Lause 1.3. ***(Salkun valinnan lause)*** *Oletetaan, että $U(x)$ on jatkuva ja kasvava sekä toteuttaa ehdon $\lim_{x \to \infty} U(x) = \infty$. Oletetaan myös, että löytyy salkku $\theta^0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\sum_{i=1}^n \theta_i^0 d_i > 0$. Tällöin optimisalkun ongelmalle löytyy ratkaisu, jos ja vain jos markkinoilla ei ole arbitraasimahdollisuuksia.*

Tarkastellaan optimisalkun $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ luonnetta silloin, kun budjettirajoite on pureva (ts. $\theta^* \cdot P = W$) ja kun optimaalista salkkua vastaava tuotto toteuttaa epäyhtälön $x^* = \sum_{i=1}^n \theta_i^* d_i > 0$, ts. silloin kun optimaalisesta sijoituksesta saatava tuotto on varmasti positiivinen. Tällöin edellä esitetty optimointiongelma tulee muotoon

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^n} \mathbf{E}\left[U\left(\sum_{i=1}^n \theta_i d_i\right)\right]$$

rajoitteena ehto $\theta \cdot \mathbf{P} = W$. Optimointiongelman Lagrangen funktio on nyt muotoa

$$\mathcal{L}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \lambda) = \mathbf{E}\left[U\left(\sum_{i=1}^n \theta_i d_i\right)\right] + \lambda\left(W - \sum_{i=1}^n \theta_i P_i\right),$$

jolloin optimaalisuusehdot tulevat muotoon $W = \theta^* \cdot \mathbf{P}$ ja

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^n \theta_i^* d_i\right)\mathbf{d}\right] = \lambda^* \mathbf{P}.$$

On syytä huomata, että jos markkinoilta löytyy riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f ja hinta on 1, niin sitä vastaavasta optimaalisuusehdosta seuraa, että

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^n \theta_i^* d_i\right)\right] r_f - \lambda^* = 0 \Rightarrow \lambda^* = \mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^n \theta_i^* d_i\right)\right] r_f > 0.$$

Sijoittamalla tämä ehto muihin optimaalisuusehtoihin saadaan

$$\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i\right)d_k\right] = \mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i\right)\right] r_f P_k \Rightarrow P_k = \frac{\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i\right)d_k\right]}{\mathbf{E}\left[U'\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i\right)\right] r_f}.$$

Vastaavasti huomataan, että kertomalla ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehto puolittain vektorilla θ^* tämä johtaa yhtälöön

$$\mathbf{E}[U'(x^*)x^*] = \lambda^*\theta^* \cdot \mathbf{P} = \lambda^* W.$$

Olemme siis kyenneet osoittamaan seuraavan tuloksen:

Lause 1.4. *(Salkun hinnoitteluyhtälö) Jos* $x^* = \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* d_i > 0$ *on salkun optimointiongelman ratkaisu, niin*

$$P_k = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} W$$

kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$.

Jos on olemassa riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f*, niin*

$$P_k = \frac{\mathbf{E}\left[U'\left(x^*\right)d_k\right]}{\mathbf{E}\left[U'\left(x^*\right)\right] r_f}$$

kaikille $k = 1, 2, \ldots, n$.

Erityisesti siis huomataan, että jos on olemassa riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f*, niin silloin*

$$\frac{1}{r_f} = \frac{\mathbf{E}\left[U'\left(x^*\right)\right] W}{\mathbf{E}\left[U'\left(x^*\right)x^*\right]}.$$

1.3.1 Sijoitusesimerkki

Tarkastellaan seuraavan taulukon mukaista sijoitusesimerkkiä:

	Tuotto	Todennäköisyys
Erinomainen	d_1	p_1
Keskinkertainen	d_2	p_2
Surkea	d_3	p_3
Riskitön sijoitus	r_f	1

Oletetaan, että sijoittajan käytettävissä oleva pääoma on W. Tällöin riskiä kaihtavan sijoittajan optimointiongelma on

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}^2} \mathbf{E}\left[U(\theta_1 R_f + \theta_2 d_i)\right]$$

rajoitteena $\theta_1 + \theta_2 P_i = W$. Optimointiongelman Lagrangen funktio on nyt

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \lambda) = p_1 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_1) + p_2 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_2) + p_3 U(\theta_1 r_f + \theta_2 d_3) + \lambda(W - \theta_1 - \theta_2 P_i),$$

jolloin optimaalisuusehdot tulevat muotoon

$$\begin{aligned}
p_1 d_1 U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_1) + p_2 d_2 U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_2) + p_3 d_3 U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_3) &= \lambda P_i \\
p_1 r_f U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_1) + p_2 r_f U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_2) + p_3 r_f U'(\theta_1 r_f + \theta_2 d_3) &= \lambda \\
\theta_1 + \theta_2 P_i &= W.
\end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että sijoittajan hyötyfunktio on logaritminen eli $U(x) = \ln x$. Tällöin kaksi ensimmäistä optimaalisuusehtoa tulevat muotoon

$$\begin{aligned}
\frac{p_1(d_1/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_1} + \frac{p_2(d_2/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_2} + \frac{p_3(d_3/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_3} &= \lambda \\
\frac{p_1 r_f}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_1} + \frac{p_2 r_f}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_2} + \frac{p_3 r_f}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_3} &= \lambda,
\end{aligned}$$

joista yhdistämällä saadaan

$$\frac{p_1(r_f - d_1/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_1} + \frac{p_2(r_f - d_2/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_2} + \frac{p_3(r_f - d_3/P_i)}{\theta_1 r_f + \theta_2 d_3} = 0.$$

Toisaalta, rajoitteesta $\theta_1 + \theta_2 P_i = W$ seuraa, että

$$\theta_2 = \frac{W}{P_i} - \frac{\theta_1}{P_i}.$$

Määritellään nyt vakiot

$$\begin{aligned} \Delta_k &= R_f - \frac{d_k}{P_i}, \quad k = 1, 2, 3 \\ \alpha_k &= \frac{d_k}{P_i}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Tällöin optimaalinen sijoitusstrategia θ_1 määräytyy yhtälöstä

$$\theta_1^2 + \left[\frac{(p_1+p_2)\alpha_3}{\Delta_3} + \frac{(p_1+p_3)\alpha_2}{\Delta_2} + \frac{(p_2+p_3)\alpha_1}{\Delta_1}\right] W\theta_1 + \left[\frac{p_1\alpha_3\alpha_2}{\Delta_2\Delta_3} + \frac{p_2\alpha_3\alpha_1}{\Delta_1\Delta_3} + \frac{p_3\alpha_2\alpha_1}{\Delta_1\Delta_2}\right] W^2 = 0.$$

Tämä on tavanomainen toisen asteen polynomi, joka voidaan ratkaista soveltamalla polynomin $x^2 + bx + c = 0$ juurten määritelmää.

Sovelletaan näitä tuloksia eksplisiittiseen esimerkkiin elokuvateollisuudesta. Pankkiiriliike *Marcellus W. & Zed* harkitsee sijoittamista *Quentin Teen* ja hänen ystäviensä *Samuel Jiin* ja *Harvey Koon* uuteen elokuvaan. Pankkiiriliikkeen pääanalyytikko *Vincent V.* on havainnut, että tällainen sijoittaminen on erittäin riskipitoista ja vaihtoehtoja elokuvan menestymiselle on kolme. Vaihtoehtojen tuotot ja todennäköisyydet on esitetty seuraavassa taulukossa.

	Kokonaistuotto	Todennäköisyys
Megamenestys	300 %	50 %
Keskinkertaisuus	100 %	10 %
Floppi	0 %	40 %
Riskitön sijoitus	125 %	100 %

On selvää, että

$$\mathbf{E}[d_i] = 0.5 \cdot 3 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 = 1.6 = 160\ \%,$$

joten sijoitus elokuvaan antaa keskimäärin selkeästi paremman tuoton kuin sijoitus varmaan sijoituskohteeseen. Jos sijoittajan hyötyfunktio on logaritminen ja $P_i = 1$, niin sijoittajan salkun optimaalisuusehto tulee muotoon

$$\frac{0.5(1.25-3)}{1.25\theta_1^* + 3\theta_2} + \frac{0.1(1.25-1)}{1.25\theta_1^* + \theta_2} + \frac{0.4(1.25-0)}{1.25\theta_1^*} = 0.$$

Budjettirajoitteesta $\theta_1^* + \theta_2 = W$ toisaalta seuraa, että $\theta_2 = W - \theta_1^*$, jolloin optimaalisuusehto tulee muotoon

$$\frac{0.875}{1.75\theta_1^* - 3W} + \frac{0.025}{0.25\theta_1^* + W} + \frac{0.5}{1.25\theta_1^*} = 0.$$

Tästä yhtälöstä saadaan optimaaliseksi salkun painoksi $\theta_1^* = 0.778844W$. Ts. pyöreästi 77.88 % varallisuudesta W pitäisi sijoittaa riskittömään kohteeseen ja jäljelle jäävä osuus 22.12 % varallisuudesta pitäisi sijoittaa Quentin Teen ja hänen ystäviensä Samuel Jiin ja Harvey Koon uuteen elokuvaan. Pankkiiriliikkeen Marcellus W. & Zedin pääanalyytikko Vincent V. tietää toisaalta myös sen, että hän voi vaihtoehtoisesti sijoittaa Quentin Teen ja hänen ystäviensä Samuel Jiin ja Harvey Koon uuden elokuvaan levitysoikeuksiin. Tämä sijoitus tuottaa 6$ jokaista sijoitettua dollaria kohti mikäli filmi osoittautuu jättimenestykseksi. Muissa tapauksissa tuotto on 0$. Rinnakkaisia arvopapereita on nyt kolme kappaletta: elokuva itse, riskitön sijoituskohde sekä elokuvan levitysoikeudet. Merkitään tehtyjä sijoituksia nyt merkinnöillä θ_1, θ_2 ja θ_3. Tällöin Marcellus W. & Zedin optimointiongelma on muotoa

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}^3} \left[p_1 \ln(\theta_1 d_{11} + \theta_2 d_{21} + \theta_3 d_{31}) + p_2 \ln(\theta_1 d_{12} + \theta_2 d_{22} + \theta_3 d_{32}) + p_3 \ln(\theta_1 d_{13} + \theta_2 d_{23} + \theta_3 d_{33})\right],$$

missä $(p_1, p_2, p_3) = (0.5, 0.1, 0.4)$ ja kokonaistuottomatriisi d on muotoa

$$d = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 & 1.2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Optimoimalla saadaan tulokseksi, että

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (2.4W, -2.8W, 1.4W).$$

Ts. Marcellus W. & Zed *myy lyhyeksi* (lyhyeksi myynti tarkoittaa tilannetta, jossa henkilö myy arvopaperin, jota ei ole vielä hankkinut. Lyhyeksi myynti perustuu olettamukseen, että kurssi putoaa ja että arvopapereita voi ostaa niiden myyntihintaa halvemmalla hinnalla. Voitto muodostuu myynti- ja ostohinnan kurssierosta.) elokuvan tuotanto-oikeuksia 2.8-kertaisesti oman varallisuutensa ja sijoittaa pääomaa sekä riskittömään sijoituskohteeseen että elokuvan levitysoikeuksiin.

1.4 Log-optimaalinen hinnoittelu

Hinnoittelukaavaa

$$P_k = \frac{\mathbf{E}[U'(x^*)d_k]}{\mathbf{E}[U'(x^*)x^*]} W$$

voidaan tehokkaasti soveltaa eri hinnoittelukaavojen tuottamiseen. Yksi hinnoittelukaavan sovellus on seuraava:

> *Oletetaan, että optimituotto $x^* = \sum_{i=1}^n \theta_i^* d_i > 0$ on tunnettu. Määritä tätä optimia vastaavat sijoituskohteiden hinnat P_i, kun $U(x) = \ln x$ ja $W = 1$.*

Koska nyt $U'(x) = 1/x$ ja $U'(x)x = 1$, niin lauseesta 1.4 seuraa, että kaikille $k \in \{1, \ldots, n\}$ pätevät ehdot

$$P_k = \mathbf{E}\left[\frac{d_k}{x^*}\right].$$

Jos tarjolla on nyt myös riskitön sijoitus, jonka tuotto on r_f, niin hinnoitteluyhtälöä soveltamalla saadaan

$$1 = \mathbf{E}\left[\frac{1}{x^*}\right] r_f \Rightarrow \mathbf{E}\left[\frac{1}{x^*}\right] = \frac{1}{r_f}.$$

Olemme siis kyenneet osoittamaan seuraavan tuloksen:

Lause 1.5. ***(Log-optimaalinen hinnoittelu)*** *Minkä tahansa tuoton d antavan sijoituskohteen hinta on*

$$P_k = \mathbf{E}\left[\frac{d}{x^*}\right],$$

missä x^* on log-optimaalisen salkun tuotto. Erityisesti, jos tuotto d on deterministinen, sen hinta on

$$P_k = \mathbf{E}\left[\frac{d}{x^*}\right] = \frac{d}{r_f}.$$

1.5 Dynaamisesta hyötyteoriasta

1.5.1 Investointipäätäntä ja riskin kaihtaminen

Tarkastellaan seuraavaa ns. *Fisherin säästämisongelmaa*. Siinä sijoittajan elämänkaari on kahden periodin mittainen (nykyisyys ja tulevaisuus). Ensimmäisellä periodilla sijoittaja voi sijoittaa sijoituskohteeseen, joka antaa varman tuoton r_f (joka on myös samalla luottojen hinta) ja loput hän kuluttaa. Toisella periodilla sijoittaja vain kuluttaa. Merkitään nyt symbolilla c_i periodin i kulutusta, merkinnällä y_i periodin i tuloja ja merkinnällä s_1 periodilla 1 tehdyn sijoituksen suuruutta. Tällöin

$$\begin{aligned} c_1 &= y_1 - s_1 && (3) \\ c_2 &= y_2 + (1 + r_f)s_1. && (4) \end{aligned}$$

Oletetaan ensiksi, että sijoittajan toisen periodin tulot tunnetaan varmuudella ja että sijoittajan tavoitteena on valita kulutuksensa siten, että hänen hyötynsä maksimoituu. Ts. tarkastellaan ensiksi optimointiongelmaa

$$\max_{(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2} u(c_1, c_2)$$

rajoitteena ehdot (3) ja (4). Rajoitteesta (3) seuraa, että $s_1 = y_1 - c_1$, joten sijoittajan valintaongelma tulee muotoon

$$\max_{c_1\in\mathbb{R}} u(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)).$$

Oletetaan nyt, että hyötyfunktio $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Tällöin ensimmäisen kertaluvun välttämättömistä ehdoista optimille seuraa, että mikäli optimaalinen kulutuspäätös c_1^* on olemassa, sen tulee toteuttaa ehto

$$u_{c_1}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*)) = (1 + r_f)u_{c_2}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*)).$$

Toisen kertaluvun lokaali rittävyysehto maksimille puolestaan on

$$u_{c_1c_1}(c_1^*, c_2^*) - 2(1 + r_f)u_{c_2c_1}(c_1^*, c_2^*) + (1 + r_f)^2u_{c_2c_2}(c_1^*, c_2^*) < 0.$$

Erityisesti huomataan, että mikäli hyötyfunktio $u(c_1, c_2)$ on aidosti konkaavi ja sen ristiderivaatat ovat positiivisia, niin riittävyysehto aina toteutuu.

On syytä huomata, että optimaaliselle kulutusparille $(c_1^*, c_2^*) \in \mathbb{R}^2_+$ on mielenkiintoinen graafinen havainnollistamiskeino. Tasa-arvokäyriä $u(c_1, c_2) = m$, missä $m \in \mathbb{R}$ on tunnettu vakio, kutsutaan kuluttajan *samahyöty- eli indifferenssikäyräksi.* Käyrän määritelmästä nähdään suoraan, että kaikille samahyötykäyrän (c_1, c_2)-pareille hyöty $u(c_1, c_2)$ pysyy muuttumattomana. Implisiittidifferentioinnilla saadaan tulokseksi, että samahyötykäyrän kulmakerroin on

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{u_{c_1}(c_1, c_2)}{u_{c_2}(c_1, c_2)} < 0.$$

Ts. samahyötykäyrät ovat väheneviä (c_1, c_2)-tasolla. Lisäksi indifferenssikäyrät ovat konvekseja, sillä jos $(\hat{c}_1, \hat{c}_2), (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \in \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+ : u(c_1, c_2) \geq m\}$, niin tällöin hyötyfunktion $u(c_1, c_2)$ konkaavisuudesta seuraa, että kaikille $\lambda \in [0, 1]$ pätee ehto

$$u(\lambda\hat{c}_1 + (1 - \lambda)\tilde{c}_1, \lambda\hat{c}_2 + (1 - \lambda)\tilde{c}_2) \geq \lambda u(\hat{c}_1, \hat{c}_2) + (1 - \lambda)u(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \geq m,$$

joten kaikki pisteet $\lambda(\hat{c}_1, \hat{c}_2) + (1 - \lambda)(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \in \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+ : u(c_1, c_2) \geq m\}$ (ts. joukko $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+ : u(c_1, c_2) \geq m\}$ on konveksi). Tästä puolestaan seuraa, että indifferenssikäyrä $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+ : u(c_1, c_2) = m\}$ on konveksi. Samoin budjettisuoran $c_2 = y_2 + (1 + r)(y_1 - c_1)$ kulmakerroin on $\frac{dc_2}{dc_1} = -(1 + r)$. Tällöin siis huomataan, että optimaalinen kulutuspari on se tason $\mathbb{R}^2_+$ piste, jossa indifferenssikäyrä sivuaa budjettisuoraa.

Jos toisen periodin tulot y_2 ovat satunnaisia, tulee optimointiongelma muotoon

$$\max_{c_1\in\mathbb{R}} \mathbf{E}[u(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))].$$

Konkaavisuudesta sekä Jensenin epäyhtälöstä seuraa, että

$$\mathbf{E}[u(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))] \leq u(c_1, \bar{y}_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)).$$

Ts. sijoittajan odotettu hyöty on alhaisempi kuin se hyöty jonka sijoittaja saisi varmuuden vallitessa. Ensimmäisen kertaluvun välttämättömistä ehdoista optimille seuraa, että mikäli optimaalinen kulutuspäätös c_1^* on olemassa, tulee sen toteuttaa ehto

$$\mathbf{E}[u_{c_1}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*))] = (1 + r_f)\,\mathbf{E}[u_{c_2}(c_1^*, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1^*))].$$

Keskeinen kysymys on nyt se, *kuinka suureksi optimaalinen kulutus muodostuu epävarmuuden vallitessa suhteessa varmaan tilaan.* Ennen varsinaista analyysia tarkastellaan indifferenssikäyriä $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \mathbf{E}[u(c_1, c_2)] = m\}$ epävarmuuden vallitessa. Kuten aikaisemmin, saadaan implisiittidifferentioinnilla

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\mathbf{E}[u_{c_1}(c_1, c_2)]}{\mathbf{E}[u_{c_2}(c_1, c_2)]} < 0.$$

Ts. samahyötykäyrät ovat väheneviä (c_1, c_2)-tasolla. Kuten aikaisemmin jo huomattiin, ovat indifferenssikäyrät $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mathbf{E}[u(c_1, c_2)] = m\}$ konvekseja, sillä hyötyfunktion konkaavisuudesta seuraa, että joukko $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mathbf{E}[u(c_1, c_2)] \geq m\}$ on konveksi. Lisäksi joukko $\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mathbf{E}[u(c_1, c_2)] \geq m\} \subseteq \{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2 : u(c_1, \mathbf{E}[c_2]) \geq m\}$, joten huomataan, että indifferenssikäyrä on epävarmuuden vallitessa korkeammalla kuin varmuuden vallitessa (siis kun verrataan keskimääräiseen tilaan). Optimaalisuusehdosta seuraa, että epävarmuudenkin vallitessa optimaalinen kulutuspari löytyy siitä pisteestä, jossa indifferenssikäyrä sivuaa budjettisuoraa. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ seuraavalla tavalla:

$$f(c_1) = u(c_1, y_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1))$$

ja oletetaan, että $f(c_1)$ on aidosti konkaavi. Merkitään $\hat{c}_1$:llä sitä kulutuksen tasoa, joka maksimoi odotetun hyödyn varmuuden vallitessa, ts. silloin kun $c_2 = \bar{y}_2 + (1 + r_f)(y_1 - c_1)$. Tällöin kuvauksen $f(c_1)$ konkaavisuudesta seuraa, että

$$\mathbf{E}[(f'(\hat{c}_1) - f'(c_1^*))(\hat{c}_1 - c_1^*)] < 0.$$

Sieventämällä saadaan

$$\mathbf{E}[f'(\hat{c}_1)(\hat{c}_1 - c_1^*)] < \mathbf{E}[f'(c_1^*)(\hat{c}_1 - c_1^*)] = (\hat{c}_1 - c_1^*)\,\mathbf{E}[f'(c_1^*)] = 0,$$

josta seuraa suoraan, että

$$\mathbf{E}[f'(\hat{c}_1)](\hat{c}_1 - c_1^*) < 0,$$

sillä $\hat{c}_1$ ja c_1^* ovat vakioita. Valitettavasti tästä ei vielä seuraa riskin ja kulutuksen välinen negatiivinen suhde vaan kyseisen ominaisuuden osoittamiseksi on tehtävä joitakin lisäoletuksia. Täsmällisemmin ilmaistuna, mikäli kuvaus

$$A(c_1, c_2) = \frac{u_{c_1 c_2}(c_1, c_2) - (1 + r)u_{c_2 c_2}(c_1, c_2)}{u_{c_2}(c_1, c_2)}$$

on vähenevä, niin silloin voidaan osoittaa, että kasvanut epävarmuus pienentää ensimmäisen periodin kulutusta ja siten kasvattaa päättäjän säästämistä. Ts. mikäli kuvaus $A(c_1, c_2)$ on vähenevä, niin *optimaalinen ensimmäisen periodin kulutus on tuloriskin vähenevä funktio ja siten ensimmäisen periodin säästämispäätös on tuloriskin kasvava funktio*. Voidaan siis perustellusti sanoa, että *kasvanut tuloriski kasvattaa riskiä kaihtavan sijoittajan turvaavan säästämisen insentiivejä* (*precautionary saving*).

Osoitetaan tämän väitteen paikkansapitävyys yksinkertaisemmassa tapauksessa, jossa hyötykuvaus $u(c_1, c_2)$ on separoituva siten, että se voidaan esittää muodossa

$$u(c_1, c_2) = u_1(c_1) + u_2(c_2),$$

missä kuvaukset $u_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ja $u_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ovat monotonisesti kasvavia ja aidosti konkaaveja. Oletetaan lisäksi, että toisen periodin hyötyfunktion absoluuttisen riskinkaihtamisen kerroin

$$A(c_2) = -\frac{u_2''(c_2)}{u_2'(c_2)}$$

on vähenevä.

Koska tarkoituksenamme on tarkastella kasvaneen epävarmuuden vaikutusta ensimmäisen periodin optimaaliseen kulutukseen, esitetään toisen periodin tulot muodossa $\alpha y_2 + \beta$, jossa paramerit α ja β toteuttavat ehdon $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\mathbf{E}[y_2]$.Tämän ehdon vallitessa parametrin α kasvu kasvattaa vain varianssia säilyttämällä keskiarvon muuttumattomana, sillä silloin

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha\,\mathbf{E}[y_2] + \beta\right] = 0$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\alpha^2 \operatorname{var}[y_2]\right] = 2\alpha \operatorname{var}[y_2] > 0.$$

Optimiehto voidaan nyt esittää muodossa

$$u_1'(c_1^*) = (1 + r)\,\mathbf{E}[u_2'(\alpha y_2 + \beta + (1 + r)(y_1 - c_1^*))].$$

Implisiittidifferentiointia soveltamalla huomataan (siis derivoimalla yhtälö puolittain muuttujan α suhteen), että

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial \alpha} = (1+r)\frac{\mathbf{E}[u_2''(c_2^*)(y_2 - \mathbf{E}[y_2])]}{\mathbf{E}[u_1''(c_1^*) + (1+r)^2 u_2''(c_2^*)]}.$$

Osoitetaan nyt, että tämän osittaisderivaatan osoittaja on positiivinen. Tarkastellaan ensiksi niitä toisen periodin realisaatioita, joille pätee ehto $y_2 \geq \mathbf{E}[y_2]$ ja siten myös ehto $c_2 \geq \mathbf{E}[c_2]$. Oletuksistamme seuraa tällöin, että

$$A(c_2) \leq A(\mathbf{E}[c_2]) \Rightarrow -\tfrac{u_2''(c_2)}{u_2'(c_2)} \leq -\tfrac{u_2''(\mathbf{E}[c_2])}{u_2'(\mathbf{E}[c_2])} \tag{5}$$

$$u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2]) \leq u_2'(\mathbf{E}[c_2])(y_2 - \mathbf{E}[y_2]) \Rightarrow \mathbf{E}[u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2])] \leq 0 \tag{6}$$

ja $u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2]) \geq 0$.

Kertomalla nyt yhtälö (5) puolittain tekijällä $u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2])$ saadaan

$$-u_2''(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2]) \leq -\frac{u_2''(\mathbf{E}[c_2])}{u_2'(\mathbf{E}[c_2])}u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2]).$$

Ottamalla tästä yhtälöstä odotusarvo saadaan

$$-\mathbf{E}[u_2''(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2])] \leq -\frac{u_2''(\mathbf{E}[c_2])}{u_2'(\mathbf{E}[c_2])}\mathbf{E}[u_2'(c_2)(y_2 - \mathbf{E}[y_2])] \leq 0,$$

mistä väite seuraa. Tapaus $y_2 \leq \mathbf{E}[y_2]$ käsitellään täysin analogisella tavalla.

Esimerkki: Tarkastellaan tapausta, jossa $u(c_1, c_2) = -e^{-(c_1 c_2)}$, missä $c_2 = y_2 + (1+r_f)(y_1 - c_1)$. Oletetaan, että $y_2 \sim N(\bar{y}_2, \sigma^2)$, missä $\sigma \geq 0$ on tunnettu. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[u(c_1,c_2)] &= -\mathbf{E}[e^{-c_1(y_2+(1+r_f)(y_1-c_1))}] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-c_1(y+(1+r_f)(y_1-c_1)) - \frac{1}{2}\left(\frac{y-\bar{y}_2}{\sigma}\right)^2} dy \\ &= -e^{-c_1(\bar{y}_2 + (1+r_f)(y_1-c_1) - \frac{1}{2}\sigma^2 c_1)},\end{aligned}$$

josta derivoinnilla saadaan

$$c_1^*(\sigma) = \frac{\bar{y}_2 + (1+r_f)y_1}{2(1+r_f)+\sigma^2}.$$

Optimaalisen kulutuksen $c_1(\sigma)$ määritelmästä puolestaan seuraa, että

$$c_2^*(\sigma, y_2) \sim N\left(\frac{1+r_f}{2(1+r_f)+\sigma^2}\left[(1+r_f+\sigma^2)y_1 + \left(1+\frac{\sigma^2}{1+r_f}\right)\bar{y}_2\right], \sigma^2\right).$$

Keskeisin optimaalisen kulutuksen $c_1(\sigma)$ komparatiivis-staattinen implikaatio on

$$c_1^{*\prime}(\sigma) = -\frac{2\sigma(\bar{y}_2 + (1+r_f)y_1)}{(2(1+r_f)+\sigma^2)^2} < 0.$$

Toinen tärkeä huomio on se, että *optimaalinen ensimmäinen periodin kulutus on alhaisempaa epävarmuuden kuin varmuuden vallitessa ja vastaavasti optimaalinen ensimmäinen periodin säästäminen on alhaisempaa epävarmuuden kuin varmuuden vallitessa.*

1.5.2 Riskinkaihdanta ja deflaattorit

Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa sijoittajan tarkoituksena on valita hetkellä t sijoitusstrategia, joka maksimoi hänen odotetun hyötynsä, kun päättäjän hyötyfunktio on separoituvaa muotoa $u(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta_s u(c_{t+1})$, missä $\beta_s > 0$ on tunnettu intertemporaalista riskinkaihtamista mittaava vakio, joka tunnetaan myös nimellä *subjektiivinen diskonttaustekijä*, ja kuvaus $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on monotonisesti kasvava ja aidosti konkaavi sekä kaksi kertaa jatkuvasti differentioituva. Oletetaan myös, että päättäjän kulutusyksiköissä mitatut periodikohtaiset alkuvarallisuudet (siis ilman investointeja) ovat e_t ja e_{t+1}. Jos sijoittajalla on mahdollisuus hankkia yksikköhintaan p_t arvopaperia, joka takaa hänelle epävarman tuoton (kulutusyksiköissä mitattuna) X_{t+1} tulevalla periodilla, ja θ mittaa hankittujen arvopapereiden lukumäärää, niin silloin rationaalisen päättäjän ongelmana on määrittää se sijoitusstrategia θ^*, jolla maksimi

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} [u(e_t - \theta p_t) + \beta_s \mathbf{E}_t[u(e_{t+1} + \theta X_{t+1})]]$$

saavutetaan (huomaa, että ehdollistus tapahtuu hetkellä t käytettävissä olevaan informaatioon nojaten). Optimissa on nyt oltava voimassa ehto

$$u'(c_t^*)p_t = \beta_s \mathbf{E}_t[u'(c_{t+1}^*)X_{t+1}],$$

missä $c_t^* = e_t - \theta^* p_t$ ja $c_{t+1}^* = e_{t+1} + \theta^* X_{t+1}$. Yllä mainittu optimiehto voidaan luonnollisesti ilmaista myös muodossa

$$p_t = \mathbf{E}_t \left[m_{t+1} X_{t+1} \right], \tag{7}$$

missä $m_{t+1} = \beta_s u'(c_{t+1}^*)/u'(c_t^*)$ on ns. *deflaattori* (tunnetaan myös nimillä *hintatiheys, stokastinen diskonttaustekijä, intertemporaalisen kulutuksen rajasubstituutioaste sekä hinnoitteluydin).* Kaksi hinnoittelukaavan (7) erittäin keskeistä implikaatiota ovat seuraavat:

(A) Ostamalla nyt arvopaperia yksikköhintaan p_t saadaan seuraavalla periodilla palkkio $p_{t+1} + d_{t+1}$, missä d_{t+1} mittaa arvopaperin maksamaa osinkoa. Koska $p_{t+1} + d_{t+1} = p_t(1 + r_{t+1})$, missä $r_{t+1} = p_t^{-1}(p_{t+1} + d_{t+1} - p_t)$ on arvopaperin tuottovauhti, huomataan, että palkkion $1 + r_{t+1}$ generoivan sijoituksen hinta on 1 ja siten

$$1 = \mathbf{E}_t \left[m_{t+1}(1 + r_{t+1}) \right].$$

(B) Vastaavalla tavalla huomataan, että mikäli markkinoilla on myös riskitön sijoituskohde, joka takaa riskittömän tuoton $1 + r_f$ sijoitetulle pääomalle, niin palkkion $1 + r_f$ generoivan sijoituksen hinta on 1 ja siten

$$1 = (1 + r_f)\mathbf{E}_t \left[m_{t+1} \right] \Rightarrow \mathbf{E}_t \left[m_{t+1} \right] = \frac{1}{1 + r_f}.$$

Tämä tulos on mielenkiintoinen, sillä sen mukaan deflaattorin odotettu arvo on yhtä suuri kuin tavanomainen diskonttaustekijä. On myös syytä huomata, että vastaavaan tulokseen päädyttiin aiemmin log-optimaalisen hinnoittelun tapauksessa.

Näillä edellä johdetuilla tuloksilla on monia erittäin keskeisiä empiirisestikin testattavissa olevia implikaatioita. Kaksi keskeistä implikaatiota voidaan esittää muodossa

$$p_t = \frac{\mathbf{E}_t[X_{t+1}]}{1 + r_f} + \mathrm{cov}_t[m_{t+1}, X_{t+1}] \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_t[r_{t+1}] = r_f - (1 + r_f)\mathrm{cov}_t[m_{t+1}, r_{t+1}]. \tag{9}$$

Näistä esityksistä erityisesti yhtälöllä (57) on voimakas implikaatio sijoituskohteen hinnanmuodostuksen sekä kulutuskäyttäytymisen välille. Täsmällisemmin ilmaistuna, koska rajahyöty on vähenevä kulutuksen funktiona, huomataan, että kulutuksen kanssa positiivisesti korreloituneilla sijoituksilla on alhaisempi hinta kuin niillä, joiden kanssa korrelaatio on negatiivinen. Yhtälö (9) puolestaan implikoi tutun odotetun tuoton β_s-esityksen $\mathbf{E}_t[r_{t+1}] = r_f - \beta_s \lambda$, missä $\lambda = \mathrm{var}_t[m_{t+1}]/\mathbf{E}_t[m_{t+1}]$ ja $\beta_s = \mathrm{cov}_t[m_{t+1}, r_{t+1}]/\mathrm{var}_t[m_{t+1}]$.

2 Portfolioteoria

2.1 Markowitzin malli

Tarkoituksenamme on nyt tarkastella Markowitzin klassista optimaalisen sijoitussalkun valintaongelmaa, jossa päättäjän tavoitteena on määrittää sellainen sijoitusstrategia, joka minimoi riskin annetun tuottotavoitteen vallitessa. Oletetaan, että kauppaa käydään n:llä osakkeella, joiden keskimääräiset tuotot $\bar{r}_i$ sekä satunnaisten tuottojen kovarianssit σ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ovat tunnettuja. Annettuna tuottojen stokastinen struktuuri tarkastellaan optimointiongelmaa muotoa

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \sigma \mathbf{w} \quad \text{rajoitteena } \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}} = \rho \text{ ja } \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1,$$

missä ρ on vaadittu tuotto, $\mathbf{w}^T = (w_1, \ldots, w_n)$ on suhteellisten sijoitusosuuksien muodostama vektori, $\bar{\mathbf{r}}^T = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ on keskituottojen muodostama vektori, $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$ on vektori ykkösiä ja

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

on satunnaisten tuottojen $\mathbf{r}^T = (r_1, \ldots, r_n)$ kovarianssimatriisi. On syytä huomata, että objektifunktiossa summan kertoimeksi on valittu $1/2$ vain sen takia, että kunkin painon w_i korkein eksponentti on 2 ja kovarianssitermit tulevat kahdella kerrottuina, sillä $w_i w_j \sigma_{ij} = w_j w_i \sigma_{ji}$ kovarianssin symmetriasta johtuen. Yhtälörajoitteisen optimointiongelman Lagrangen funktio on nyt muotoa

$$L(w_1, \ldots, w_n, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \sigma \mathbf{w} + \lambda \left(\rho - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{r}}\right) + \mu \left(1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}\right).$$

Derivoimalla saadaan ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdoiksi

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{w}^* &= \lambda^* \bar{\mathbf{r}} + \mu^* \mathbf{1} \\ \mathbf{w}^{*T} \bar{\mathbf{r}} &= \rho \\ \mathbf{w}^{*T} \mathbf{1} &= 1, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{w}^{*T} = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$ on optimaalinen sijoitusstrategia. Kertomalla ensimmäinen ehto puolittain painovektorilla $\frac{1}{2}\mathbf{w}^{*T}$ saadaan tuottovaatimuksen toteuttavan sijoitusportfolion minimivarianssiksi

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}^{*T} \sigma \mathbf{w}^* = \frac{1}{2}\left[\lambda^* \mathbf{w}^{*T} \bar{\mathbf{r}} + \mu^* \mathbf{w}^{*T} \mathbf{1}\right] = \frac{\lambda^* \rho + \mu^*}{2}.$$

Tehtävänä on nyt siis pyrkiä määrittämään tuntemattomat Lagrangen kertoimet λ^* ja μ^* sekä optimaalinen sijoitusstrategia $\mathbf{w}^*$. Oletetaan nyt, etteivät tuotot ole keskenään täydellisesti korreloituneita, jolloin kovarianssimatriisi on positiividefiniitti ja siten siis säännöllinen (eli kääntyvä). Annettuna tämä oletus kerrotaan optimaalisuusehto $\sigma \mathbf{w}^* = \lambda^* \bar{\mathbf{r}} + \mu^* \mathbf{1}$ puolittain matriisilla σ^{-1}, jolloin saadaan tulokseksi, että $\mathbf{w}^* = (\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}})\lambda^* + (\sigma^{-1}\mathbf{1})\mu^*$. Sijoittamalla näin saatu tulos rajoitteisiin $\mathbf{w}^{*T}\bar{\mathbf{r}} = \rho$ ja $\mathbf{1}^T \mathbf{w}^* = 1$ tämä johtaa yhtälöryhmään

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^* \\ \mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \end{bmatrix},$$

missä $A = \bar{\mathbf{r}}^T \sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}}$, $B = \mathbf{1}^T \sigma^{-1} \mathbf{1}$ ja $C = \mathbf{1}^T \sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}}$ kovarianssimatriisin käänteismatriisin symmetrisyyden nojalla. Cramerin sääntöä soveltamalla saadaan tulokseksi

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{\rho B - C}{AB - C^2} \\ \mu^* &= \frac{A - \rho C}{AB - C^2} \end{aligned}$$

jolloin huomataan, että

$$\mathbf{w}^* = \left[\frac{A - \rho C}{AB - C^2}\right] \sigma^{-1} \mathbf{1} + \left[\frac{\rho B - C}{AB - C^2}\right] \sigma^{-1} \bar{\mathbf{r}} \tag{10}$$

ja

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}^{*T} \sigma \mathbf{w}^* = \frac{\rho^2 B - 2C\rho + A}{2(AB - C^2)}.$$

Tästä esityksestä havaitaan suoraan, että tuottovaatimuksen toteuttava minimiriskisalkku on tuottovaatimuksen aidosti konveksi funktio. Näin ollen havaitaan, että Markowitzin malli on linjassa sen oletuksen kanssa, jonka mukaan lisätuottoa ei voida saavuttaa muulla tavoin kuin riskiä kasvattamalla. Erityisesti siis huomataan, että minimaalisen sijoitusriskin takaava tuottovaatimus on $\rho^* = C/B$. Tämä tuottovaatimus saavutetaan valitsemalla sijoitusstrategia

$$\mathbf{w}_0^* = \frac{1}{B}\sigma^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{\mathbf{1}^T \sigma^{-1} \mathbf{1}} \sigma^{-1} \mathbf{1},$$

jota vastaava minimaalinen riski on

$$\mathbf{w}_0^{*T}\sigma\mathbf{w}_0^* = \frac{1}{B} = \frac{1}{(\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mathbf{1})}.$$

Toinen keskeinen tehokas salkku on se, joka saavutetaan valitsemalla vaadituksi tuotoksi $\rho = A/C$. Silloin

$$\mathbf{w}_1^* = \frac{1}{C}\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}}}\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}}$$

jota vastaava riski on

$$\mathbf{w}_1^{*T}\sigma\mathbf{w}_1^* = \frac{A}{C^2} = \frac{\bar{\mathbf{r}}^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}}}{(\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}})^2}.$$

Yhdistämällä nämä kaksi tulosta havaitaan, että optimaalinen sijoitusportfolio voidaan siis ilmaista myös muodossa

$$\mathbf{w}^* = q\mathbf{w}_0^* + (1-q)\mathbf{w}_1^*, \tag{11}$$

missä

$$q = \frac{AB - \rho BC}{AB - C^2}.$$

Olemme siis kyenneet osoittamaan yhden keskeisimmistä Markowitzilaisen portfolio-teorian tuloksista.

Lause 2.1. ***(Kahden rahaston lause)*** *Mielivaltainen tehokas salkku voidaan replikoida edellämainitun kahden rahaston tehokkaiden salkkujen* $\mathbf{w}_0^*$ *ja* $\mathbf{w}_1^*$ *kombinaationa (keskituoton ja keskihajonnan suhteen). Ts. sijoittajalle riittää investoida kumpaankin edellämainittuun rahastoon (mielivaltaisessa suhteessa), niin tällöin hänen sijoitustaan kuvaava salkku on itsessään tehokas.*

Huomautus: On syytä huomata, että salkut $\mathbf{w}_0^*$ ja $\mathbf{w}_1^*$ voidaan myös johtaa suoraan optimaalisuusehdosta $\sigma\mathbf{w}^* = \lambda^*\bar{\mathbf{r}} + \mu^*\mathbf{1}$. Minimiriskisalkku $\mathbf{w}_0^*$ saadaan valitsemalla tässä yhtälössä $\lambda = 0$, ja salkku $\mathbf{w}_1^*$ saadaan valitsemalla $\mu = 0$.

On myös syytä huomata, että salkku $\mathbf{w}_1^*$ on *keskituotto-riskisuhteen* $\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}/\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}$ *maksimoiva salkku.* Kahden rahaston lauseen mukaan tehokas sijoitus voidaan siis aina saavuttaa investoimalla minimiriskirahastoon $\mathbf{w}_0^*$ sekä maksimaalisen keskituotto-riskisuhteen takaavaan rahastoon $\mathbf{w}_1^*$ (mielivaltaisessa suhteessa). Täsmällisemmin ilmaistuna, kahden rahaston lauseen mukaan tehokkaalle salkulle pätee ehto

$$\mathbf{w}^* = \alpha \operatorname{argmin}\left\{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}\right\} + (1-\alpha)\operatorname{argmax}\left\{\frac{\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}\right\},$$

missä

$$\alpha = \frac{\rho - w_1^{*T}\bar{\mathbf{r}}}{w_0^{*T}\bar{\mathbf{r}} - w_1^{*T}\bar{\mathbf{r}}}.$$

Esimerkki: Tarkastellaan tilannetta, jossa käytettävissä on viisi eri arvopaperia, joiden keskituotto-keskihajonta-parit ovat muotoa

$$(\bar{r}_i, \sigma_i) = \{(0.05, 0.1), (0.1, 0.2), (0.15, 0.3), (0.2, 0.4), (0.25, 0.5)\}.$$

Oletetaan myös, että arvopapereiden tuottojen riippuvuutta kuvaava kovarianssimatriisi on muotoa

$$(\sigma_{ij})_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & -0.04 \\ 0 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0 \\ -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Tällöin siis 1. ja 5. arvopaperin välillä vallitsee kohtuullisen voimakas negatiivinen korrelaatio, 2. ja 3. ovat heikohkosti positiivisesti korreloituneita ja 4. arvopaperin tuotto ei riipu muiden tuotoista. Annettuna tavoiteltu keskituottotaso ρ saadaan optimaalisiksi muuttujiksi:

$$(w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*, w_5^*) = (1.35 - 6.74\rho, 0.11 - 0.69\rho, 3.1\rho - 0.25, 2.82\rho - 0.22, 0.011 + 1.5\rho),$$

$(\lambda, \mu) = (0.321 - 3.86\rho, 0.321\rho - 0.0291)$ ja

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_i^* w_j^* \sigma_{ij} = 0.015 - 0.325\rho + 1.9315\rho^2.$$

Optimaalisia muuttujia on nyt taulukoitu seuraavassa taulukossa:

ρ	w_1^*	w_2^*	w_3^*	w_4^*	w_5^*	λ	μ	$(\mathbf{w}^{*T}\sigma\mathbf{w}^*)/2$
0.05	1.	0.077	-0.093	-0.078	0.086	0.13	-0.013	0.003
0.1	0.67	0.04	0.06	0.06	0.16	-0.07	0.003	0.00178
0.15	0.33	0.0082	0.22	0.2	0.24	-0.26	0.019	0.00989
0.2	-0.0029	-0.026	0.37	0.35	0.31	-0.45	0.035	0.0277
0.25	-0.34	-0.061	0.53	0.49	0.39	-0.65	0.051	0.0551
0.3	-0.68	-0.095	0.68	0.63	0.46	-0.84	0.067	0.0922
0.35	-1.01	-0.129	0.838	0.769	0.536	-1.03	0.0832	0.139

Esimerkkimme tulokset osoittavat selkeästi, että korkeaa tuottoa ei voida saavuttaa muuten kuin riskiä kasvattamalla. Erityisesti huomataan, että kahden rahaston lauseen mukaiset salkut ovat $\mathbf{w}_0^* = \{0.786, 0.054, 0.009, 0.015, 0.136\}$ ja $\mathbf{w}_1^* = \{0.735, 0.049, 0.033, 0.037, 0.147\}$. Näille salkuille pätevät ehdot $\mathbf{w}_0^{*T}\sigma\mathbf{w}_0^*/2 = 0.0012$, $\mathbf{w}_0^{*T}\bar{\mathbf{r}} = 8.3$ %, $\mathbf{w}_1^{*T}\sigma\mathbf{w}_1^*/2 = 0.0013$ ja $\mathbf{w}_1^{*T}\bar{\mathbf{r}} = 9.1$ %.

Esimerkki: Tarkastellaan seuraavassa talukossa prosentteina esitettyjä arvopapereiden keskituottoja ja tuottojen kovariansseja.

i	σ						$\bar{r}_k$
1	0.0225	0.0189	0.02415	0	0	0	5.6
2	0.0189	0.0441	0	0	0	0	4.5
3	0.02415	0	0.2116	0.1955	0	0	5.65
4	0	0	0.1955	4.51562	0.965813	0	11.05
5	0	0	0	0.965813	2.29523	0	9
6	0	0	0	0	0	9	11.05

Tässä tapauksessa kahden rahaston lauseen mukaiset sijoitusportfoliot ovat muotoa

$$\mathbf{w}_0^* = (0.86, 0.125, 0.0019, 0.00298, 0.00822, 0.00242)$$

sekä

$$\mathbf{w}_1^* = (1.04, -0.0434, -0.0208, 0.00795, 0.0121, 0.00484)$$

Erityisesti siis nähdään, että $\mathbf{w}_0^{*T}\bar{\mathbf{r}} = 5.52$ %, $\mathbf{w}_1^{*T}\bar{\mathbf{r}} = 5.76$ %, $\sqrt{\mathbf{w}_0^{*T}\sigma\mathbf{w}_0^*} = 1.47$ % ja $\sqrt{\mathbf{w}_1^{*T}\sigma\mathbf{w}_1^*} = 1.51$ %.

2.1.1 Riskittömän sijoituskohteen vaikutus sijoitusportfolioon

Edellä tehdyssä tarkastelussa lähdettiin siitä oletuksesta, ettei markkinoilla ole riskitöntä sijoituskohdetta ja siten ylenkatsottiin tilanteet, joissa sijoittajalla on mahdollisuus pienentää sijoitusriskiään sijoittamalla ainakin osuus varallisuudestaan arvopapereihin joiden tuotto on riskitöntä. Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa markkinoilla on myös sellainen riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f. Tarkastellaan nyt sijoitusstrategiaa $(w, 1-w) \in \mathbb{R}^2$, jonka keskituotto on muotoa $\tilde{r} = wr_f + (1-w)\bar{r}_p$, missä $\bar{r}_p$ on tehokkaalla salkulla generoitu sijoitustuotto. Tämän sijoitusstrategian sisältämä riski on nyt luonnollisesti muotoa $\tilde{\sigma} = |1-w|\sigma_p$, missä σ_p on tehokkaalla salkulla generoidun sijoitustuoton riski. Havaitaan siis, että sijoitusstrategiaa kuvaa $(\sigma, \bar{r})$-tasolla suora joka yhdistää pisteet $(0, r_f)$ sekä $(\sigma_p, \bar{r}_p)$. Ts. sijoitusstrategiaa $(w, 1-w) \in \mathbb{R}^2$ kuvaa $(\sigma, \bar{r})$-tasolla suora

$$\tilde{r}(\sigma) = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}\sigma + r_f$$

Ongelmana on nyt määrittää se $(\sigma,\bar{r})$-tason piste $(\sigma_p,\bar{r}_p)$, missä sijoitusstrategiaa $(w,1-w)\in\mathbb{R}^2$ kuvaava suora sivuaa tehokkaan salkun kuvaajaa. Tämän ongelman ratkaisemiseksi piirretään kolmio jonka kärkipisteinä ovat $(\sigma,\bar{r})$-tason pisteet $(0,r_f)$, (σ_p,r_f) sekä $(\sigma_p,\bar{r}_p)$. Merkitään θ:lla pisteet $(0,r_f)$ ja (σ_p,r_f) yhdistävän suoran sekä pisteet $(0,r_f)$ ja $(\sigma_p,\bar{r}_p)$ yhdistävän suoran välistä kulmaa. Kuten hyvin muistetaan, kulman tangentti on vastaisen kateetin pituus suhteessa viereisen kateetin pituuteen. Tällöin siis

$$\tan\theta=\frac{\bar{r}_p-r_f}{\sigma_p}.$$

Merkitään symbolilla $\tilde{\mathbf{w}}$ sitä salkkua, jolla kyseinen keskihajonta-keskituottopari voidaan saavuttaa. Tällöin siis

$$\tan\theta=\frac{\tilde{\mathbf{w}}^T(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}{\sqrt{\tilde{\mathbf{w}}^T\sigma\tilde{\mathbf{w}}}}=\frac{\sum_{i=1}^n\tilde{w}_i(\bar{r}_i-r_f)}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n\sigma_{ij}\tilde{w}_i\tilde{w}_j}}.$$

Nyt on selvää, että $(\sigma_p,\bar{r}_p)$ on se piste, jossa kuvaus $\tan\theta$ saavuttaa maksimaalisen arvon. Suora derivointi johtaa optimaalisuusehtoon

$$\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1}=\left(\frac{\tilde{\mathbf{w}}^T(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}{\tilde{\mathbf{w}}^T\sigma\tilde{\mathbf{w}}}\right)\sigma\tilde{\mathbf{w}}.$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain kovarianssimatriisin käänteismatriisilla σ^{-1} (otamme siis annettuna kovarianssimatriisin säännöllisyyden) saadaan

$$\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})=\left(\frac{\tilde{\mathbf{w}}^T(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}{\tilde{\mathbf{w}}^T\sigma\tilde{\mathbf{w}}}\right)\tilde{\mathbf{w}}.$$

Kertomalla puolestaan tämä yhtälö puolittain ykkösvektorilla $\mathbf{1}^T$ ja soveltamalla rajoitetta $\mathbf{1}^T\tilde{\mathbf{w}}=1$ saadaan

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{w}}^T(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}{\tilde{\mathbf{w}}^T\sigma\tilde{\mathbf{w}}}\right)=\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1}),$$

josta puolestaan seuraa, että

$$\tilde{\mathbf{w}}=\left[\frac{1}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}\right]\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1}).$$

Olemme siis havainneet, että se $(\sigma,\bar{r})$-tason piste, missä sijoitusstrategiaa $(w,1-w)\in\mathbb{R}^2$ kuvaava suora sivuaa tehokkaan salkun kuvaajaa on

$$(\sigma_p,\bar{r}_p)=\left(\sqrt{\frac{(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}{(\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1}))^2}},\left[\frac{1}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})}\right](\bar{\mathbf{r}}-r_f\mathbf{1})^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}}\right).$$

Olemme siis kyenneet osoittamaan seuraavan rahoitusteknisesti erittäin keskeisen tuloksen:

Lause 2.2. ***(Yhden rahaston lause)*** *On olemassa riskillinen sijoitusrahasto $\tilde{\mathbf{w}}$ siten, että jokainen tehokas arvopaperisalkku voidaan replikoida kombinoimalla tätä rahastoa sekä riskitöntä arvopaperia.*

Esimerkki: Tarkastellaan seuraavassa taulukossa esitettyjä arvopapereiden keskituottoja ja tuottojen kovariansseja.

Arvopaperi	σ					$\bar{r}_k$
1	0.23	0.093	0.062	0.074	-0.023	0.1
2	0.093	0.14	0.022	0.056	0.026	0.125
3	0.062	0.022	0.18	0.078	-0.027	0.15
4	0.074	0.056	0.078	0.34	-0.056	0.175
5	-0.023	0.026	-0.027	-0.056	0.26	0.2

Oletetaan myös, että markkinoilla on myös riskitön arvopaperi, jonka tuottovauhti on r_f. Ongelmana on määrittää markkinoiden tehokas salkku $(\sigma_p,\bar{r}_p)$. Kuten edellä osoitettiin, tulee meidän siis ratkaista ensiksi yhtälöryhmä

$$(\bar{r}_k - r_f) = \sum_{i=1}^{5} \sigma_{ik} v_i, \quad k \in \{1, 2, \ldots, 5\}$$

ja normeerata sitä kautta tulokseksi saadut muuttujat kaavaa $\tilde{w}_k = v_k/\mathbf{1}^T\mathbf{v}$ soveltaen. Optimaalisiksi salkun painoiksi saadaan

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= \frac{0.0183013 - 1.41216r_f}{2.4906 - 16.0016r_f} \\
\tilde{w}_2 &= \frac{0.432648 - 4.01416r_f}{2.4906 - 16.0016r_f} \\
\tilde{w}_3 &= \frac{0.726155 - 4.51859r_f}{2.4906 - 16.0016r_f} \\
\tilde{w}_4 &= \frac{0.420033 - 1.66018r_f}{2.4906 - 16.0016r_f} \\
\tilde{w}_5 &= \frac{0.893462 - 4.39647r_f}{2.4906 - 16.0016r_f}.
\end{aligned}$$

Näitä salkun painoja on havainnollistettu numeerisesti seuraavassa taulukossa:

r_f	$\tilde{w}_1$	$\tilde{w}_2$	$\tilde{w}_3$	$\tilde{w}_4$	$\tilde{w}_5$
0	0.0073	0.17	0.29	0.17	0.36
0.05	-0.031	0.14	0.3	0.2	0.4
0.1	-0.14	0.035	0.31	0.29	0.51
0.15	-2.1	-1.9	0.54	1.9	2.6
0.2	0.37	0.52	0.25	-0.12	-0.02

Esimerkki: Tarkastellaan seuraavassa taulukossa prosentteina esitettyjä arvopapereiden keskituottoja ja tuottojen kovariansseja.

i	σ							$\bar{r}_k$
1	0.01	-0.0035	-0.0088	0	0	-0.0214	-0.0299	4.6
2	-0.0035	0.1225	0.0616	-0.0308	-0.0525	0.0749	0.10465	5.1
3	-0.0088	0.0616	0.1936	-0.03872	-0.066	0.09416	0.13156	5.1
4	0	-0.0308	-0.03872	0.7744	0.924	0.56496	0.78936	8.2
5	0	-0.0525	-0.066	0.924	2.25	0.963	1.3455	8.2
6	-0.0214	0.0749	0.09416	0.56496	0.963	4.5796	4.47902	10.7
7	-0.0299	0.10465	0.13156	0.78936	1.3455	4.47902	8.9401	10.7

Tässä tapauksessa kahden rahaston lauseen mukaiset sijoitusportfoliot ovat muotoa

$$\mathbf{w}_0^* = (0.862, 0.0595, 0.0627, 0.0142, 0.000153, 0.00166, 0.0000307)$$

sekä

$$\mathbf{w}_1^* = (0.847, 0.0643, 0.0645, 0.0225, -0.000982, 0.0032, -0.00033)$$

Erityisesti siis nähdään, että ${\mathbf{w}_0^*}^T\bar{\mathbf{r}} = 4.7$ %, ${\mathbf{w}_1^*}^T\bar{\mathbf{r}} = 4.8$ %, $\sqrt{{\mathbf{w}_0^*}^T\sigma\mathbf{w}_0^*} = 0.9$ % ja $\sqrt{{\mathbf{w}_1^*}^T\sigma\mathbf{w}_1^*} = 0.9$ %. Oletetaan nyt, että markkinoilla on myös riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on $r_f = 4$ %. Tällöin yhden rahaston lauseen mukainen sijoitusportfolio on prosenteissa ilmaistuna muotoa

$$100\tilde{\mathbf{w}} = (76.44, 9.04, 7.45, 6.85, -0.73, 1.17, -0.23).$$

Tämän sijoitusstrategian generoima keskituotto ja keskihajonta ovat $\tilde{\mathbf{w}}^T\bar{\mathbf{r}} = 5$ % ja $\sqrt{\tilde{\mathbf{w}}^T\sigma\tilde{\mathbf{w}}} = 1.0$ %.

2.1.2 Hyötyteoreettinen perustelu Markowitzilaiselle päätännälle

Edellisen kappaleen analyysi ylenkatsoo täysin sijoittajien preferenssit ja jättää siten täysin huomiotta riskinkaihtamisen vaikutuksen päätäntään. Täsmällisemmin ilmaistuna edellisen kappaleen tarkastelu lähtee suoraan siitä, että sijoittajat ovat varianssin avulla ilmaistavaa epävarmuutta kaihtavia. On kuitenkin syytä painottaa, että on olemassa laaja luokka päätäntämalleja, joissa Markowitzilainen päätäntä on täysin perusteltavissa riskinkaihtamisen avulla ja on siten linjassa talousteoreettisen ajattelun kanssa. Jottei tämä jäisi epäselväksi, oletetaan, että päättäjän hyötykuvaus $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on määrittelyjoukossaan jatkuvasti differentioituva, aidosti kasvava sekä aidosti konkaavi funktio. Oletetaan myös, että arvopapereiden tuotot $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ ovat normaalisti jakautuneita siten, että niiden keskiarvot $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^n$ sekä kovarianssimatriisi $\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on tunnettu. Annettuna nämä oletukset tarkastellaan nyt odotetun hyödyn maksimointiongelmaa muotoa

$$\max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \mathbf{E}\left[u(\mathbf{w}^T\mathbf{r})\right]$$

rajoitteena ehdot $\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1$ ja $\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} = \rho$. Koska normaalisti jakautuneiden satunnaismuuttujien summa on normaalisti jakautunut, huomataan, että $\mathbf{w}^T\mathbf{r} \sim N(\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w})$ ja erityisesti siis, että $\mathbf{w}^T\mathbf{r} \sim \mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} + \sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}Y$, missä $Y \sim N(0,1)$ on standardoidun normaalijakauman mukaisesti jakautunut satunnaismuuttuja. Maksimointiongelman Lagrangen funktio voidaan nyt edellisen havainnon valossa esittää muodossa

$$\mathcal{L}(\mathbf{w},\lambda,\mu) = \mathbf{E}\left[u(\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} + \sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}Y)\right] + \lambda(\rho - \mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}) + \mu(1 - \mathbf{w}^T\mathbf{1}).$$

Differentioinnilla saadaan ensimmäisen kertaluvun välttämättömiksi optimaalisuusehdoiksi ${\mathbf{w}^*}^T\bar{\mathbf{r}} = \rho$, ${\mathbf{w}^*}^T\mathbf{1} = 1$ sekä

$$M\sigma\mathbf{w}^* = \psi^*\bar{\mathbf{r}} + \mu^*\mathbf{1}, \tag{12}$$

missä $\psi^* = \lambda^* - \mathbf{E}[u'({\mathbf{w}^*}^T\mathbf{r})]$ ja $M = \mathbf{E}\left[u'({\mathbf{w}^*}^T\mathbf{r})Y\right]/\sqrt{{\mathbf{w}^*}^T\sigma\mathbf{w}^*}$. Kertomalla optimaalisuusehto (12) puolittain kovarianssimatriisin σ käänteismatriisilla σ^{-1} saadaan $M\mathbf{w}^* = \psi\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}} + \mu\sigma^{-1}\mathbf{1}$. Sijoittamalla tämä identiteetti puolestaan portfoliovalinnan rajoitteita kuvaaviin yhtälöihin saadaan aikaiseksi yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^* \\ \mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\rho \\ M \end{bmatrix},$$

jonka ratkaisu on muotoa

$$\psi^* = \frac{(\rho B - C)M}{AB - C^2} \quad \mu^* = \frac{(A - \rho C)M}{AB - C^2}.$$

Olemme siis osoittaneet, että optimaalinen sijoitusstrategia yhtyy tämän kappaleen tapauksessa Markowitzilaiseen sijoitusstrategiaan ja voidaan siten esittää muodossa (11). Olemme siis todistaneet seuraavan portfolioteoreettisesti keskeisen lauseen:

Lause 2.3. *Markowitzin malli on yhtäpitävä odotetun hyödyn maksimoinnin kanssa aina, kun tuotot ovat normaalisti jakautuneita.*

Huomautus: On syytä huomata, että Markowitzilainen portfoliovalinta pätee mielivalintaisesti jakautuneille tuottovauhdeille $\mathbf{r}$ (kunhan momentit ovat olemassa) tapauksessa, jossa sijoittajan hyötyfunktio on kvadraattinen eli muotoa $u(x) = c + bx - ax^2$, $c \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}_+, x < b/(2a)$. Tämän väitteen todistaminen on analoginen edellä tekemämme todistuksen kanssa ja jätetäänkin lukijalle harjoitustehtäväksi.

2.1.3 Mitä jos lyhyeksi myyminen on kiellettyä?

Aikaisemmassa Markowitzilaisen portfoliovalinnan tarkastelussa olemme poikkeuksetta olettaneet, että lyhyeksi myyminen on sallittua. Käytännössä kuitenkin lyhyeksi myyminen on yleisesti kiellettyä, joten salkun muodostamistapa ei itse asiassa ole niin yksinkertaista kuin edellisen kappaleen tapauksessa. Jos lyhyeksi myymistä ei sallita, tulee Markowitzin ongelma muotoon

$$\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w} \quad \text{rajoitteena } \mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} = \rho \text{ ja } \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1.$$

Suurin ero tässä ongelmassa edellisen kappaleen ongelmaan verrattuna on nyt se, etteivät painot w_i voi olla negatiivisia. Jotta Markowitzin ongelma voitaisiin ratkaista, muodostetaan optimointiongelman

Lagrangen funktio

$$\mathcal{L}(w_1,\ldots,w_n,\lambda,\mu)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij}+\lambda\left(\bar{r}-\sum_{i=1}^{n}w_i\bar{r}_i\right)+\mu\left(1-\sum_{i=1}^{n}w_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\psi_iw_i,$$

missä tuntemattomat muuttujat ψ_i,$i\in\{1,2,\ldots,n\}$,λ ja μ ovat optimointiongelman Lagrangen kertoimia. Tämän epäyhtälörajoitteisen optimointiongelman ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdot ovat

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}w_i^*\sigma_{ik} &= \lambda^*\bar{r}_k+\mu^*+\psi_k^*, \quad k\in\{1,\ldots,n\}\\ \psi_k^*w_k^* &= 0,\psi_k^*\geq 0, w_k^*\geq 0, \quad k\in\{1,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

On selvää, ettei tämän tehtävän ratkaiseminen ole lainkaan niin helppoa kuin edellisen kappaleen tehtävää. Onneksi käytössämme on valtavasti erilaisia kvadraattisen ohjelmointitehtävän ratkaisemiseen tehtyjä ohjelmistoja. Esimerkiksi Mathematicassa tällaisiä ongelmia voidaan ratkaista soveltamalla Optimization‘MultiplierMethod‘-pakettia. Ongelman kompleksisuuden takia emme tutki sitä enempää vaan pidämme mielessä lähinnä ratkaisutekniikan ja sen, miten sitä sovelletaan.

2.2 Todennäköisyysrajoitteinen salkun valinta

Kuten edellisessä kappaleessa jo mainittiin, on tavanomainen Markowitzilainen salkun riskin minimointi tuottorajoitteen vallitessa vain yksi vaihtoehtoinen lähestymistapa optimaalisen salkun valintaongelmaan. Toinen erittäin yleinen lähestymistapa on ns. todennäköisyysrajoitteinen salkun valintaongelma. Tämä ottaa huomioon halutun varmuustason, jolla mahdollisia tuottoja voidaan/halutaan saavuttaa. Tämän tyyppisiä rajoitteita luovat esimerkiksi solvenssisäännökset sekä sijoittajan mahdolliset suojaustarpeet. Tässä ongelmaluokassa päättäjän valintaongelmaa rajoittavat ehdot muotoa

$$\begin{gathered}\mathbb{P}\left[\mathbf{w}^T\mathbf{r}\geq\rho\right]\geq\alpha, \quad \alpha\in[0,1]\\ \mathbf{w}^T\mathbf{1}=1,\end{gathered}$$

missä $\mathbf{1}^T=(1,\ldots,1)$, $\mathbf{r}^T=(r_1,\ldots,r_n)$ on vektori satunnaisia tuottoja, $\mathbf{w}^T=(w_1,\ldots,w_n)$ on suhteellinen sijoitussalkku, ρ on tunnettu kynnystuottotaso ja α on vaadittu minimaalinen varmuustaso. Todennäköisyysrajoite voidaan luonnollisesti rajoitteen $\mathbf{w}^T\mathbf{1}=1$ puitteissa ilmaista myös muodossa

$$\mathbb{P}\left[Y\geq-\frac{\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{r}}-\rho\mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}\right]\geq\alpha, \tag{13}$$

missä standardoidulle satunnaismuuttujalle

$$Y=\frac{\mathbf{w}^T(\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}})}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}$$

pätee ehto $\mathbf{E}[Y]=0$ ja $\mathrm{var}[Y]=1$. Näiden rajoitteiden vallitessa on tavoitteena yleensä määrittää maksimaalinen tuottorajoitus ρ, joka voidaan varmuustason α vallitessa saavuttaa mielivaltaisella sijoitusstrategialla $\mathbf{w}^T=(w_1,\ldots,w_n)$.

Oletetaan nyt esimerkin vuoksi, että satunnaiset tuotot r_i ovat normaalisti jakautuneita kovarianssimatriisinaan $\sigma=\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$ (ts. $r_i\sim N(\bar{r}_i,\sigma_i^2)$ ja $\mathbf{E}[(r_i-\bar{r}_i)(r_j-\bar{r}_j)]=\sigma_{ij}$). Koska tässä tapauksessa $Y\sim N(0,1)$ ja $\mathbf{w}^T\mathbf{1}=1$, voidaan todennäköisyysrajoite ilmaista nyt muodossa

$$\Phi\left(\frac{\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{r}}-\rho\mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}\right)\geq\alpha, \tag{14}$$

missä $\Phi(x)$ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Kertymäfunktion jatkuvuuden ja monotonisuuden (ja sitä kautta injektiivisyyden) nojalla (14) voidaan esittää myös muodossa

$$\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}}\geq\rho+\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}. \tag{15}$$

On syytä huomata, että *todennäköisyysrajoite (15) yhtyy normaalijakautuneiden tuottojen tapauksessa tavanomaiseen Markowitzin salkunvalinnan rajoitteeseen kun $\alpha=0.5$, sillä* $\Phi(0)=0.5$, jolloin rajoite

(15) tulee tuttuun Markowitzilaiseen muotoon $\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} \geq \rho$. Jos haluttu varmuustaso $\alpha > 0.5$, niin salkun vaadittu tuottotaso ylittää tavanomaiseen Markowitzin ongelman tuottotason, sillä silloin $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ ja siten $\mathbf{w}^T\bar{\mathbf{r}} \geq \rho + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}} > \rho$. Vastaavasti, jos $\alpha < 0.5$, niin salkun vaadittu tuottotaso voi luonnollisesti alittaa tavanomaiseen Markowitzin ongelman tuottotason. Monissa käytännön todellisissa sovellutuksissa on vaadittu varmuustaso kuitenkin erittäin korkea (tyypillisesti yli 97 %). Seuraavassa taulukossa on taulukoituna kertoimen $\Phi^{-1}(\alpha)$ arvoja eri varmuustasoille α.

α	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.92	0.95	0.97
$\Phi^{-1}(\alpha)$	0.524401	0.67449	0.841621	1.03643	1.28155	1.40507	1.64485	1.88079

Kuten yllä johtamamme rajoitteen esitysmuoto paljastaa, todennäköisyysrajoitteen ollessa "kova"(siis yli 85 %) vähäriskiset arvopaperit tulevat selvästi preferoidummiksi, sillä niihin sijoittamalla saadaan salkun kokonaisriskiä pienennettyä ja siten siis pienennettyä tuottovaatimuksen riskitekijää $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}$. Määritellään nyt kriittinen todennäköisyys $\alpha^* \in [0, 1]$ yhtälöstä

$$\Phi\left(\sup_{\mathbf{w}^T\mathbf{1}=1} \frac{\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}\right) = \alpha^*. \tag{16}$$

Tällöin normaalijakauman kertymäfunktion monotonisuuden nojalla huomataan, ettei todennäköisyyttä α^* voida ylittää annetulla minimituottotasolla ρ. Jotta tämä kriittinen todennäköisyys voitaisiin määrittää eksplisiittisesti, tarkastellaan nyt kuvausta

$$H(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{w}^T\sigma\mathbf{w}}}.$$

Ensimmäisen kertaluvun välttämätön optimaalisuusehto voidaan nyt esittää muodossa

$$\frac{\mathbf{w}^{*T}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\mathbf{w}^{*T}\sigma\mathbf{w}^*}\sigma\mathbf{w}^* = \bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1}.$$

Kertomalla tämä ehto puolittain käänteismatriisilla σ^{-1} saadaan

$$\frac{\mathbf{w}^{*T}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\mathbf{w}^{*T}\sigma\mathbf{w}^*}\mathbf{w}^* = \sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1}), \tag{17}$$

josta puolestaan kertomalla puolittain vektorilla $\mathbf{1}^T$ ja soveltamalla rajoitetta $\mathbf{1}^T\mathbf{w}^* = 1$ saadaan

$$\frac{\mathbf{w}^{*T}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\mathbf{w}^{*T}\sigma\mathbf{w}^*} = \mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1}). \tag{18}$$

Sijoittamalla (18) yhtälöön (17) ja jakamalla puolittain tekijällä $\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})$ saadaan optimaaliseksi salkuksi (joka on määritelty aina, kun $\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1}) \neq 0$)

$$\mathbf{w}^* = \frac{\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}. \tag{19}$$

Optimaalisen salkun keskituotto ja keskihajonta ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{*T}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1}) &= \frac{(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})} \\ \sqrt{\mathbf{w}^{*T}\sigma\mathbf{w}^*} &= \frac{\sqrt{(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}}{|\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})|}. \end{aligned}$$

Olemme siis kyenneet osoittamaan, että kriittinen todennäköisyys α^* määräytyy identiteetistä

$$\alpha^* = \Phi\left(\frac{|\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})|}{\mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}\sqrt{(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}\right).$$

On syytä huomata, että kuvaukselle $f(\rho) = \mathbf{1}^T\sigma^{-1}(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})$ pätevät ehdot $f(0) = \mathbf{1}^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}}$, $\lim_{\rho\to\infty} f(\rho) = -\infty$ sekä $f'(\rho) = -\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mathbf{1} < 0$. Näin ollen huomataan, että mikäli ehto $f(0) = \mathbf{1}^T\sigma^{-1}\bar{\mathbf{r}} > 0$ toteutuu, niin on olemassa luku $\hat{\rho} > 0$ siten, että $f(\hat{\rho}) = 0$. Sellaisessa tapauksessa kriittinen todennäköisyys α^* määräytyy identiteetistä

$$\alpha^* = \Phi\left(\sqrt{(\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})^T \sigma^{-1} (\bar{\mathbf{r}} - \rho\mathbf{1})}\right), \quad \rho \leq \hat{\rho}.$$

Esimerkki: Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa mahdollisia sijoituskohteita on kolme. Sijoituskohteiden normaalijakautuneista tuotoista oletetaan, että $\bar{r}_1 = 0.04, \bar{r}_2 = 0.1, \bar{r}_3 = 0.15, \sigma_1 = 0.01, \sigma_2 = 0.08, \sigma_3 = 0.2, \rho_{12} = 0, \rho_{13} = -0.5$ ja $\rho_{23} = 0.15$. Ts. oletetaan nyt, että normaalijakautuneille tuotoille pätee:

$$\begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.1 \\ 0.15 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0 & -0.001 \\ 0 & 0.0064 & 0.0024 \\ -0.001 & 0.0024 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Optimaalisia muuttujia (prosentteja) on nyt havainnollistettu seuraavassa taulukossa (kun $\rho < \hat{\rho} \approx 0.043$).

ρ	w_1^*	w_2^*	w_3^*	$\bar{r}^*$	σ^*	α^*
2	94.12	2.68	3.2	4.51	0.88	99.78
2.5	93.24	3.39	3.37	4.57	0.91	98.89
3	91.69	4.65	3.66	4.68	0.96	95.98
3.5	88.18	7.48	4.34	4.93	1.13	89.63
4	72.76	19.96	7.28	6.0	2.2	81.82

Tämän esimerkin tulokset ovat erittäin tärkeitä, sillä ne osoittavat, kuinka voimakkaasti todennäköisyysrajoitteet rajoittavat päättäjän salkunvalintamahdollisuuksia ja siten myös riskinottomahdollisuuksia. Voidaankin perustellusti sanoa, että todennäköisyysrajoitteet kannustavat valitsemaan salkkuihin matalan volatiliteetin arvopapereita jolloin nämä arvopaperisalkut saattavat vaikuttaa hyvinkin tehottomilta (ja matalatuottoisilta) Markowitzilaisesta näkökulmasta katsottuna. *Arvopaperisalkun matalatuottoisuuden syy ei tällaisessa tapauksessa ole siis salkunhoitajassa vaan raskaassa todennäköisyysrajoitteessa.*

2.3 Empiirisiä havaintoja

The stock market has predicted nine out of the last five recessions. PAUL SAMUELSON

Historialliset tuotot: Kehittyneen valtion lyhyttä korkoa pidetään yleisesti riskittömänä sijoituskohteena. Osakkeiden tuottojen ja riskien lisäksi ollaan kiinnostuneita ns. *osakkeiden riskipreemiosta* eli riskittömän koron ja osakkeiden odotetun tuoton erotuksesta. Taulukossa 2.3.1 on esitetty Yhdysvaltojen aineistosta lasketut riskittömän koron ja osakkeiden tuotot. Riskipreemio on estimoitu aritmeettisten tuottojen erotuksena.

Indeksi	**Aritm. k.a.**	**Hajonta**	**Geom. k.a.**	**Riskipreemio**
Osakkeet (1802 - 2001)	8.4 %	18.1 %	6.9 %	5.3 %
Lyhyt korko (1802 - 2001)	3.1 %	6.1 %	2.9 %	
Osakkeet (1946 - 2001)	8.6 %	17.4 %	7.1 %	5.9 %
Lyhyt korko (1946 - 2001)	0.7 %	3.3 %	0.7 %	

Taulukko 2.3.1. Osakkeiden ja valtion lyhyen koron reaalisten tuottojen vertailu (Siegel 2002).

Osakemarkkinoiden tuotot ovat vaihdelleet suuresti eri maiden ja aikakausien välillä (ks. taulukko 2.3.2). Jorion ja Goetzmann (1999) ovat tutkineet kansainvälisiä osakkeiden hintaindeksien perusteella reaalisia tuottoja (hinnan nousun aiheuttama tuotto). Yhdysvaltojen geometrinen tuotto 4.3 % on selvästi yli muun maailman tuoton 3.4 %. Taulukossa esitetty yleisesti käytetty riskin mittari *Shar- pen suhde* (vrt. liite "Sharpen indeksi") on aritmeettisen keskiarvon suhde hajontaan (tässä laskettuna kuukausiaineistosta). Yhdysvaltojen aineistosta laskettu Sharpen suhde on pienin talukossa esitetyistä.

Indeksi	Aritm. k.a.	Hajonta	Sharpen suhde	Geom. k.a.
Globaali				
- Keskeytymättömät markkinat	4.98 %	12.08 %	0.112	4.33 %
- Kaikki markkinat	4.59 %	11.05 %	0.12	4.04 %
Globaali poislukienYhdysvallat	3.84 %	9.96 %	0.11	3.39 %
Yhdysvallat	5.48 %	15.83 %	0.01	4.32 %

Taulukko 2.3.2. Kansainvälisten osakeindeksien vertailu vuosina 1920-1996.
Tuotot ovat reaalisia vuosituottoja (Jorion ja Goetzmann 1999).

Yhdysvaltojen keskeisten sijoitusinstrumenttien ja inflaation historialliset keskiarvot ja hajonnat on esitetty taulukossa 2.3.3. Pienten ja suurten yhtiöiden osakkeiden tuotossa ja hajonnassa on merkittävä ero.

Indeksi	Aritm. k.a.	Hajonta	Geom. k.a.
Osakkeet (pienyhtiöt)	18.81 %	39.68 %	12.57 %
Osakkeet (suuryhtiöt)	13.11 %	20.21 %	11.14 %
Valtion pitkä korko	5.36 %	8.12 %	5.06 %
Valtion lyhyt korko	3.82 %	3.29 %	3.76 %
Inflaatio	3.17 %	4.46 %	3.07

*Taulukko 2.3.3.*Vuotuisten tuottojen vertailu vuosina 1926-1999 Yhdysvalloissa (Bodie ym. 2002).

Taulokossa 2.3.4 on vertailtu Yhdysvaltojen markkinoilla vuosina 1802-2001 bondien ja osakkeiden tuottoa sekä toisaalta lyhyen valtion koron ja osakkeiden tuottoa. Kaikilla sijoitusperiodeilla osakkeet ovat tuottaneet paremmin kuin bondit ja lyhyt korko yli puolessa tapauksista. Kymmenen vuoden sijoituksista osakkeet ovat tuottaneet 80.1 % periodeista paremmin.

Sijoitusperiodi	Bondit	Lyhyt korko
1 vuosi	61 %	61.5 %
2 vuotta	65.3 %	65.3 %
5 vuotta	70.9 %	74.06 %
10 vuotta	80.1 %	80.1 %
20 vuotta	91.7 %	94.5 %
30 vuotta	99.4 %	97.1 %

Taulukko 2.3.4. Osuus periodeista, joissa osakkeet tuottaneet paremmin kuin bondit
ja lyhyt korko. Yhdysvaltojen aineisto vuosina 1802 - 2001 (Siegel 2002).

Aktiivirahasto vai indeksisijoittaminen? Rahastosijoittamisessa on tehtävä päätös aktiivisen ja passiivisen rahaston välillä. Taulukossa 2.3.5 on verrattu Yhdysvalloissa kaikkien rahastojen vuotuisten tuottojen keskiarvoa 5000 yritystä sisältävän Wilshire 5000 indeksirahaston tuottoon. Tuotosta on vähennetty rahastojen hoitokulut. Taulukon antama kokonaiskuva on, että aktiivirahastot eivät keskimäärin kykene ylittämään halpahoitoisen indeksirahaston tuottoja. Lisäksi kannattaa huomata se, että huonosti menestyvät rahastot lopettavat usein toimintansa, joten vain selviytyneiden rahastojen tarkastelu antaa jossain määrin harhaisen kuvan tuotoista. Taulukossa on käytetty merkintöjä: KR = kaikki rahastot, SR = selviytyneet rahastot, W5000 = Wilshire 5000 (laajin Yhdysvaltojen osakeindeksi).

	KR	SR	W5000	KR-W5000	SR-W5000
1971 - 2001	10.72 %	11.80 %	12.09 %	-1.37 %	-0.29 %
1975 - 1983	18.83 %	19.97 %	17.94 %	0.89 %	2.03 %
1984 - 2001	11.47 %	12.13 %	13.63 %	-2.15 %	-1.50 %

Taulukko 2.3.5. Yhdysvaltojen aktiivirahastojen vuotuisten keskituottojen vertailu Whilshire 5000 indeksiin (Siegel 2002).

Koska rahastojen toimissa on suuria eroja ja sattuma vaikuttaa tulokseen, on tarpeen verrata tiettynä vuonna keskimääräistä paremmin menestyneiden rahastojen menestystä peräkkäisinä vuosina. Mikäli menestys on täysin rahastojen sijoitusosaamiseta riippuvaa (ja henkilökunta ei suuressa määrin vaihdu), ylimmästä puolikkaasta (paremmin menestyneet 50 %) lähes 100 % kuuluu seuraavanakin vuonna ylimpään puolikkaaseen. Mikäli menestys on vain sattumasta kiinni, on seuraavana vuonna noin 50 % samassa ryhmässä. Vastaava tarkastelu koskee alempaa puoliskoa. Taulukossa 2.3.6 on esitetty kaksi Yhdysvaltojen aineistoa koskevaa vertailua. Goetzmannin ja Ibbotsonin vertailussa esiintyy jonkin verran pysyvyyttä. Malkielin tutkimus taas viittaa lähinnä satunnaiseen menestykseen. Keskimääräisten tuottojen alhaisuuden ja historiallisen menestyksen heikon ennustearvon takia institutionaaliset sijoittajat Yhdysvalloissa ovat päätyneet sijoittamaan runsaasti indeksirahastoihin.

	Ylin puolikas	**Alin puolikas**
	(periodi 2)	(periodi 2)
Goetzmann ja Ibbotson (1976 - 1985)		
Ylin puolikas (periodi 1)	62.0 %	38.0 %
Alin puolikas (periodi 1)	36.6 %	63.4 %
Malkiel (1980 -luku)		
Ylin puolikas (periodi 1)	51.7 %	48.3 %
Alin puolikas (periodi 1)	47.5 %	52.5 %

Taulukko 2.3.6. Rahastojen menestyminen peräkkäisillä periodeilla (Bodien ym. (2002)).

Osakesijoitusten tappioriski: Viimeisessä taulukossa on tarkasteltu osakkeiden *arvonmuutoksiin* liittyvää suurinta menneisyyden tappiota 1, 5 ja 10 vuoden sijoitusperiodeilla. Aineisto koostuu alueellisista osakkeiden hintaindekseistä. Pisimmät sarjoista ovat vuodesta 1921. Kaikki sarjat päättyvät vuoteen 1996. Keskiarvo on laskettu aineistosta, joka sisältää 30 valtiota (kehittyneet maat sisältyvät aineistoon). Yhdysvaltojen aineistosta laskettu suurin tappio on selvästi pienempi kuin aineiston keskiarvo. Pelkästään Yhdysvaltojen aineiston käyttö riskin arvioimisessa antaa siis positiivisesti harhaisen kuvan osakkeiden riskistä. Globaalin indeksin suurin tappio on keskiarvoa ja Yhdysvaltoja selvästi pienempi. Jokaisen alueen kohdalla 10 vuoden sijoituksen suurin tappio ylittää 1 vuoden ja 5 vuoden suurimmat tappiot. On tärkeää huomata, että sijoituksen pitkän tähtäimen kokonaisriskiin osakkeista saadut osingot ovat olennaisia.

alue	**1 vuosi**	**5 vuotta**	**10 vuotta**
Yhdysvallat	55.9 %	56.4 %	60.7 %
Iso-Britania	65.6 %	74.7 %	68.7 %
Suomi	51.0 %	86.6 %	89.5 %
Japani	92.7 %	37.1 %	99.0 %
Keskiarvo	60.1 %	74.7.8 %	76.0 %
Globaali ind.	43.2 %	51.4 %	54.0 %

Taulukko 2.3.7. Suurin tappio osakesijoituksissa eri sijoitusperiodeilla vuosina 1921 - 1996 (Jorion 2000).

3 APT-malli

3.1 Faktorimallit

I know of no way of judging the future but the past. PATRIC HENRY

Arvopapereiden tuottojen keskiarvoon ja -hajontaan perustuvan teorian soveltamisen merkittävä ongelma on siinä, että se vaatii mallin parametrien, keskiarvojen, varianssien ja kovarianssien, määrittämistä ja on siten vaativa estimointiongelma, jota pahentavat usein epäluotettavat aikasarjat. Tämän takia onkin useasti tehokkaampaa soveltaa keskiarvo/varianssi-analyysiä siten, että muodostamme tuotoille *faktorimallin*, joka yksinkertaistaa ongelman rakennetta ja vähentää määritettävien parametrien lukumäärää. Tätä mallia kutsutaan *APT-malliksi (APT = Arbitrage Pricing Theory; arbitraasihinnoittelun teoria)*. Tässä teoriassa tarvittavien parametrien lukumäärää voidaan rajoittaa siten, että arvopapereihin liittyvää satunnaisuutta rajataan olettamalla, että arvopapereiden hintojen määräytymisen taustalla on pieni määrä tarkasteltavan ongelman kannalta relevantteja satunnaisia tekijöitä (faktoreita). Tämän teorian tehokkuudesta huolimatta tulee faktorien valinnassa kuitenkin olla erittäin huolellinen ja valinnan tuleekin perustua tarkasteltavien arvopaperien luonteeseen. Faktorit kannattaa usein luokitella kolmeen ryhmään.

1. *Ulkoiset faktorit:* Esimerkkinä voidaan mainita BKT, kuluttajahintaindeksi ja työttömyysaste. Tällainen aineisto saadaan yleensä virallisista tilastoista.

2. *Johdetut faktorit:* Esimerkkinä voidaan mainita markkinaportfolion tuotto, jonkin toisen arvopaperin tuotto sekä toimialaindeksin tuotto. Tällaiset johdetut faktorit ovat usein yksittäisten osaketuottojen lineaarikombinaatioita.

3. *Yrityskohtaiset faktorit:* Esimerkkinä voidaan mainita p/e -luku (*price-earnings ratio*), p/d-luku (*price-dividend ratio*), jaetun osingon osuus voitosta (*dividend-payout ratio*) sekä yrityksen tulosennuste.

3.1.1 Yhden faktorin malli

Tarkastellaan n:ää arvopaperia, joiden tuotot ovat r_i, $i = 1, 2, \dots, n$, ja yksittäistä faktoria f, joka on satunnaismuuttuja (esim. portfolioindeksin arvo yhdeltä periodilta). Oletetaan, että arvopaperien tuottojen r_i ja faktorin f välillä vallitsee relaatio

$$r_i = a_i + b_i f + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tässä yhtälössä parametrit a_i ja b_i ovat vakioita ja satunnaisvirheelle ε_i pätee ehto $\mathbf{E}[\varepsilon_i] = 0$. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan myös, etteivät virhetermit ε_i korreloi keskenään tai faktorin f kanssa. Ts.

$$\mathrm{cov}[\varepsilon_i, f] = \mathbf{E}[(f - \bar{f})\varepsilon_i] = 0 \quad \text{ja} \quad \mathrm{cov}[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \mathbf{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j.$$

Virhetermin ε_i varianssi $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ oletetaan tunnetuksi. Jokaiselle arvopaperituotolle r_i voidaan määrittää parametrit a_i ja b_i, joista edellinen (*vakiotermi*) kuvaa etäisyyttä origosta ja jälkimmäinen (*faktorilataus*) kuvaa tuoton herkkyyttä faktorin f muutoksien suhteen. Parametrit voidaan estimoida PNS:llä sovittamalla suora havaintoaineistoon, joka koostuu tuottojen ja faktorin historiasta. Annettuna yhden faktorin malli, voidaan keskiarvo-varianssi-mallin soveltamiseen tarvittavat parametrit määrittää muodossa $\bar{r}_i = a_i + b_i \bar{f}, \sigma_i^2 = b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma^2_{\varepsilon_i}, \sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2, i \neq j, b_i = \mathrm{cov}[r_i, f]/\sigma_f^2$.

3.1.2 Usean faktorin mallit

Koska yhden faktorin mallit ovat luonnollisesti hyvinkin puutteellisia todellisten arvopaperituottojen kuvaajia, voidaan faktorimallia yleistää ottamalla mukaan useampia faktoreita. Oletetaan nyt, että faktoreita on m kappaletta, jolloin

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + b\mathbf{f} + \varepsilon,$$

missä $\mathbf{r}^T = (r_1 \dots, r_n)$ on arvopapereiden satunnaisia tuottoja kuvaava vektori, $\mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_n)$ on lineaarisen sovitteen (regressiosuoran) vakiotermi, $b = (b_{ij})_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ on faktorilatauksien muodostama $n \times m$-matriisi, $\mathbf{f}^T = (f_1, \dots, f_m)$ on satunnaisten faktoreiden muodostama vektori ja $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

on virhetermien muodostama vektori. Kuten yhden faktorin mallin tapauksessa, faktorit f_j sekä virhetermit ε_i oletetaan keskenään tilastollisesti riippumattomiksi, jolloin $\text{cov}[\varepsilon_i, f_j] = 0$ kaikille i ja j. Lisäksi virhetermin oletetaan toteuttavan ehdon $\mathbf{E}[\varepsilon_i] = 0$ kaikille i. Näiden oletusten ollessa voimassa huomataan, että arvopapereiden satunnaisille tuotoille pätee $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + b\bar{\mathbf{f}}$ ja

$$\text{cov}[r_i, r_j] = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} b_{jk} \sigma_{f_k}^2 + \sum_{k \neq l} (b_{ik} b_{jl} + b_{il} b_{jk}) \,\text{cov}[f_k, f_l] + \text{cov}[\varepsilon_i, \varepsilon_j].$$

Vastaavasti määrittämällä arvopaperin satunnaisen tuoton kovarianssi faktoreiden suhteen saadaan aikaiseksi lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \sigma_{f_1}^2 & \cdots & \text{cov}[f_1, f_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[f_m, f_1] & \cdots & \sigma_{f_m}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cov}[r_i, f_1] \\ \vdots \\ \text{cov}[r_i, f_m] \end{bmatrix}.$$

Kyseessä on siis lineaarinen yhtälöryhmä, joka voidaan ratkaista soveltamalla mm. Cramerin sääntöä. Yleisesti kuitenkin tiedetään, että mikäli faktorit eivät ole keskenään täysin korreloituneita (jolloin kovarianssimatriisi on säännöllinen), niin silloin $b_i = \sigma_f^{-1} \sigma_{r_i, f}$, missä

$$\sigma_f = \begin{bmatrix} \sigma_{f_1}^2 & \cdots & \text{cov}[f_1, f_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[f_m, f_1] & \cdots & \sigma_{f_m}^2 \end{bmatrix}$$

on faktoreiden f kovarianssimatriisi,

$$\sigma_{r_i, f} = \begin{bmatrix} \text{cov}[r_i, f_1] \\ \vdots \\ \text{cov}[r_i, f_m] \end{bmatrix}$$

on tuottovauhdin r_i ja faktoreiden f_j kovariansseista muodostettu pystyvektori ja $b_i^T = (b_{i1}, \ldots, b_{im})$ on i:nnen arvopaperin faktorilatauksien muodostama vektori.

Faktorimallin käytännön etuja

• Rakenteeltaan yksinkertaisella mallilla, jollaiseen faktoreita käyttämällä pyritään, on paljon etuja: helpompi tulkinta, pienempi mallivirheen mahdollisuus ja usein parempi toiminta uudella - estimointiperiodiin kuulumattomalla - datalla. Vähäparametrisyys taas pienentää syntyvää estimointivirhettä (ks. Tsay 2002, Alexander 2001).

• Kovarianssimatriisin estimointiin liittyy merkittäviä ongelmia. Ensinnäkin parametrien eli muuttujien välisten kovarianssien lukumäärä kasvaa neliöllisesti muuttujien lukumäärän kasvaessa. Usein relevantit aikasarjat ovat melko lyhyitä, jolloin muuttujien määrän kasvu johtaa helposti epätarkkoihin estimaatteihin. Monidimensionaalinen kovarianssimatriisi on usein myös singulaarinen. Faktorimallin käyttö voi vähentää näitä ongelmia, kunhan faktorit ovat huolella valitut.

3.2 APT-teoria

Tarkoituksenamme on nyt edellä mainittuihin faktorimalleihin nojaten osoittaa, että arbitraasivapauden vallitessa on faktorilatauksien, riskittömän sijoitustuoton sekä vakiotermin välillä oltava jonkinlainen riippuvuus, jolloin siis mikä tahansa spesifikaatio ei ole mahdollinen. Havainnollistuksen vuoksi tarkastellaan nyt tuttua yhden faktorin mallia $r_i = a_i + b_i f$. Jokaisella arvopaperilla on nyt oma vakiotermi a_i sekä faktorilataus b_i. Mallissa ei ole erikseen virhetermiä, joten tuottojen epävarmuus liittyy ainoastaan faktorin f satunnaisuuteen (f on satunnaismuuttuja). Tarkastellaan kahta arvopaperia i ja j siten, että $b_i \neq b_j$.

Kuten Markowitzin mallissa, muodostetaan näistä arvopapereista salkku, jossa painot ovat $w_i = w$ ja $w_j = 1 - w$, jolloin salkun satunnainen tuotto on

$$r = wa_i + (1-w)a_j + [wb_i + (1-w)b_j]f$$

Valitaan paino w siten, että salkku on riskitön. Ts. valitaan salkun paino w siten, että

$$wb_i + (1-w)b_j = 0 \Rightarrow w = \frac{b_j}{b_j - b_i}.$$

Tällöin

$$r = wa_i + (1-w)a_j = \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} + \frac{a_j b_i}{b_i - b_j}$$

Jos markkinoilta löytyy riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f, niin on selvää, että edellisellä salkulla täytyy olla tämä sama tuotto (koska sekin on riskitön), muussa tapauksessa markkinoilta löytyisi arbitraasimahdollisuuksia. Itse asiassa, jos tilapäinen arbitraasimahdollisuus havaittaisiin, arbitraasin nopea hyödyntäminen ajaisi hintoja siten, että arbitraasin mahdollisuus eliminoituisi hyvin nopeasti kysynnän ja tarjonnan lain mukaisesti. Asettamalla edellisessä yhtälössä r yhtä suureksi kuin r_f huomataan, että kaikille i ja j pätee ehto

$$\frac{a_j - r_f}{b_j} = \frac{a_i - r_f}{b_i}.$$

Koska tämän yhtälön vasen puoli on riippumaton i:stä ja puolestaan oikea puoli on riippumaton j:stä, huomataan, että arbitraasivapauden vallitessa on olemassa arvopapereista riippumaton tekijä λ on ns. *riskin markkinahinta* siten, että

$$\frac{a_j - r_f}{b_j} = \lambda \Rightarrow a_j = r_f + \lambda b_j, j = 1, \ldots, n.$$

Sijoittamalla tämä tulos arvopaperin keskituottoa kuvaavaan yhtälöön huomataan, että $\bar{r}_i = r_f + b_i\lambda_1$, missä $\lambda_1 = (\lambda + \bar{f})$. Havaitsemme siis, että kun vakiot r_f ja λ_1 tunnetaan, arvopaperin odotettu tuotto määräytyy ainoastaan faktorilatauksen b_i perusteella. Tämän havainnon yleiselle mallille

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + b\mathbf{f}$$

pätevä muoto on nyt esitetty seuraavassa lauseessa:

Lause 3.1. *Oletetaan, että markkinoilla on riskitön sijoituskohde, jonka tuotto on r_f. Oletetaan myös, että arvopapereiden tuottoja ohjaa $m < n$ (n on arvopapereiden lukumäärä) faktoria yhtälön $\mathbf{r} = \mathbf{a} + b\mathbf{f}$ mukaisesti. Tällöin löytyy vakiovektori $\lambda^T = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ siten, että $\bar{\mathbf{r}} = r_f\mathbf{1} + b\lambda$.*

Todistus. Esitämme tämän lauseen todistuksen, sillä se on luonteeltaan hyvin yleinen ja yksinkertaisuudestaan huolimatta yleistyy esimerkiksi useampiulotteisten diffuusioprosessimallien tapaukseen. Muodostetaan mielivaltainen salkku $\mathbf{w}^T = (w_1, \ldots, w_{m+1})$, jolle pätee ehto $\mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1$ (joka on siis mahdollista oletuksen $m < n$ nojalla). Salkun ylituotto $r - r_f$ voidaan nyt esittää muodossa

$$r - r_f = \sum_{i=1}^{m+1} w_i(a_i - r_f) + (w_1 b_{1,1} + \cdots + w_{m+1}b_{m+1,1})\, f_1 + \cdots + (w_1 b_{1,m} + \cdots + w_k b_{m+1,m})\, f_m.$$

Valitaan salkun painot nyt siten, että sijoitus on riskitön (siis faktoreista tuleva epävarmuus poistetaan) ja antaa riskittömän ylituoton Δ, missä $\Delta > 0$. Tällöin on siis oltava voimassa ehdot

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m+1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & \cdots & b_{m+1,m} \\ a_1 - r_f & \cdots & a_{m+1} - r_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Koska markkinat on kuitenkin oletettu arbitraasivapaiksi, ei riskitön sijoitus voi tuottaa enempää kuin r_f, sillä muutoin ottamalla lainaa matalamman riskittömän tuoton antavasta kohteesta ja sijoittamalla kyseinen pääoma korkeamman riskittömän tuoton antavaan kohteeseen voisi sijoittaja taata itselleen mielivaltaisen riskittömän tuoton. Näin ollen yhtälöryhmällä (20) ei siis voi arbitraasivapauden vallitessa olla ratkaisua. Tämä väittämä on toisaalta yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin (joka on siis $(m+1) \times (m+1)$-neliömatriisi) on oltava singulaarinen. Tämä väittämä on puolestaan yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin rivien on oltava toisistaan lineaarisesti riippuvia vektoreita. On siis oltava olemassa vakiot $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$ (joista kaikki eivät ole nollia) siten, että

$$a_k - r_f = \sum_{j=1}^{m} \theta_j b_{kj} = \theta_1 b_{k1} + \cdots + \theta_m b_{km}.$$

Sijoittamalla tämä tulos tuottojen faktorimalliin saadaan

$$r_k = r_f + b_{k1}(\theta_1 + f_1) + \cdots + b_{km}(\theta_m + f_m) = r_f + \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(\theta_j + f_j).$$

Ottamalla tästä esityksestä nyt odotusarvo puolittain johtaa yhtälöön $\bar{\mathbf{r}} = r_f \mathbf{1} + b\lambda$, missä $\lambda = \theta + \bar{\mathbf{f}}$ ja $\theta^T = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$. □

Tuloksen ymmärtämiseksi tarkastellaan erityistapauksia. Jos kaikki faktorilataukset b_{ij} olisivat nollia, niin riskiä ei olisi ja tällöin siis $a_i = r_f$. Jos jokin faktorilatauksista b_{ij} on kuitenkin nollasta poikkeava, niin silloin $\bar{r}_i$ kasvaa suhteessa b_{ij}:hin. Tällöin λ_i voidaan siis tulkita faktoriin f_i liittyväksi *riskin markkinahinnaksi* (kutustaan myös *faktorihinnaksi*).

4 Jatkuva-aikainen rahoitusteoria

Economists had constructed models to descibe how markets look - or in theory should look -at any point in time. Merton made a Newtonian leap, modelling prices in a series of infinitesimally tiny moments. He called that "continuous finance." ROGER LOWENSTEIN

4.1 Jatkuva-aikaiset ja -tilaiset prosessit

I got the biggest kick out of hearing those options traders routinely talk about differential equations and stochastic differential equations. ... People had no choice. PETER BERNSTEIN

4.1.1 Lyhyesti differentiaalin käsitteestä

Vakion tuottovauhdin omaavan tilin pääoman kasvua mallinnettaessa oletetaan tuoton lankeavan korkoa korolle kaavan mukaisesti ja eksponentiaalinen diskonttaukseen päädytään yleisesti rajallekäynnin avulla (ts. olettamalla, että korkoperiodin pituus lähestyi nollaa). Tätä samaa kysymystä voidaan kuitenkin lähestyä vaihtoehtoisesti differentiaalilaskentaa soveltamalla. Oletetaan, että Δt:n pituisen periodin aikana (missä Δt on pieni $\Rightarrow (\Delta t)^k \approx 0,\ k \geq 2$) hetkellä t sijoitetulle pääomalle X_t lankeaa $r_t \Delta t$:n suuruinen tuotto, missä kuvaus $r : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ on pääoman tuottovauhtia mittaava mahdollisesti kalenteriajasta riippuvainen kuvaus. Tällöin tilin pääoma hetkellä $t + \Delta t$ on

$$X_{t+\Delta t} = X_t + r_t X_t \Delta t.$$

Vähentämällä tästä yhtälöstä puolittain sijoitettu pääoma X_t ja jakamalla näin saatu yhtälö puolittain aikavälin $[t, t+\Delta t]$ pituudella Δt johtaa yhtälöön

$$\frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} = r_t X_t.$$

Antamalla näin saadussa yhtälössä aikavälin $[t, t+\Delta t]$ pituuden Δt lähestyä nollaa saadaan

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t' = r_t X_t.$$

Tarkastellaan nyt kuvausta $\ln X_t$. Derivoinnin ketjusäännön nojalla saadaan

$$\frac{d}{dt} \ln X_t = \frac{X_t'}{X_t} = r_t.$$

Tämän yhtälön nojalla siis huomataan, että mikäli hetken t pääoma on tunnettu, voidaan mielivaltaisen hetken $T \geq t$ pääoma ilmaista muodossa

$$\ln\left(\frac{X_T}{X_t}\right) = \int_t^T r_s ds,$$

mistä seuraa, että

$$X_T = X_t e^{\int_t^T r_s ds}.$$

Vastaavasti voidaan olettaa, että tarkastelun kohteena olevaa jatkuva-aikaista ja -tilaista dynaamista systeemiä voidaan diskreetissä ajassa approksimoida differenssiyhtälöllä

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu(t, X_t)\Delta t.$$

Vähentämällä tästä yhtälöstä puolittain sijoitettu pääoma X_t ja jakamalla näin saatu yhtälö puolittain aikavälin $[t, t+\Delta t]$ pituudella Δt johtaa yhtälöön

$$\frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} = \mu(t, X_t).$$

Antamalla näin saadussa yhtälössä aikavälin $[t, t+\Delta t]$ pituuden Δt lähestyä nollaa saadaan yhtälö

$$X_t' = \mu(t, X_t),$$

jonka avulla voidaan mielivaltaisen hetken $T \geq t$ pääoma ilmaista muodossa

$$X_T = x_t + \int_t^T \mu(s, X_s) ds.$$

Esimerkki: Reaalioptioiden sekä korkojen aikarakennemallien kannalta keskeinen luokka dynaamisia malleja ovat ns. *logistiset (keskiarvoon revertoivat) mallit.* Tämän luokan mallit ovat muotoa

$$X_t' = \mu X_t(\hat{X} - X_t), \quad X_0 = x,$$

missä $\mu > 0$ ja $\hat{X} > 0$ ovat tunnettuja vakioita. Tämän luokan malleilla on se ominaisuus, että tilan X_t arvo pyrkii *pitkän aikavälin tasapainotilaansa* $\hat{X}$ kohti kalenteriajan t tullessa riittävän suureksi. Tekijää $\mu\hat{X}$ kutsutaan tämän luokan malleissa prosessin *sisäiseksi (ns. intrinsiseksi) kasvunopeudeksi.* Tarkastellaan nyt kuvausta $Y_t = 1/X_t$. Derivoinnin ketjusääntöä noudattamalla saadaan tulokseksi

$$Y_t' = -\frac{X_t'}{X_t^2} = \mu - \mu\hat{X}Y_t, \quad Y_0 = \frac{1}{x}.$$

Näin saatu yhtälö voidaan puolestaan esittää muodossa

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\mu\hat{X}t}Y_t\right] = \mu e^{\mu\hat{X}t},$$

josta integroinnilla saadaan

$$e^{\mu\hat{X}t}Y_t - Y_0 = \frac{1}{\hat{X}}\left[e^{\mu\hat{X}t} - 1\right].$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain tekijällä $e^{\mu\hat{X}t}$ saadaan yhtälö

$$\frac{1}{X_t} = \frac{1}{x}e^{-\mu\hat{X}t} + \frac{1}{\hat{X}}\left[1 - e^{-\mu\hat{X}t}\right],$$

mistä puolestaan seuraa, että

$$X_t = \left(\frac{1}{x}e^{-\mu\hat{X}t} + \frac{1}{\hat{X}}\left[1 - e^{-\mu\hat{X}t}\right]\right)^{-1}.$$

On syytä huomata, että $X_t \to \hat{X}$, kun $t \to \infty$.

4.1.2 Wiener-prosessista ja stokastisista differentiaaliyhtälöistä

Edellisessä kappaleessa esitetty malli oletettiin deterministiseksi. Kuten käytännöstä kuitenkin hyvin tiedetään, ovat rahoituksen teorianmuodostuksen kannalta keskeiset ilmiöt lähes poikkeuksetta satunnaisia (eli stokastisia). Tällöin edellisessä kappaleessa mainittu deterministinen aikasarjamalli on liian yksinkertainen kuvaamaan esimerkiksi todellista arvopaperihintaa tai ehdollistetun sopimuksen tuottoa. Tämän takia rahoituksen teoriassa oletetaankin yleisesti, että tarkasteltavien suureiden dynaamiikkaa voidaan riittävän täsmällisesti approksimoida stokastisella differenssiyhtälöllä (siis aikarakennemallilla)

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)Z_t, \tag{21}$$

missä Z_t satunnaismuuttuja, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. Z_t on normaalisti jakautunut ja
2. Z_t on riippumaton kaikesta mitä on tapahtunut hetkeen t mennessä (ns. *Markov-ominaisuus*). Kääntäen tämä ehto voidaan ilmaista sanomalla, että Z_t:n tulevan käyttäytymisen määrää pelkästään sen nykytila, ei menneisyys.

Yllä esitetyssä mallissa termiä $\mu(t, x)$ kutsutaan prosessin X_t ajautumaksi (drift) ja termiä $\sigma(t, x)$ volatiliteetiksi (volatility). Mallissa (21) vasemman puolen termi mittaa prosessin X_t arvon muutosta pienellä aikavälillä $[t, t + \Delta t]$. Vastaavasti tekijä $\mu(t, X_t)\Delta t$ mittaa prosessin keskimääräistä trendikasvua pienellä aikavälillä $[t, t + \Delta t]$. Jotta prosessille Z_t voitaisiin määrittää samankaltainen differenssimuotoinen esitys (siis esitys, joka voidaan ilmaista satunnaisen suureen arvon muutoksena), tarvitsemme nyt Wiener-prosessin määritelmän.

Määritelmä: Stokastinen prosessi $\{W_t; t \geq 0\}$ on ns. *Wiener-prosessi eli Brownin liike,* jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $W_0 = 0$.
2. Prosessilla W_t on riippumattomat lisäykset; ts. jos $r < s \leq t < u$, niin satunnaismuuttujat $W_u - W_t$ ja $W_s - W_r$ ovat toisistaan riippumattomia (ns. *autokorreloimattomuusehto*).
3. Satunnaismuuttujalle $W_t - W_s$ pätee ehto $W_t - W_s \sim N(0, (t - s))$ aina kun $s < t$.
4. Prosessin W_t polku on jatkuva.

On siis syytä huomata, että ehdoista 1 ja 3 seuraa, että $W_t \sim N(0, t)$.

Annettuna Wiener-prosessin W_t määritelmä kirjoitetaan stokastinen differenssiyhtälö (21) muotoon

$$\Delta X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)\Delta W_t, \tag{22}$$

missä $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ ja $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$. Tässä vaiheessa lukijalla saattaa olla kiusaus jakaa yhtälö (22) puolittain aikavälin $[t, t + \Delta t]$ pituudella Δt ja antaa sitten Δt:n pienentyä kohti nollaa. Valitettavasti näin ei saa tehdä, sillä, vaikka Wiener-prosessi W_t on jatkuva, se ei kuitenkaan ole differentioituva. Täsmällisemmin ilmaistuna, Wiener-prosessi W_t ei ole missään differentioituva. Jotta lukija saisi tästä ominaisuudesta jonkinlaisen intuitiivisen käsityksen, tarkastellaan Wiener-prosessin satunnaista erotusosamäärää

$$Z_{t+\Delta t} = \frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{\Delta t}.$$

Nyt on selvää, että

$$Z_{t+\Delta t} \sim N\left(0, \frac{1}{\Delta t}\right),$$

mikä ei jakaumana ole hyvin määritelty, kun $\Delta t \downarrow 0$, sillä sen varianssi (ja siten myös keskihajonta) tulee mielivaltaisen suureksi tarkasteluaikavälin pituuden lähentyessä nollaa. On kuitenkin syytä mainita, että vaikka Wiener-prosessin derivaatta dW_t/dt (ns. *valkoinen kohina*; *white noise*) ei ole formaalisti tavanomaisena funktiona olemassa voidaan sitä tarkastella ns. yleistettynä funktiona distribuutioavaruudessa. Mielenkiintoisuudestaan huolimatta kyseinen avaruus edellyttää melko hyvää (ellei peräti erinomaista) mittateorian sekä funktionaalianalyysin tuntemusta, joten emme tässä perehdy kyseiseen asiaan enempää. Tärkeintä on huomata, ettei stokastisen differenssiyhtälön (22) avulla voida kuitenkaan muodostaa tavanomaista (*Riemann*-) integraalia, vaan meidän on luotava kokonaan eri integrointiteoria ja sitä kautta tavanomaisesta poikkeava differentiaalilaskenta.

4.1.3 Itô-integraalista ja -differentiaalista

Nyt kun olemme nähneet, ettei stokastinen diskreetti dynamiikka (22) johda tavanomaisen integraalin ja derivaatan käsitteeseen, annetaan nyt aikavälin $[t, t+\Delta t]$ pituuden Δt lähestyä nollaa jolloin saadaan tulokseksi

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä dX_t mittaa satunnaismuuttujan arvonmuutosta, dt mielivaltaisen pienen tarkasteluaikavälin pituutta ja dW_t Wiener-prosessin arvonmuutosta. On syytä huomata, että ns. *stokastinen differentiaaliyhtälö (sdy)* (22) on itse asiassa tiivistetty esitysmuoto integraaliesityksestä

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Tässä integraalimuotoisessa esityksessä ensimmäinen integraali on tavanomainen. Toinen integraali riippuu Wiener-prosessin W_t muutoksista, joten emme pysty määrittelemään sitä tavanomaisena integraalina. Tämän takia meidän täytyy muodostaa uusi luokka integraaleja (ja sitä kautta uusi differentiaalilaskenta), jotka sopivat Wiener-prosessin W_t suhteen määriteltyjen stokastisten prosessien integroimiseen. Koska tämän materiaalin tarkoituksena ei ole perehdyttää abstraktiin mittateoriaan, ylenkatsotaan tämä aspekti tässä (kiinnostuneen lukijan kannattaa perehtyä loistaviin oppikirjoihin Øksendal 1998 sekä Protter 2004). Finanssimatematiikan kännalta keskeisimmän integraalikäsitteen, Itôn integraalin, määritelmän taustalla on ajatus siitä, että integraali

$$\int_0^t g_s dW_s$$

voidaan määritellä sarjan

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \tag{23}$$

raja-arvona *keskineliön* mielessä, kun $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t$ on välin $[0, t]$ jako. Tätä määritelmää soveltamalla voidaan osoittaa Itô-integrointiteorian kannalta mielenkiintoinen aputulos.

Väite 4.1. *Oletetaan, että prosessille g_s pätee ehto*

$$\int_s^t \mathbf{E}[g_y^2]dy < \infty.$$

Tällöin seuraavat ehdot ovat voimassa:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\int_s^t g_y dW_y\right] &= 0 \\ \mathbf{E}\left[\left(\int_s^t g_y dW_y\right)^2\right] &= \int_s^t \mathbf{E}[g_y^2]dy. \end{aligned}$$

Väite (4.1) osoittaa kaksi sarjakehitelmän (24) valossa intuitiivisesti selvää tulosta (sillä Wiener prosessin lisäykset olivat toisistaan riippumattomia, normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden keskiarvo on 0 ja varianssi on tarkasteluaikavälin pituus). Kuten tavanomaistenkin differentiaaliyhtälöiden tapauksessa, ei stokastisella differentiaaliyhtälöllä

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

ole aina ratkaisua olemassa. Ratkaisun olemassaolon kannalta tärkeä tulos on seuraava lause.

Lause 4.2. *Oletetaan, että kuvauksille $\mu(t, x)$ ja $\sigma(t, x)$ pätee ehdot*

$$\begin{aligned} |\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| &\leq C(1 + |x|), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, C \in \mathbb{R} \\ |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq D|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T], D \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Tällöin stokastisella differentiaaliyhtälöllä

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x$$

on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu siten, että

$$\mathbf{E}\int_0^T |X_s|^2 ds < \infty.$$

Rahoitussovellusten ja Itôn stokastisen analyysin kannalta keskeisin tulos on ehdottomasti ns. *Itôn lause*, joka karakterisoi miten riittävän sileän kuvauksen arvo muuttuu, kun sen perustana olevan satunnaisen aikasarjan arvo muuttuu. Tämä on nyt esitetty seuraavassa lauseessa:

Väite 4.3. *(**Iton lause**) Oletetaan, että prosessin X_t dynamiikka määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

Oletetaan lisäksi, että kuvaus $f : [0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ ja määritellään prosessi $Y_t = f(t, X_t)$. Tällöin

$$df(t, X_t) = \left(f_t(t, X_t) + \mu(t, X_t)f_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)f_{xx}(t, X_t)\right)dt + \sigma(t, X_t)f_x(t, X_t)dW_t.$$

Erityisesti siis huomataan, että mikäli ehto

$$\int_0^T \mathbf{E}[\sigma^2(t, X_t)f_x^2(t, X_t)]dt < \infty$$

toteutuu, niin

$$\mathbf{E}[f(T, X_T)] = f(0, x) + \mathbf{E}\left[\int_0^T \left(f_t(t, X_t) + \mu(t, X_t)f_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)f_{xx}(t, X_t)\right)dt\right]$$

Niin hämmästyttävältä kuin se saattaakin tuntua, on Itôn lauseen taustalla itse asiassa vanha tuttu Taylorin sarjakehitelmä. Tätä voidaan hyvin havainnollistaa itse Wiener-prosessin avulla. Tarkastellaan prosessia $Y_t = F(W_t)$, missä $F \in C^2(\mathbb{R})$. Taylorin sarjakehitelmää soveltamalla saadaan

$$F(W_{t+\Delta t}) - F(W_t) = F'(W_t)(W_{t+\Delta t} - W_t) + \frac{1}{2}F''(\xi_t)(W_{t+\Delta t} - W_t)^2,$$

missä ξ_t on tuntematon väliarvo. Kuten edellä tekemästämme analyysista jo tiedetään on $W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t)$. Vastaavasti satunnaismuuttujasta $Z = (W_{t+\Delta t} - W_t)^2$ tiedetään, että $\mathbf{E}[Z] = \Delta t$, ja $\mathrm{var}[Z] = 2(\Delta t)^2$. Toisaalta Wiener prosessin sekä kuvauksen $F''(x)$ jatkuvuudesta seuraa, että $\lim_{\Delta t \downarrow 0} F''(\xi_t) = F''(W_t)$ todennäköisyydellä 1. Niinpä huomaamme, että kun Δt on pieni, on $Z \approx \Delta t$ (koska silloin $\mathrm{var}[Z] = 2(\Delta t)^2 \approx 0$) ja siis silloin

$$dF(W_t) = F'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}F''(W_t)dt, \quad F(W_0) = F(0),$$

joka voidaan vaihtoehtoisesti esittää muodossa

$$F(W_T) = F(0) + \int_0^T F'(W_t)dW_t + \int_0^T \frac{1}{2}F''(W_t)dt.$$

On mielenkiintoista havaita, että itse asiassa juuri tämä tulos havainnollistaa loistavasti Itôn integraalin ja tavanomaisen integraalin eron.

Esimerkki: Määritetään integraali

$$\int_0^T W_s dW_s.$$

Kuten tavanomaisesta integraalilaskennasta tiedetään, jos kuvaus $f(x)$ on välillä $[0,T]$ jatkuvasti differentioituva (huom! tätä ehtoa voidaan vielä heikentää) ja toteuttaa ehdon $f(0) = 0$, niin

$$\int_0^T f(t)df(t) = \frac{1}{2}f^2(T).$$

Niinpä lukijalla saattaisi olla kiusaus väittää, että sama tulos olisi voimassa myös Wiener-prosessin suhteen määrätylle integraalille. Näin ei kuitenkaan ole, sillä soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $f(x) = x^2$ antaa tulokseksi

$$W_T^2 = \int_0^T 2W_t dW_t + \int_0^T dt = \int_0^T 2W_t dW_t + T.$$

Niinpä huomataan, että

$$\int_0^T W_s dW_s = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T,$$

jossa tekijä $T/2$ on itse asiassa satunnaisuudesta johtuva korjaustermi.

Esimerkki: Oletetaan, että prosessi X_t määräytyy sdy:stä

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

Tarkastellaan nyt prosessia V_t joka määräytyy sdy:stä

$$dV_t = h_t^F dF(t, X_t) + h_t^G dG(t, X_t),$$

missä $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ ja $G \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ ovat tunnettuja kuvauksia ja prosessit h_t^F sekä h_t^G ovat päätäntämuuttujia. Soveltamalla Itôn lausetta kuvauksiin $F(t, x)$ sekä $G(t, x)$ saadaan tulokseksi, että

$$dV_t = [h_t^F \mu_F(t, X_t) + h_t^G \mu_G(t, X_t)]dt + \sigma(t, X_t)[h_t^F F_x(t, X_t) + h_t^G G_x(t, X_t)]dW_t,$$

missä

$$\mu_F(t, X_t) = F_t(t, X_t) + \mu(t, X_t)F_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)F_{xx}(t, X_t)$$

ja

$$\mu_G(t, X_t) = G_t(t, X_t) + \mu(t, X_t)G_x(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)G_{xx}(t, X_t).$$

Erityisesti siis huomataan, että mikäli ehto

$$h_t^F F_x(t, X_t) = -h_t^G G_x(t, X_t)$$

toteutuu, on prosessi V_t deterministinen, sillä silloin

$$dV_t = h_t^F \left[F_t(t, X_t) - G_t(t, X_t)\frac{F_x(t, X_t)}{G_x(t, X_t)} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t)\left(F_{xx}(t, X_t) - \frac{F_x(t, X_t)}{G_x(t, X_t)}G_{xx}(t, X_t)\right)\right] dt.$$

4.1.4 Feynman-Kač -lause

Seuraavana esitettävää osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisukeinoa sovelletaan myöhemmin johdannaisten hintojen määrityksessä.

Käänteinen yhteys

• Kuten edellisessä kappaleessa osoitettiin, voidaan Itôn lausetta soveltaa tehokkaasti erilaisten velvoitteiden arvoja kuvaavien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden johtamiseen. On mielenkiintoista huomata, että myös päinvastainen lähestymistapa on mahdollinen. Stokastisten differentiaaliyhtälöiden teoriaa voidaan soveltaa tehokkaasti osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen määrittämiseen. *Fenman-Kač -lause* muodostaa tällaisen yhteyden stokastisten prosessien teorian ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden välille.

• Vuonna 1965 Nobelin fysiikan palkinnon saanut, viime vuosisadan merkittävimpiin fyysikkoihin kuulunut, Richard Feynman sovelsi tätä menetelmää kvanttielektrodynamiikan ongelmien ratkaisemiseen. Vielä merkittävämmällä fyysikolla, Albert Einsteinilla oli merkittävä rooli Brownin liikkeen teorian kehittämisessä. Ranskalainen matemaatikko Luis Bachelier tosin mallinsi sijoitustoimintaa Brownin liikkellä jo ennen Einsteinia.

Väite 4.4. *(**Feynman- Kač lause**) Oletetaan, että kuvaus $F \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ on reuna-arvotehtävän*

$$\begin{aligned} F_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)F_{xx}(t,x) + \mu(t,x)F_x(t,x) - rF(t,x) &= 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ F(T,x) &= \Pi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ratkaisu. Oletetaan lisäksi, että

$$\int_t^T e^{-2rs}\mathbf{E}_{(t,x)}\left[\sigma^2(s,X_s)F_x^2(s,X_s)\right] ds < \infty,$$

missä prosessi X_t määräytyy kaikille $s \geq t$ stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dX_s = \mu(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s, \quad X_t = x.$$

Tällöin $F(t,x)$ voidaan esittää muodossa

$$F(t,x) = \mathbf{E}_{(t,x)}\left[e^{-r(T-t)}\Pi(X_T)\right],$$

missä odotusarvossa esiintyvällä alaindeksillä (t,x) viitataan oletukseen $X_t = x$.

4.2 Geometrinen Brownin liike

I can predict the motion of heavenly bodies, but not the madness of crowds. ISAAC NEWTON

4.2.1 Määritelmä ja ominaisuuksia

The thing that most affects the stock market is everything. JAMES WOOD

Akateemisessa rahoitusteorian tutkimuksessa on näytellyt tärkeää osaa sijoitusmarkkinoiden *tehok- kushypoteesi*, jonka mukaan ankarasti kilpailluilla markkinoilla, jollaisiksi markkinat oletetaan, kaikki informaatio, jota voidaan hyödyntää sijoituskohteen tuoton ennustamissa, otetaan huomioon välittömästi sen hinnassa. Sijoituskohteen hinta reagoi hypoteesin mukaan siis ainoastaan uuteen informatioon. Uuta informaatiota ei voida ennustaa (koska se on uutta). Näin myös hinnan muutos on *ennustamaton*. Mikäli esimerkiksi uskotaan, että osakemarkkinat ovat tehokkaat, on aivan yhdentekevää mihin osakkeisiin sijoitetaan.

Markkinoiden tehokkuushypoteesistä on esitetty kolme muunnelmaa. Arvopaperin hinnassa on otettu huomioon 1) heikon hypoteesin mukaan hintojen ja tuottojen historia, 2) keskivahvan mukaan kaikki julkinen informaatio, 3) vahvan hypoteesin mukaan kaikki (myös sisäpiiritieto) informaatio. Tehokkuushypoteesien empiirinen kumoaminen on hyvin hankalaa hypoteesin epämääräisyyden takia. Akateemisessa kirjallisuudessa käydäänkin jatkuvaa debattia aiheesta. Yleisin kanta on se, että sijoitusmarkkinat ovat erittäin vaikeasti ennustettavia eivätkä tarjoa juurikaan "ilmaisia lounaita."Tämä tarkoittaa sitä, että lisätuottoa saadaan yleensä vain lisäriskillä. Mikäli otaksutaan, että markkinat ovat "lähes tehokkaat"(tai lähes ennustamattomat), voidaan olettaa hinnan noudattavan likimääräisesti satunnaiskulkua.

Rahoituksen teorian tarkasteluissa arvopapereiden hinnan mallina ylivoimaisesti sovelletuimmat stokastiset prosessit ovat log-normaalisti jakautunut satunnaiskulku (geometrinen kasvu) ja sen jatkuva-aikainen vastine ns. *geometrinen Brownin liike* tai *geometrinen Wiener-prosessi*. Geometrisen Brownin liikkeen stokastinen differentiaaliyhtälömuoto on

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$ ovat tunnettuja vakioita. Kun $\sigma = 0$, geometrinen Brownin liike yhtyy tavanomaiseen geometriseen kasvuun, sillä silloin yhtälöstä $dX_t = \mu X_t dt$ seuraa, että $X_t = xe^{\mu t}$. Jos kuitenkin $\sigma > 0$, niin soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $\ln x$ saadaan tulos

$$d\ln X_t = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

Integroinnilla ja potenssiin korottamalla saadaan $X_t = xe^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t} = xe^{\mu t}M_t$, missä eksponentiaalinen (ja siten positiivinen) prosessi $M_t = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W_t}$ on sdy:n

$$dM_t = \sigma M_t dW_t, \quad M_0 = 1,$$

ratkaisu. Tämä geometrisen kasvun multiplikatiivinen dekomponointi deterministiseen geometriseen kasvuun $xe^{\mu t}$ ja eksponentiaaliseen kohinaosaan M_t on hyvin käyttökelpoinen ominaisuus monissa muissakin yleisemmässä stokastisten differentiaaliyhtälöiden sovellutuksissa. Havainnollistetaan tätä esimerkillä. Oletetaan, että prosessi X_t määräytyy sdy:stä

$$dX_t = \mu(t, X_t)X_t dt + \sigma(t, X_t)X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä kuvaukset $\mu : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}$ ja $\sigma : \mathbb{R}^2_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ oletetaan "riittävän" säännöllisiksi. Soveltamalla nyt taas Itôn lausetta kuvaukseen $x \mapsto \ln x$ saadaan tulos $X_t = xe^{\int_0^t \mu(s,X_s)ds}M_t$, missä prosessi M_t määräytyy sdy:stä

$$dM_t = \sigma(t, X_t)M_t dW_t, \quad M_0 = 1.$$

Geometrisella Brownin liikkeellä on monia hyviä ominaisuuksia, joista voimakas strukturaalinen stabiilisuus on yksi. Täsmällisemmin ilmaistuna, tarkastellaan kuvausta $f(x) = x^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$ on tunnettu. Tällöin Itôn lauseen nojalla saadaan tulokseksi, että

$$dX_t^\alpha = \left(\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2\right) X_t^\alpha dt + \alpha\sigma X_t^\alpha dW_t, \quad X_0^\alpha = x^\alpha.$$

Ts. myös prosessi X_t^α on geometrinen Brownin liike. Edellä tehdyn analyysin nojalla huomataan erityisesti, että

$$X_t^n = x^n e^{n(\mu-\sigma^2/2)t+n\sigma W_t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

jolloin siis

$$\mathbf{E}[X_t^n] = \mathbf{E}[x^n e^{n(\mu-\sigma^2/2)t+n\sigma W_t}] = x^n e^{n(\mu-\sigma^2/2)t}\,\mathbf{E}[e^{n\sigma W_t}].$$

On syytä huomata, että prosessi $Y_t = n\sigma W_t$ on normaalisti jakautunut keskiarvonaan 0 ja varianssinaan $n^2\sigma^2 t$ (ts. $Y_t \sim N(0, n^2\sigma^2 t)$). Koska $N(0,\gamma^2)$-jakautuneen satunnaismuuttujan momentit generoiva funktio on kuitenkin muotoa

$$F(s) = \mathbf{E}[e^{-sx}] = e^{\frac{1}{2}s^2\gamma^2}$$

huomataan, että

$$\mathbf{E}[X_t^n] = x^n e^{n(\mu-\sigma^2/2)t+n^2\sigma^2 t/2}.$$

Erityisesti siis valitsemalla $n = 1$ saadaan tulokseksi $\mathbf{E}[X_t] = xe^{\mu t}$. Ts. geometrinen Brownin liike kasvaa keskimäärin kuten tavanomainen geometrinen kasvu.

Esimerkki: (*Riskienhallintaa*) Oletetaan, että yrityksen varallisuudelle A_t sekä vastuille L_t pätee ehto $A_t = A_0 e^{Z_t^A}$ ja $L_t = L_0 e^{Z_t^L}$, missä $Z_t^A \sim N(\mu_A t, \sigma_A^2 t)$ ja $Z_t^L \sim N(\mu_L t, \sigma_L^2 t)$ ovat toisistaan satunnaisesti riippuvia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee ehto $\mathrm{cov}[Z_t^A, Z_t^L] = \sigma_A\sigma_L\sigma_{AL}t$. Annettuna nämä oletukset tarkastellaan tapauksen $A_t \geq (1+\delta)L_t$ todennäköisyyttä (ts. määritetään todennäköisyys, että hetkellä t varat ylittävät vastuut reservin δL_t verran). Varojen ja vastuiden määritelmästä huomataan välittömästi, että

$$\mathbb{P}\left[A_t \geq (1+\delta)L_t\right] = \mathbb{P}\left[\frac{A_t}{L_t} \geq 1+\delta\right] = \mathbb{P}\left[Z_t^A - Z_t^L \geq \ln\left(\frac{(1+\delta)L_0}{A_0}\right)\right].$$

Koska erotukselle $Z_t^A - Z_t^L$ kuitenkin pätee ehto $Z_t^A - Z_t^L \sim N\left((\mu_A - \mu_L)t, (\sigma_A^2 + \sigma_L^2 - 2\sigma_A\sigma_L\sigma_{AL})t\right)$, huomataan, että

$$\mathbb{P}\left[A_t \geq (1+\delta)L_t\right] = \Phi\left(\frac{(\mu_A - \mu_L)t - \ln\left((1+\delta)L_0/A_0\right)}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2 - 2\sigma_A\sigma_L\sigma_{AL})t}}\right).$$

Annettuna tämä todennäköisyys tarkastellaan nyt seuraava rahoituksen riskienhallinnan kannalta keskeistä kysymystä:

> *Mikä varallisuus-vastuu-suhteen A_t/L_t tulee olla hetkellä 0, jotta varat A_t ylittävät vastuut L_t reservin δL_t verran hetkellä t todennäköisyydellä α?*

Ts. tavoitteena on siis määrittää se nykyinen varallisuus-vastuu-suhde A_0/L_0, jolle pätee ehto

$$\Phi\left(\frac{(\mu_A-\mu_L)t-\ln((1+\delta)L_0/A_0)}{\sqrt{(\sigma_A^2+\sigma_L^2-2\sigma_A\sigma_L\sigma_{AL})t}}\right)\geq\alpha.$$

Normaalijakauman kertymäfunktion monotonisuuden nojalla havaitaan, että tämä ehto on yhtäpitävä ehdon

$$\frac{A_0}{L_0}\geq(1+\delta)\exp\left(\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{(\sigma_A^2+\sigma_L^2-2\sigma_A\sigma_L\sigma_{AL})t}-(\mu_A-\mu_L)t\right)$$

kanssa. Seuraavassa taulukossa on varallisuus-vastuu-suhteita A_0/L_0 eri vaihtoehtoisille todennäköisyys-reservikerroinpareille (α,δ) kun $t=1$, $\sigma_A=0.15$, $\sigma_L=0.1$, $\sigma_{AL}=0.5$, $\mu_A=0.15$ ja $\mu_L=0.1$.

δ	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
$\alpha=99\%$	1.31	1.32	1.33	1.35	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42
$\alpha=98\%$	1.26	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.34	1.35	1.36	1.37
$\alpha=97\%$	1.23	1.24	1.26	1.27	1.28	1.29	1.31	1.32	1.33	1.34
$\alpha=96\%$	1.21	1.22	1.23	1.25	1.26	1.27	1.28	1.30	1.31	1.32
$\alpha=95\%$	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.27	1.43	1.44	1.45

Osaketuottojen kalenterianomalioita

Osaketuotoissa on havaittu tehokkaiden markkinoiden hypoteesin vastaisia ilmiöitä eli anomalioita. Mielenkiintoisen ryhmän muodostavat ns. kalenterianomaliat (ks. Siegel 2002).

- *Tammikuuanomalia.* Pienten yritysten osakkeet ovat tuottaneet tammikuussa selvästi paremmin kuin suurten yritysten. Yhdysvalloissa pienyritysten tuotto on mitattu tammikuussa Yhdysvalloissa 4.6% suuremmaksi kuin suuryritysten.

- *Syyskuuanomalia.* Yhdysvalloissa on havaittu, että sotien jälkeisenä aikana syyskuun keskituotto on ollut negatiivinen ollen radikaalisti huonompi kuin muut kuukaudet.

4.2.2 Parametrien estimoinnista

Kun sijoituskohteen hinta noudattaa geometristä Brownin liikettä

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dW_t$$

ovat h-mittaisten periodien logaritmiset tuotot riippumattomia ja normaalisti jakautuneita odotusarvonaan $h\mu$ ja varianssinaan $h\sigma^2$. Brownin liikkeen parametrit μ ja σ voidaan siis estimoida h-mittaisten periodien logaritmisten tuottojen aikasarjasta $r_{t+h}, r_{t+2h}, ...r_{t+nh}$ tavalliseen tapaan käyttämällä suurimman uskottavuuden estimaattoreita odotusarvolle ja varianssille

$$\bar{r}=1/n\times\sum_{i=1}^{n}r_i \quad \text{ja} \quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu-r_i\ )^2,$$

jolloin estimaattorien hajonnat ovat

$$STD(\bar{r})=\frac{\sigma\sqrt{h}}{\sqrt{n}}=\frac{\sigma h}{\sqrt{k}} \quad ja \quad STD(s^2)=\frac{\sqrt{2}\sigma^2 h}{\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{2}h^{3/2}\sigma^2}{\sqrt{k-h}},$$

missä $k=nh$ on estimointiperiodin pituus. Estimoitavan suureen suuruuden suhde estimaattorin hajontaan (eräänlainen signaali/kohina -suhde) on kätevä mittari estimaatin tarkkuudelle. Tässä tarkasteltavien suureiden eli odotusarvon ja varianssin suhteet estimaattoriensa hajontoihin ovat

$$\frac{h\mu}{STD(\bar{r})}=\frac{\mu\sqrt{k}}{\sigma} \quad ja \quad \frac{h\sigma^2}{STD(s^2)}=\frac{\sqrt{k-h}}{\sqrt{2h}}.$$

Kaavat osoittavat, että tarkasteluperiodin h lyhentäminen ei johda parempaan odotusarvon estimaattiin. Toisaalta estimointiperiodin pituuden k kasvattaminen parantaa suhdetta k:n neliöjuureen eli varsin hitaasti. Taloudellisissa aineistoissa on hajonta on usein suurempi kuin odotusarvo. Näin odotusarvon estimoiminen on *fundamentaalisesti epätarkkaa.* Varianssin estimaattiin estimointiperiodin pidentämisen vaikutus on yhtä hidas kuin odotusarvolla. Sen sijaan tarkasteluperiodin lyhentäminen parantaa (toisin hitaasti) varianssin estimaatteja. Varianssin tarkempi estimointi on onnekas sattuma siinä mielessä, että kappaleessa 4.4 esitettävän rahoitusalan käytännön mullistaneessa Black-Scholes -mallissa ainoastaan volatiliteettiparametri σ tarvitaan option hinnan määrämiseksi. Black-Scholes -mallia voidaan myös käyttää käänteisesti volatiliteetin laskemiseen (ks. implisiittinen volatiliteetti kohdassa 4.4.6).

4.3 Keskiarvoon hakeutuvat diffuusiot ja Bernoulli'n sdy

4.3.1 Ornstein-Uhlenbeck-prosessi

Geometrisen Brownin liike ei ole sopiva malli kaikien sijoituskohteiden kuvaamisen (esim. raaka-ainehinnat, korkojen aikarakennemallit). Vaihtoehtoisia malleja ovat ns. *keskiarvoon hakeutuvat (revertoivat)* mallit. Yksinkertaisin tämän malliluokan prosesseista on ns. *Ornstein-Uhlenbeck*-diffuusio, joka tunnetaan myös *Vasičekin korkomallina.* Tätä diffuusiota karakterisoiva sdy on muotoa

$$dX_t = \lambda(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R},$$

missä $\lambda, \bar{X} \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja vakioita. Kertomalla sdy (stokastinen differentiaaliyhtälö) puolittain integroivalla tekijällä $e^{\lambda t}$ ja integroimalla saadaan

$$X_t = \bar{X} + e^{-\lambda t}(x - \bar{X}) + \sigma \int_0^t e^{\lambda(s-t)} dW_s.$$

Erityisesti huomataan, että

$$X_t \sim N\left(\bar{X} + e^{-\lambda t}(x - \bar{X}), \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)\right),$$

josta suoraan seuraa, että mikäli $\lambda > 0$, niin silloin $X_t \to \tilde{X} \sim N\left(\bar{X}, \sigma^2/(2\lambda)\right)$. Ts. jos $\lambda > 0$, niin silloin prosessi X_t konvergoi kohti stationaaristä normaalisti jakautunutta satunnaismuuttujaa.

4.3.2 Logistinen diffuusio

Toinen yleisesti sovellettu keskiarvon hakeutuva diffuusio on ns. *logistinen diffuusio,* joka määräytyy sdy:stä

$$dX_t = \mu X_t(1 - \gamma X_t)dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}_+. \tag{24}$$

Soveltamalla nyt Itôn lausetta prosessiin $Y_t = X_t^{-1}$ saadaan stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dY_t = ((\sigma^2 - \mu)Y_t + \mu\gamma)dt - \sigma Y_t dW_t, \quad Y_0 = \frac{1}{x}. \tag{25}$$

Tämä yhtälö voidaan nyt puolestaan esittää muodossa (ns. *vakioiden variointi*) $d(Z_tY_t) = \mu\gamma Z_t dt$, missä positiivinen eksponentiaalinen prosessi $Z_t = e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$ määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dZ_t = \mu Z_t dt + \sigma Z_t dW_t, \quad Z_0 = 1.$$

Integroimalla ja sieventämällä huomataan, että prosessin tila voidaan mielivaltaisena ajanhetkenä esittää muodossa

$$X_t = \left(\frac{1}{x} + \mu\gamma \int_0^t Z_s ds\right)^{-1} Z_t.$$

On syytä painottaa, että mikäli $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$, niin silloin prosessin X_t jakauma konvergoi kohti pitkän aikavälin stationaaristä jakaumaa $\chi^2_\eta(\frac{4\mu\gamma}{\sigma^2}x)$ (χ^2-*jakauma* parametrinaan η), jonka tiheys on muotoa

$$p(x) = \frac{\left(\frac{4\mu\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\eta}{2}} 2^{-\frac{\eta}{2}} x^{\frac{(\eta-2)}{2}} e^{-\frac{4\mu\gamma}{\sigma^2}\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)},$$

missä $\eta/2 = \frac{2\mu}{\sigma^2} - 1$. Prosessin pitkän aikavälin stationaarinen keskiarvo on (kun $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[X_t] = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\sigma^2}{2\mu}\right).$$

Huomautus: Edellä käsittelemämme stokastinen differentiaaliyhtälö ratkeaa myös silloin, kun mallin parametrit ovat kalenteriajasta riippuvia "riittävän"säännöllisiä kuvauksia. Siinä tapauksessa integroiva tekijä Z_t määräytyy sdy:stä

$$dZ_t = \mu_t Z_t dt + \sigma_t Z_t dW_t, \quad Z_0 = 0,$$

jolloin siis

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t (\mu_s - \sigma_s^2/2)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\right).$$

Lisäksi

$$X_t = \left(\frac{1}{x} + \int_0^t Z_s\mu_s\gamma_s ds\right)^{-1} Z_t.$$

4.3.3 Bernoulli'n sdy

Hieman yleisempi prosessiluokka kuin edellä tarkastelemamme logistinen diffuusio muodostuu ns. *Bernoulli'n sdy:stä*, joka on muotoa

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta X_t^n)dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sekä $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja vakioita. Soveltamalla Itôn lausetta prosessiin $Y_t = X_t^{1-n}$ saadaan

$$dY_t = \left((1-n)\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 n\right)Y_t + \beta(1-n)\right)dt + (1-n)\sigma Y_t dW_t, \quad Y_0 = x^{1-n}.$$

Kuten edellä, lopputulokseksi saadaan

$$X_t = \left(\frac{x^{1-n}}{\hat{Z}_t} + \beta(1-n)\int_0^t \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_t} ds\right)^{1/(1-n)},$$

missä prosessi $\hat{Z}_t$ määräytyy sdy:stä

$$d\hat{Z}_t = (n-1)(\alpha + \sigma^2(n-2)/2)\hat{Z}_t dt + (n-1)\sigma\hat{Z}_t dW_t, \quad \hat{Z}_0 = 1.$$

Kuten logistisen diffuusionkin tapauksessa, on Bernoulli'n sdy ratkeava myös silloin, kun parametrit α, β ja σ ovat kalenteriajasta riippuvia. On syytä huomata, että mikäli $2\alpha > \sigma^2$ ja $\beta < 0$, niin prosessin X_t jakauma konvergoi kohti pitkän aikavälin stationaarista jakaumaa, jonka tiheys on

$$p(x) = \frac{1}{M}x^{2\alpha/\sigma^2 - 2}\exp\left(\frac{2\beta x^{n-1}}{\sigma^2(n-1)}\right),$$

missä

$$M = \left(\frac{\sigma^2(1-n)}{2\beta}\right)^{\frac{2\alpha-\sigma^2}{\sigma^2(n-1)}} \frac{1}{(n-1)}\Gamma\left(\frac{2\alpha-\sigma^2}{\sigma^2(n-1)}\right).$$

4.3.4 Hyödyllinen muuttujamuunnos

Tarkastellaan prosessia X_t, joka määräytyy sdy:stä

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma_t X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä kuvaus $\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on Lipschitz-jatkuva ja kuvaukset $\mu(t, X_t)$ sekä σ_t toteuttavat tavanomaiset kasvun rajoitusehdot, joidenka ollessa voimassa yllä esitetyllä sdy:llä on yksikäsitteinen ratkaisu olemassa. Kerrotaan sdy puolittain eksponentiaalisella "integroivalla tekijällä"M_t, joka määräytyy sdy:stä

$$dM_t = a_t M_t dt + b_t M_t dW_t, \quad M_0 = 1,$$

missä kuvaukset a_t ja b_t ovat tuntemattomia. Tällöin saadaan

$$M_t dX_t - \sigma_t M_t X_t dW_t = \mu(t, X_t) M_t dt.$$

Koska

$$d(M_t X_t) = a_t X_t M_t dt + b_t X_t M_t dW_t + M_t dX_t + b_t M_t \sigma_t X_t dt,$$

saadaan sdy tavanomaiseen deterministiseen differentiaaliyhtälömuotoon

$$d(M_t X_t) = \mu(t, X_t) M_t dt$$

valitsemalla $a_t = \sigma_t^2, b_t = -\sigma_t$, jolloin siis

$$M_t = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds - \int_0^t \sigma_s dW_s\right).$$

Määritellään prosessi $Y_t = M_t X_t$. Tällöin edellä johdettu sdy tulee siis muotoon

$$dY_t = \mu(t, Y_t/M_t) M_t dt, \quad Y_0 = x.$$

Esimerkki: Ratkaistava sdy

$$dX_t = \alpha X_t^\gamma dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja reaalivakioita. Edellä tekemämme analyysin nojalla huomataan, että sdy voidaan kirjoittaa muotoon

$$dY_t = \alpha Y_t^\gamma M_t^{1-\gamma} dt.$$

Tämä differentiaaliyhtälö on separoituva ja voidaan siis ratkaista tavanomaisin menetelmin. Ratkaisuksi saadaan

$$X_t = M_t^{-1}\left(x^{1-\gamma} + (1-\gamma)\alpha \int_0^t M_s^{1-\gamma} ds\right)^{1/(1-\gamma)}.$$

Hieman yleisempi tapaus, joka myös voidaan muuntaa deterministiseksi on muotoa

$$dX_t = (\alpha_t X_t + \mu(t, X_t))dt + \sigma_t X_t dW_t, \quad X_0 = x, \tag{26}$$

missä kuvaus $\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on Lipschitz-jatkuva ja kuvaukset $\mu(t, X_t)$, α_t sekä σ_t toteuttavat tavanomaiset kasvun rajoitusehdot, joidenka ollessa voimassa yllä esitetyllä sdy:llä on yksikäsitteinen ratkaisu olemassa. Kertomalla sdy (26) puolittain sdy:n

$$d\tilde{M}_t = (\sigma_t^2 - \alpha_t)\tilde{M}_t dt - \sigma_t \tilde{M}_t dW_t, \quad \tilde{M}_0 = 1,$$

toteuttavalla integroivalla tekijällä

$$\tilde{M}_t = \exp\left(\int_0^t \left(\frac{1}{2}\sigma_s^2 - \alpha_s\right) ds - \int_0^t \sigma_s dW_s\right)$$

saadaan sdy (26) muotoon

$$dY_t = \mu(t, Y_t/\tilde{M}_t)\tilde{M}_t dt, \quad Y_0 = x,$$

missä $Y_t = \tilde{M}_t X_t$.

Esimerkki: Ratkaistava sdy

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta X_t^\gamma)dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ja $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja reaalivakioita. Edellä tekemämme analyysin nojalla huomataan, että sdy voidaan kirjoittaa muotoon

$$dY_t = \beta Y_t^\gamma \tilde{M}_t^{1-\gamma} dt,$$

missä $\tilde{M}_t = e^{(\sigma^2/2-\alpha)t - \sigma W_t}$. Soveltamalla samaa separoituvuustulosta kuin edellisessä esimerkissä päädytään tulokseen

$$X_t = \tilde{M}_t^{-1}\left(x^{1-\gamma} + (1-\gamma)\beta \int_0^t \tilde{M}_s^{1-\gamma} ds\right)^{1/(1-\gamma)}.$$

4.4 Black-Scholes -malli

4.4.1 Perusoletukset

Perusoletuksena on se, että markkinoilla on kaksi mahdollista sijoituskohdetta (varma ja epävarma), joiden hintaprosessi on muotoa

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \quad B_0 = b, & (27)\\ dS_t &= \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = s, & (28) \end{aligned}$$

missä r_t on *lyhyt riskitön korko*, joka voi siis olla satunnainen - rahoitusteoriassa riskittömyydellä viitataan dW_t-termin puuttumiseen! Kuvaukset $\mu : [0, T] \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ ja $\sigma : [0, T] \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ ovat riittävän sileitä ja W_t on tavanomainen Brownin liike (Wiener prosessi). Bender, Sottinen ja Valkeila (2006) ovat äskettäin osoittaneet, että Black-Scholes -mallin oletuksiin voidaan tehdä eräitä heikennyksiä niin, että hinnoittelutulokset eivät muutu! Annettuna markkinoiden perustana oleva satunnainen dynamiikka tehdään seuraava määritelmä:

Määritelmä: Maturiteetin T omaava *ehdollistettu sopimus* (tai *ehdollistettu vaade; johdannainen*; *contingent claim, derivative*) on mielivaltainen $\mathcal{F}_T$-mitallinen satunnaismuuttuja (siis hetken T markkinainformatiolla selitettävissä oleva satunnaismuuttuja). Ehdollistettua sopimusta kutsutaan yksinkertaiseksi, mikäli se voidaan esittää muodossa $\Pi(S_T)$, missä $\Pi(s)$ on ns. *palkkiokuvaus* ja S_t on arvottamisen perustana oleva satunnainen prosessi.

4.4.2 Omarahoitteinen sijoitussalkku

Kootaan *omarahoitteinen (omavarainen; eng. self-financing) sijoitussalkku* $h_t = (h_t^B, h_t^S) \in \mathbb{R}^2$, jossa h_t^B mittaa riskittömän sijoituskohteen määrää ja h_t^S riskillisen sijoituskohteen määrää. Salkun arvo hetkellä t on tällöin

$$V_t^h = h_t^B B_t + h_t^S S_t.$$

Omarahoitteisuusehto esitetään tyypillisesti seuraavassa muodossa (lisäksi edellytetään joitakin integroituvuus- sekä neliöintegroituvuusehtoja, jotka oletetaan annetuiksi; katso Øksendal 1998, kappale 12)

$$dV_t^h = h_t^B dB_t + h_t^S dS_t = r_t h_t^B B_t dt + h_t^S dS_t. \tag{29}$$

Ts. *omarahoitteisen salkun arvonmuutokset selittyvät pelkästään sijoituskohteiden arvonmuutoksilla.* On syytä huomata, että salkun arvoprosessin määritelmästä seuraa $h_t^B B_t = V_t^h - h_t^S S_t$, josta puolestaan seuraa, että

$$dV_t^h = r_t(V_t^h - h_t^S S_t)dt + h_t^S dS_t.$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain integroivalla tekijällä $e^{-\int_0^t r_s ds}$ saadaan puolestaan yhtälö

$$d\left[e^{-\int_0^t r_s ds} V_t^h\right] = e^{-\int_0^t r_s ds} h_t^S \left[dS_t - r_t S_t dt\right].$$

Integroimalla näin saatu yhtälö puolittain ja sieventämällä saadaan

$$e^{-\int_t^T r_s ds} V_T^h = V_t^h + \int_t^T e^{-\int_t^y r_s ds} h_y^S \left[dS_y - r_y S_y dy\right]. \tag{30}$$

Annettuna nyt omarahoitteisuusehto (29) määritellään nyt arbitraasimahdollisuus sekä markkinoiden täydellisyys (kannattaa verrata näitä esimerkiksi APT-mallin tapaukseen sekä lineaariseen hinnoittelumalliin).

Määritelmä: Omarahoitteista sijoitusportfoliota h kutsutaan *arbitraasimahdollisuudeksi,* mikäli $V^h(0) = 0$ ja $V^h(T) \geq 0$ melkein varmasti ja $\mathbb{P}[V^h(T) > 0] > 0$. (ts. varmaa tuloa ilman nettoinvestointia). Markkinat ovat *arbitraasivapaat,* mikäli arbitraasimahdollisuuksia ei ole (vrt. kappale 1.2).

Määritelmä: Ehdollistettua sopimusta Ψ on *toistettavissa (suojattavissa, saavutettavissa; replicable, hedgeble,* attainable*)*, mikäli on olemassa omarahoitteinen salkku h (ns. suojaava sijoitus; *hedge portfolio*) siten, että $V^h(T) = \Psi$ melkein varmasti. Markkinat ovat *täydelliset,* mikäli jokainen ehdollistettu sopimus on toistettavissa (vrt. kappale 1.2).

4.4.3 Arbitraasivapaus ja sijoitussalkun arvo

Oletetaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi, että diskonttaustekijä on vakio $r > 0$. Annettuna edellä esitetyt määritelmät oletetaan, että salkun arvoprosessi voidaan minä hetkenä tahansa esittää kalenteriajan t ja sen hetken kurssin S_t avulla. Ts. oletetaan, että

$$V_t^h = G(t, S_t) = h_t^B B_t + h_t^S S_t,$$

missä $G : [0, T] \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ on riittävän sileä kuvaus (yleensä oletetaan, että $G \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{I})$). Omarahoitteisuusehdosta seuraa, että

$$dG(t, S_t) = dV_t^h = h_t^B dB_t + h_t^S dS_t.$$

Soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $G(t, s)$ saadaan tulokseksi

$$dG(t, S_t) = (\mathcal{A}G)(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)G_s(t, S_t)dW_t,$$

missä

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(t, s)\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mu(t, s)\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}$$

on satunnaiseen hintaprosessiin S_t liittyvä differentiaalioperaattori. Tällöin siis $(\mathcal{A}G)(t, s) = \frac{1}{2}\sigma^2(t, s)G_{ss}(t, s) + \mu(t, s)G_s(t, s) + G_t(t, s)$. Sijoittamalla nämä tulokset salkun arvonmuutoksia kuvaavaan yhtälöön ja yhdistämällä dt- sekä dW_t-tekijöitä sisältävät muodot saadaan tulos

$$\left[(\mathcal{A}G)(t, S_t) - h_t^B r B_t - h_t^S \mu(t, S_t)\right] dt + \sigma(t, S_t)\left[G_s(t, S_t) - h_t^S\right] dW_t = 0.$$

Oletetaan nyt, että salkku $h_t = (h_t^B, h_t^S)$ on riskitön (ts. valitsemalla salkun $h_t = (h_t^B, h_t^S)$ siten, että dW_t-termien kerroin katoaa ja salkku tulee vapaaksi riskistä). On selvää, että riskittömyysehto toteutuu valitsemalla riskillisen arvopaperin määrä salkusta siten, että ehto

$$h_t^S = G_s(t, S_t)$$

toteutuu. Sijoittamalla puolestaan tämä ehto salkun arvoprosessin määritelmään $G(t, S_t) = h_t^B B_t + h_t^S S_t$ päädytään tulokseen $r h_t^B B_t = rG(t, S_t) - rS_t G_s(t, S_t)$, jolloin riskitöntä dynamiikka kuvaava differentiaali- yhtälö tulee muotoon $(\mathcal{A}G)(t, S_t) - rG(t, S_t) + rS_t G_s(t, S_t) - \mu(t, S_t)G_s(t, S_t) = 0$. Sieventämällä saadaan, että mielivaltaisen johdannaisen arbitraasivapaa hinta määräytyy osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t, s)G_{ss}(t, s) + rsG_s(t, s) + G_t(t, s) - rG(t, s) = 0.$$

4.4.4 Suojausehto

Koska salkun tarkoituksena on suojata (toistaa) ehdollistetun vaateen arvo riskittömästi kaikille mahdollisille sopimuksen maturiteeteille T, huomataan, että mielivaltaisen yksinkertaisen ehdollistetun vaateen arbitraasivapaa hinta määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sigma^2(t, s)G_{ss}(t, s) + rsG_s(t, s) + G_t(t, s) - rG(t, s) &= 0 \\
G(T, s) &= \Pi(s),
\end{aligned}$$

missä $\Pi(s)$ on sopimuksen lunastuspalkkio sopimuksen perustana olevan arvopaperin funktiona. Olemme siis osoittaneet, että arbitraasivapauden vallitessa yksinkertaiset ehdollistetut vaateet voidaan hinnoitella soveltamalla hinnoitteluun reuna-arvotehtävän ratkaisua. Algoritmisesti esitettynä valitsemamme lähestymistapa on seuraavanlainen:

1. Kootaan omarahoitteinen salkku velkakirjoista sekä arvopapereista ja esitetään sen arvo arvopapereiden hinnan ja kalenteriajan funktiona.

2. Sovelletaan Itôn lausetta sekä omarahoitteisuusehtoa salkun arvoprosessiin ja tehdään sijoitus riskittömäksi valitsemalla salkussa olevien osakkeiden lukumäärä sellaiseksi, että dW_t-termin kerroin katoaa.

3. Tällä tavalla aikaansaatu sijoitus on riskitön, joten arbitraasivapauden nojalla asetetaan sen tuotto yhtä suureksi kuin markkinoilla vallitseva riskitön tuotto. Tällä tavalla saadaan aikaiseksi arbitraasivapauden kanssa konsistentti hinnoitteluyhtälö sekä riskitön sijoitusstrategia.
4. Tämän jälkeen vaaditaan replikointiehdon toteutuminen, jotta johdannainen tai *velvoite* saadaan riskittömästi suojattua valitsemallamme salkulla.

4.4.5 Feynman-Kač lause ja johdannaisten hinnoittelu

Mikäli volatiliteettikuvaus $\sigma(t,s)$ on riittävän säännöllinen, tiedetään Feynman-Kač'n lauseesta, että johdannaisen arbitraasivapaata hintaa kuvaavan alkuarvotehtävän ratkaisu voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$G(t,s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T)\right],$$

missä prosessi S_T noudattaa riskineutraalin hinnoittelumitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa prosessia (kun $\tau \geq t$)

$$dS_\tau = rS_\tau d\tau + \sigma(\tau, S_\tau)d\tilde{W}_\tau, \quad S_t = s,$$

missä $\tilde{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi. Erityisesti siis huomataan, että

$$\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}[e^{-r(T-t)}S_T] = s.$$

Niin hämmästyttävältä kuin tämä saattaakin tuntua on, tämä tulos käytännössä analoginen äärellisten mallien hinnoittelutuloksen kanssa. Kuten äärellisessä tapauksessa, ei prosessin hinnan itsensä generoimalla datalla ja sitä kuvaavalla objektiivisella jakaumalla (lukuun ottamatta arvopaperihintaa mallintavan prosessin volatiliteettia) ole välittömästi mitään tekemistä markkinoiden itsensä soveltaman riskineutraalin arvottamisperiaatteen kanssa, vaan tuottovauhdit ovat mallin kannalta ratkaisevat tekijät.

4.4.6 Black-Scholes -kaavoja

Oletetaan, että $\mu(t,S_t) = \mu S_t$, $\sigma(t,S_t) = \sigma S_t$ ja $r_t \equiv r > 0$. Tällöin mielivaltaisen yksinkertaisen ehdollistetun vaateen arbitraasivapaa hinta määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 G_{ss}(t,s) + rsG_s(t,s) + G_t(t,s) - rG(t,s) &= 0 \\ G(T,s) &= \Pi(s), \end{aligned}$$

missä $\Pi(s)$ on sopimuksen lunastuspalkkio sopimuksen perustana olevan arvopaperin funktiona. Tällöin Feynman-Kač'n lauseen nojalla

$$G(t,s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T)\right],$$

missä

$$S_T = se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\tilde{W}(T)-\tilde{W}_t)}.$$

Koska $\tilde{W}(T) - \tilde{W}_t \sim N(0, T-t)$, voidaan yllä esitetty odotusarvo lausua tavallisen normaalijakauman avulla. Ts.

$$\begin{aligned} G(t,s) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pi\left(se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y}\right) e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma u} \Pi(u) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(u/s)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} du. \end{aligned}$$

Esimerkki: (*Eurooppalainen osto-optio; European call option)* Osto-optio on sopimus joka takaa haltijalleen oikeuden (mutta ei velvollisuutta) ostaa maturiteetissaan (eräpäivänä) arvopaperi ennalta sovittuun lunastus- hintaan. Maturiteetin T ja *lunastushinnan* $K > 0$ omaavan Eurooppalaisen osto-option palkkio on muotoa $\Pi(S_T) = (S_T - K)^+$, jolloin sen arbitraasivapaa hinta on

$$\begin{aligned} C_K^T(t,s) &= \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+\right] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y} - K\right) e^{-\frac{1}{2}y^2}dy, \end{aligned}$$

missä

$$d = \frac{\ln(K/s) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Tällöin suoraan integroimalla saadaan tulokseksi

$$C_K^T(t,s) = s\Phi\left(\sigma\sqrt{T-t} - d\right) - e^{-r(T-t)}K\Phi\left(-d\right), \tag{31}$$

missä $\Phi(x)$ on normaalijakauman $N(0,1)$ kertymäfunktio ja $s = S_t$ kohde-etuuden nykyhinta. Option hinnan lauseketta (31) kutsutaan *Black-Scholes -kaavaksi* eurooppalaiselle osto-optiolle. Seuraavissa esimerkeissä johdetaan Black-Scholes -kaavat eräiden muiden keskeisten optioiden hinnoille.

Esimerkki: (*Eurooppalainen myyntioptio; European put option)* Myynti-optio on sopimus joka takaa haltijalleen oikeuden (mutta ei velvollisuutta) myydä maturiteetissaan arvopaperi ennalta sovittuun lunastushintaan. Oletetaan, että edellisen esimerkin oletukset pätevät ja pyritään hinnoittelemaan maturiteetin T ja lunastushinnan $K > 0$ omaava Eurooppalainen myyntioptio. Koska myyntioption palkkio on muotoa $\Pi(S_T) = (K - S_T)^+$ ja toisaalta $S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$ saadaan hinnoitteluoperaation lineaarisuutta soveltamalla tulokseksi, että myyntioption arbitraasivapauden kanssa konsistentti hinta on

$$\begin{aligned} P_K^T(t,s) &= \mathbf{E}_{(t,s)}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+\right] \\ &= C_K^T(t,s) + Ke^{-r(T-t)} - s, \end{aligned}$$

missä osto-option hinta $C_K^T(t,s)$ on määritelty yhtälössä (31). Tämä tulos tunnetaan yleisesti *myyntiosto-pariteettina* (*put-call-parity*).

Esimerkki: (*Eurooppalainen hajasäärioptio; European straddle option)* Hajasäärioptio on sopimus, joka velvoittaa haltijansa joko myymään tai ostamaan maturiteetissaan arvopaperi ennalta sovittuun lunastushintaan. Tällöin maturiteetin T ja lunastushinnan K omaavan hajasäärioption palkkio on siis muotoa $\max(S_T - K, K - S_T) = |S_T - K| = (S_T - K)^+ + (K - S_T)^+ = 2(S_T - K)^+ - S_T + K$. Hinnoitteluoperaation lineaarisuutta soveltamalla saadaan siis tulokseksi

$$G(t,s) = C_K^T(t,s) + P_K^T(t,s) = 2C_K^T(t,s) + Ke^{-r(T-t)} - s.$$

Esimerkki: (*Eurooppalainen riskisuojattu osakeoptio)* Oletetaan, että edellisen esimerkin oletukset pätevät ja pyritään hinnoittelemaan maturiteetin T ja lunastushinnan $K > 0$ omaava Eurooppalainen riskisuojattu osakeoptio. Kyseinen sopimus takaa haltijalleen maturiteetissaan T vaihtoehtoisesti joko silloin vallitsevan osakkeen hinnan S_T tai annetun edeltäkäsin sovitun kynnysarvon K. Tällöin tämän sopimuksen palkkiolle pätee $\Pi(S_T) = \max(S_T, K) = K + (S_T - K)^+$, jolloin hinnoittelun lineaarisuutta soveltamalla arbitraasivapaaksi hinnaksi

$$P(t,s) = C_K^T(t,s) + Ke^{-r(T-t)}.$$

Vakuutussovellutuksena tämä voidaan tulkita sopimukseksi, joka takaa haltijalleen edeltäkäsin sovitun kynnystason ylittävän portfoliotuoton generoiman ylijäämän kokonaisuudessaan.

Esimerkki: Valtaosa edellisessä esimerkissä mainituista vakuutussopimuksista on todellisuudessa sellaisia, että ne takaavat haltijalleen sopimuksen perustana olevan portfoliotuoton suhteen määritetyn hyvityksen, joka on verrannollinen kynnystason ylittävän portfoliotuoton generoiman ylijäämän kanssa. Tällöin sopimuksen palkkio voidaan esittää muodossa $\Pi(S_T) = K + \alpha(S_T - K)^+$, missä $\alpha \in (0,1)$ on tunnettu ylijäämähyvityksen suuruutta mittaava vakio. Edellisen nojalla nähdään, että kyseisen sopimuksen arbitraasivapaa hinta on

$$F(t,s) = Ke^{-r(T-t)} + \alpha C_K^T(t,s).$$

Esimerkki: (*Eurooppalaisen ehdollistetun sopimuksen termiinihinta*) Tarkastellaan maturiteetin T omaavaa sopimusta, jonka lunastuspalkkio on muotoa $Y_T = K - \Pi(S_T)$, missä K on hetkellä $t < T$ asetettava hinta. Edellä tekemämme analyysin nojalla tiedetään, että sopimuksen arbitraasivapauden kanssa konsistentti hinta on muotoa

$$E_{(t,s)}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}Y_T\right] = Ke^{-r(T-t)} - E_{(t,s)}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T)\right].$$

Asettamalla tämä hinta nollaksi saadaan

$$K = E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\Pi(S_T)\right].$$

Tätä hintaa kutsutaan maturiteetin T ja palkkion $\Pi(s)$ omaavan Eurooppalaisen ehdollistetun sopimuksen hetken t termiinihinnaksi. Valitsemalla erityisesti $\Phi(s) = s$ nähdään, että $K = e^{r(T-t)}s$.

Esimerkki: (*Eurooppalainen binäärioptio* ns. kaikki tai ei mitään-optio tai ota rahat ja juokse-optio) Tarkastellaan sopimusta jonka palkkio on muotoa $\Pi(S_T) = S_T 1_{[K,\infty)}(S_T)$. Tämä sopimus takaa haltijalleen maturiteetissaan osakkeen, mikäli sen kurssi ylittää edeltä käsin sovitun kynnystason. Mikäli näin ei ole, sopimuksen haltija ei saa mitään. Tämän sopimuksen hinta on

$$F^T(t,s) = E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}S_T 1_{[K,\infty)}(S_T)\right] = s\Phi\left(d(t,T) + \sigma\sqrt{T-t}\right),$$

missä

$$d(t,T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right].$$

Kuten myynti-osto-pariteettilauseen tapauksessa, huomataan, että $s = s1_{[K,\infty)}(s) + s1_{(0,K)}(s)$ josta suoraan seuraa, että

$$E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}S_T 1_{(0,K)}(S_T)\right] = s\left(1 - \Phi\left(d(t,T) + \sigma\sqrt{T-t}\right)\right).$$

Esimerkki: Eurooppalaisen osto-option, osakkeen hintaprosessin sekä diskonttaustekijän arvoja voidaan pitää arvottamisen kannalta melko kattavina perusmuuttujina, sillä mikäli tarkasteltavan sopimuksen palkkio $\Pi(s)$ on riittävän säännöllinen, niin osittaisintegrointia soveltamalla havaitaan, että

$$\Pi(s) = \Pi(0) + \Pi'(0)s + \int_0^\infty \Pi''(y)(s-y)^+ dy.$$

Huomataan siis, että sopimuksen arbitraasivapaa hinta on

$$G(t,s) = \Pi(0)e^{-r(T-t)} + \Pi'(0)s + \int_0^\infty \Pi''(y)C^T_y(t,s)dy.$$

Implisiittinen volatiliteetti

A typical situation is having no decent explanations for something, or one sort of half-way decent explanation. That is why econometric horse races don't interest me. You've got to get some horses first. ROBERT LUCAS

• Markkinoilla myytävän option hinnan avulla voidaan volatiliteetti laskea käyttämällä Black-Sholes-mallia (kaavaa) käänteisesti, kun muut kaavan parametrit tunnetaan. Tämä niin sanottu *implisiittinen (implikoitu) volatiliteetti* perustuu volatiliteetin ja hinnan bijektiiviseen vastaavuuteen muiden tekijöiden ollessa samoja. Johdannaiskaupassa puhutaankin usein optioden ostamisen ja myymisen sijaan riskin (volatiliteetti) ostamisesta ja myymisestä. Option hinnan määräävän lausekkeen ja ennen kaikkea sen termien (ks. edelliset esimerkit) mutkikkuuden takia implisiittinen volatiliteetti on yleensä määritettävä jotain numeerista menetelmää käyttäen.

• Empiirisistä aineistoista lasketut implisiittiset volatiliteetit eivät ole osoittautuneet yksikäsitteisiksi. Implisiittinen volatiliteetti saa eri arvoja eri lunastushinnoilla. Ilmiötä kutsutaan *volatiliteettihymyksi* (volatility smile). Implisiittisellä volatiliteetilla esiintyy lisäksi aikarakenne option maturiteetin suhteen. Nämä löydökset osoittavat, että Black-Scholes -mallissa oletettu Brownin liike ei ole tarkka kuvaus riskilliselle sijoituskohteelle S_t. Empiirisissä tutkimuksissa on havaittu, että osakkeiden hinnanmuutosten jakauma on paksuhäntäisempi kuin Brownin liike olettaa eikä volatiliteetti ole aikainvariantti (ks. Alexander 2001, Hull 2003).

4.4.7 Yleistetty Black-Scholes -malli

Oletetaan, että $\mu(t, S_t)$ on riittävän säännöllinen ja että $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t$. Ts. oletetaan, että markkinoilla havaittu hinta noudattaa yleistä mallia

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s.$$

Tällöin mielivaltaisen yksinkertaisen ehdollistetun vaateen arbitraasivapaa hinta määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 G_{ss}(t,s) + rsG_s(t,s) + G_t(t,s) - rG(t,s) &= 0 \\ G(T,s) &= \Pi(s), \end{aligned}$$

missä $\Pi(s)$ on sopimuksen lunastuspalkkio sopimuksen perustana olevan arvopaperin funktiona. Ts. ehdollistetun vaateen arbitraasivapaa hinta on tässä tapauksessa sama kuin tavanomaisessa Black-Scholes -mallissa, sillä riskineutraalissa hinnoittelussa ajautumatermi $\mu(t, s)$ muuntuu aina lineaariseksi termiksi rs, kun samanaikaisesti diffuusiotermi σs pysyy muuntumattomana.

4.4.8 Girsanovin lause

Kuten olemme jo useaan otteeseen huomanneet, tulee riskineutraalissa hinnoittelussa osakkeen hintaprosessin ajautumatermi aina muotoon rS_t, missä $r > 0$ on vallitseva riskitön tuotto. Tämän tuloksen takana on itse asiassa erittäin kaunis ja syvällinen matemaattinen tulos, joka tunnetaan *Girsanovin lauseena*. Parhaiten kyseisen lauseen merkityksen näkee kirjoittamalla yleinen sdy

$$dS_t = \alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

muotoon

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t)d\tilde{W}_t,$$

missä prosessi $\tilde{W}_t$ määräytyy sdy:stä

$$d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\alpha(t, S_t) - rS_t}{\sigma(t, S_t)}dt.$$

Girsanovin lauseen mukaan prosessi $\tilde{W}_t$ on Wiener-prosessi uuden riskineutraalin mitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa tiettyjen integroituvuus- ja säännöllisyysehtojen ollessa voimassa. Täsmällisemmin ilmaistuna, mikäli kuvaukset $\alpha(t, s)$ ja $\sigma(t, s)$ ovat Lipschitz-jatkuvia ja toteuttavat tavanomaisen kasvun rajoitusehdon ja kuvaus $h(t, s) = (\alpha(t, s) - rs)/\sigma(t, s)$ toteuttaa ns. Novikovin ehdon

$$\mathbf{E}_{(t,s)}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(u, S_u)du}\right] < \infty, \quad (t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

niin silloin on olemassa *riskineutraali mitta* $\mathbb{Q}$ (tunnetaan myös nimellä *ekvivalentti martingaalimitta*), jonka alaisuudessa prosessi $\tilde{W}_t$ on tavanomainen Wiener-prosessi.

On syytä huomata, että Girsanovin lause pätee yleisemminkin kuin edellä mainitussa rahoituksen kannalta tärkeässä erikoistapauksessa. Yleensäkin diffuusioprosessin muuttaminen muodosta toiseen voidaan perustella Girsanovin lauseen avulla. Jottei tämä argumentti jäisi täysin perusteettomaksi, havainnollistetaan Girsanovin muunnoksen yhtä positiivisten eksponentiaalisten martingaalien avulla esitettävissä olevaa tulkintatapaa. Tarkastellaan stokastista differentiaaliyhtälöä

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

ja annettuna prosessin X_t dynamiikka määritellään prosessi M_t stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dM_t = a(t, X_t)M_t dW_t \quad M_0 = 1 \Rightarrow M_t = \exp\left(\int_0^t a(s, X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s, X_s)ds\right).$$

Koska tarkoituksenamme on pyrkiä määrittämään mitan $\mathbb{P}$ kanssa ekvivalentti mitta $\mathbb{Q}$ uskottavuuskertoimen $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = M_t$ avulla, tarkastellaan nyt prosessia $X_t M_t$. Soveltamalla Itôn lausetta saadaan

$$d(X_t M_t) = M_t(\mu(t, X_t) + a(t, X_t)\sigma(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t)\left(1 + X_t\frac{a(t, X_t)}{\sigma(t, X_t)}\right)M_t dW_t. \tag{32}$$

Kuten tästä esityksestä voidaan nähdä, voidaan prosessin X_tM_t ajautumatermiä $M_t(\mu(t,X_t) + a(t,X_t)\sigma(t,X_t))$ kalibroida (ts. muuntaa) halutun muotoiseksi vain valitsemalla kuvaus $a(t,X_t)$ sopivasti. Riskineutraalin hinnoittelun tapauksessa on siis oltava voimassa ehto

$$\mu(t,x) + a(t,x)\sigma(t,x) = rx \Rightarrow a(t,x) = \frac{rx - \mu(t,x)}{\sigma(t,x)},$$

joka on yhdenmukainen edellä esittämämme muodon kanssa. Toisaalta, jos stokastisesta differentiaaliyhtälöstä halutaan poistaa ajautumatermi kokonaan, tulee kuvaus $a(t,x)$ valita siten, että ehto

$$\mu(t,x) + a(t,x)\sigma(t,x) = 0 \Rightarrow a(t,x) = -\frac{\mu(t,x)}{\sigma(t,x)}$$

toteutuu. Samaa päättelyä voidaan soveltaa tapauskohtaisesti aina, kun aiemmin mainitsemamme säännöllisyysehdot sekä Novikovin ehto toteutuvat.

Esimerkki: Tarkastellaan nyt prosessia X_t, joka määräytyy sdy:stä

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + dW_t, \quad X_0 = x,$$

missä $\mu(t,x)$ on riittävän sileä kuvaus. Nyt on selvää, että

$$\mathbf{E}[X_t] = x + \mathbf{E}\int_0^t \mu(s,X_s)ds \neq x.$$

Ts. prosessi X_t ei siis ole martingaali. Tarkastellaan nyt prosessia

$$Y_t = X_tM_t,$$

missä prosessi M_t on eksponentiaalinen martingaali muotoa

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \mu(s,X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu^2(s,X_s)ds\right)$$

joka Itôn lauseen nojalla siis määräytyy sdy:stä

$$dM_t = -\mu(t,X_t)M_tdW_t, \quad M_0 = 1.$$

Soveltamalla Itôn lausetta prosessiin Y_t johtaa stokastiseen differentiaaliyhtälöön

$$dY_t = (1 - \mu(t,X_t)X_t)M_tdW_t,$$

joka voidaan vaihtoehtoisesti esittää muodossa

$$M_tX_t = x + \int_0^t (1 - \mu(s,X_s)X_s)M_sdW_s.$$

Jos prosessi $(1 - \mu(t,X_t)X_t)$ toteuttaa edellä mainitun Novikovin ehdon, huomataan, että

$$\mathbf{E}_x[M_tX_t] = x.$$

Itse asiassa juuri tämä tulos voidaan tulkita edellä esitetyn Girsanovin lauseen avulla. Täsmällisemmin ilmaistuna, on olemassa positiivinen martingaali M_t, joka voidaan tulkita Radon-Nikodymin derivaataksi $d\mathbb{Q} = M_td\mathbb{P}$. Tämän ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa prosessi X_t on Wiener-prosessi.

Huomautus: On syytä huomata, että valitsemalla stokastisessa differentiaaliyhtälössä (32) kalibrointimuuttujaksi $a(t,X_t) = -\sigma(t,X_t)/X_t$ saadaan stokastinen differentiaaliyhtälö (32) esitettyä muodossa

$$d(X_tM_t) = M_t(\mu(t,X_t) - \sigma^2(t,X_t)/X_t)dt, \quad X_0 = x.$$

Esimerkiksi tapauksessa, jossa $\mu(t,x) = \mu(t)x$ ja $\sigma(t,x) = \sigma(t)x$, nähdään, että

$$d(X_tM_t) = (\mu(t) - \sigma^2(t))M_tX_tdt, \quad M_0X_0 = x.$$

Tällöin analyysin peruslauseen nojalla nähdään, että

$$X_tM_t = xe^{\int_0^t(\mu(s)-\sigma^2(s))ds}.$$

4.5 Riskin Markkinahinta

Tarkastellaan kuvauksia $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ sekä $g : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$, missä $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ on arvottamisen perustana olevan arvopaperihinnan S_t tila-avaruus (tyypillisesti $\mathbb{R}_+$). Oletetaan myös, että täydellisessä mitta-avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ määritelty diffuusioprosessi S_t määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad S_0 := s, \tag{33}$$

missä kuvaukset $\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ ja $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ ovat Lipschitz-jatkuvia ja toteuttavat tavanomaisen kasvun rajoite-ehdon, jonka vallitessa stokastisella differentiaaliyhtälöllä (33) on yksikäsitteinen vahva ratkaisu olemassa. Muodostetaan nyt kuvauksien $f(t, s)$ ja $g(t, s)$ avulla omarahoitteinen salkku (a_t, b_t), jonka arvoprosessille V_t pätevät ehdot

$$V_t = a_t f(t, S_t) + b_t g(t, S_t) \tag{34}$$

$$dV_t = a_t df(t, S_t) + b_t dg(t, S_t). \tag{35}$$

Itôn lauseen nojalla saadaan

$$df(t, S_t) = \mu_f f(t, S_t)dt + \sigma_f f(t, S_t)dW_t \tag{36}$$

$$dg(t, S_t) = \mu_g g(t, S_t)dt + \sigma_g g(t, S_t)dW_t, \tag{37}$$

missä

$$\mu_f = \frac{(\mathcal{A}f)(t, S_t) + f_t(t, S_t)}{f(t, S_t)}, \quad \sigma_f = \frac{\sigma(t, S_t) f_s(t, S_t)}{f(t, S_t)}$$

ja

$$\mu_g = \frac{(\mathcal{A}g)(t, S_t) + g_t(t, S_t)}{g(t, S_t)}, \quad \sigma_g = \frac{\sigma(t, S_t) g_s(t, S_t)}{g(t, S_t)}.$$

Sieventämällä omarahoitteisen salkun dynamiikkaa saadaan

$$dV_t = (a_t \mu_f f(t, S_t) + b_t \mu_g g(t, S_t))\, dt + (a_t \sigma_f f(t, S_t) + b_t \sigma_g g(t, S_t))dW_t,$$

mistä seuraa, että salkku saadaan riskittömäksi asettamalla $a_t \sigma_f f(t, S_t) = -b_t \sigma_g g(t, S_t)$. Tällöin omarahoitteisen ja riskittömän salkun arvo on

$$V_t = b_t g(t, S_t) \left(1 - \frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right)$$

ja sen dynamiikkaa kuvaava stokastinen differentiaaliyhtälö tulee muotoon

$$dV_t = b_t g(t, S_t) \left(\mu_g - \mu_f \frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right) dt.$$

Arbitraasivapauden nojalla on kuitenkin oltava voimassa ehto $dV_t = rV_t dt$. Näin ollen

$$\mu_g - \mu_f \frac{\sigma_g}{\sigma_f} = r \left(1 - \frac{\sigma_g}{\sigma_f}\right),$$

joka voidaan esittää myös ekvivalentissa muodossa

$$\frac{\mu_f - r}{\sigma_f} = \frac{\mu_g - r}{\sigma_g}. \tag{38}$$

Ts. arbitraasivapauden ja riskittömyyden kanssa konsistenttien johdannaisten hintojen $f(t, S_t)$ ja $g(t, S_t)$ tulee toteuttaa ehto (38). Kuten ehdosta (38) voidaan huomata, ei yhtälön vasemmalla puolella oleva osamäärä riipu hinnasta $g(t, S_t)$ eikä oikealla oleva yhtälö riipu hinnasta $f(t, S_t)$. Täten on oltava voimassa, että on olemassa johdannaisten hinnoista riippumaton kuvaus $\lambda : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$, joka riippuu pelkästään arvopaperin hinnasta S_t sekä kalenteriajasta t siten, että (APT-lauseen ääretönulotteinen muoto)

$$\frac{\mu_f - r}{\sigma_f} = \lambda(t, S_t). \tag{39}$$

Tämä muuttuja tunnetaan ns. *riskin markkinahintana ja se on kaikille arvopaperin hintaprosessiin S_t sidotuille johdannaisille sama.* Erityisesti siis huomataan, että arbitraasivapauden vallitessa mielivaltaisen johdannaisen hintaprosessille pätee

$$df(t, S_t) = (r + \sigma_f \mu_f \lambda(t, S_t))f(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)f_s(t, S_t)d\tilde{W}_t,$$

missä $\tilde{W}_t$ on ekvivalentin martingaalimitan alaisuudessa määritelty Wiener-prosessi. On tässä vaiheessa syytä mainita, että riskin markkinahinta $\lambda(t, s)$ on kuvaus, jolla hinnoittelun perustana olevaa arbitraasivapauden kanssa konsistenttia mittaa voidaan kalibroida tarkasteltavan ongelman ratkaisun helpottamiseksi.

4.5.1 Numeräärin vaihto

Tarkastellaan nyt puolestaan toista erittäin mielenkiintoista (ja melko modernia) lähestymistapaa, joka tunnetaan yleisesti numeräärin vaihtona (*change of numeraire*). Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat ja tarkastellaan kahden eri johdannaisen suhteellista hintaa

$$R_t = \frac{f(t, S_t)}{g(t, S_t)}.$$

Tällöin Itôn lauseen nojalla saadaan

$$dR_t = (\lambda(t, S_t) - \sigma_g)(\sigma_f - \sigma_g)R_t dt + (\sigma_f - \sigma_g)R_t d\tilde{W}_t.$$

Valitsemalla riskin markkinahinnaksi siis $\lambda(t, S_t) = \sigma_g$ saadaan

$$dR_t = (\sigma_f - \sigma_g)R_t d\tilde{W}_t,$$

josta puolestaan seuraa, että

$$R_T = R_t + \int_t^T (\sigma_f - \sigma_g)R_s d\tilde{W}_s.$$

Ts. suhteellinen hintaprosessi R_t on martingaali, kun riskin markkinahinnaksi valitaan numeräärin volatiliteetti. Erityisesti siis huomataan, että

$$E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\frac{f(T, S_T)}{g(T, S_T)}\right] = \frac{f(t, s)}{g(t, s)},$$

mistä puolestaan seuraa, että

$$f(t, s) = g(t, s)E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\frac{f(T, S_T)}{g(T, S_T)}\right].$$

Jos edellä tarkasteltujen johdannaisten perustana olevat vaateet ovat muotoa $\Pi(s)$ ja $\Psi(s)$ saadaan replikointiehdon nojalla tulokseksi

$$f(t, s) = g(t, s)E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\frac{\Pi(S_T)}{\Psi(S_T)}\right].$$

Riskin markkinahinnan kalibrointisovellutukset ovat erittäin mielenkiintoisia, ja niitä voidaankin tehokkaasti soveltaa myös lukuisissa muissa hinnoitteluongelmissa. Tämän menetelmän toinen varsin moderni sovellus, *joka ottaa huomioon korkotasoepävarmuuden*, on käyttää hinnoittelussa numeräärinä nollakuponkilainojen hintoja. Täsmällisemmin ilmaistuna, annettuun satunnaiseen korkokantaan sidottu nollakuponkilaina on sopimus, joka takaa haltijalleen 1 yksikön tarkasteltavana olevaa valuuttaa sopimuksen umpeutumishetkellä (maturiteetissa). Nollakuponkilainan hinnalle $p(t, T)$ pätee siis ehto $p(T, T) = 1$. Tällöin edellä johtamamme tuloksen mukaan

$$f(t, s) = p(t, T)E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\frac{f(T, S_T)}{p(T, T)}\right] = p(t, T)E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\Pi(S_T)\right].$$

On syytä painottaa, että numeräärin vaihdossa on pohjimmiltaan kysymys siitä, että arvottamisen laskentaperustetta muutetaan. Ts. pyritään esittämään sopimuksen hinta muiden sopimusten (esimerkiksi johdannaisten) hintojen avulla. Toinen tapa, jolla kyseistä menetelmää voidaan myös havainnollistaa, on seuraavanlainen. Oletetaan nyt sekä markkinoiden arbitraasivapaus että riskineutraalin mitan olemassaolo ja tarkastellaan sopimusten $\chi_1 = \Pi(S_T)$ ja $\chi_2 = \Lambda(S_T)$ arbitraasivapaita hintoja

$$F^T(t,s) = E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T)\right]$$

ja

$$G^T(t,s) = E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}\Lambda(S_T)\right],$$

missä hinnoittelun perustana oleva prosessi S_t määräytyy sdy:stä

$$dS_\tau = rS_\tau d\tau + \sigma S_\tau d\bar{W}_\tau, \quad \tau \geq t, \quad S_t = s,$$

missä $\bar{W}_T$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi. Itôn lauseen nojalla johdannaisen $\chi_2 = \Lambda(S_T)$ hinnalle $G^T(t,s)$ pätee

$$dG^T(\tau, S_\tau) = rG^T(\tau, S_\tau)d\tau + \sigma(\tau, S_\tau)G^T_S(\tau, S_\tau)d\bar{W}_\tau,$$

jolloin soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $s \mapsto \ln s$ saadaan tulokseksi

$$\Lambda(S_T) = G(T, S_T) = G(t,s)e^{r(T-t)}M_T \Rightarrow e^{-r(T-t)}\Lambda(S_T) = G(t,s)M_T,$$

missä

$$M_T = \exp\left(\int_t^T \sigma(y,S_y)\frac{G_s(y,S_y)}{G(y,S_y)}d\bar{W}_y - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(y,S_y)\frac{G_s^2(y,S_y)}{G^2(y,S_y)}dy\right)$$

on positiivinen eksponentiaalinen martingaali, aina kun Novikovin ehto täyttyy. Jos kyseinen ehto täyttyy ja $\Lambda(s) > 0$, niin silloin nähdään, että johdannaisen $\chi_1 = \Pi(S_T)$ hinnalle pätee

$$F^T(t,s) = E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[e^{-r(T-t)}\Lambda(S_T)\frac{\Pi(S_T)}{\Lambda(S_T)}\right] = G^T(t,s)E^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}\left[\frac{\Pi(S_T)}{\Lambda(S_T)}M_T\right] = G^T(t,s)E^{\mathbb{M}}_{(t,s)}\left[\frac{\Pi(S_T)}{\Lambda(S_T)}\right],$$

missä hinnoittelun perustana oleva prosessi S_t määräytyy mitan $\mathbb{M}$ alaisuudessa sdy:stä

$$dS_\tau = \left(rS_\tau + \sigma^2(\tau,S_\tau)\frac{G^T_s(\tau,S_\tau)}{G^T(\tau,S_\tau)}\right)d\tau + \sigma(\tau,S_\tau)d\tilde{W}_\tau,$$

missä $\tilde{W}_\tau$ on $\mathbb{M}$-Wiener-prosessi.

Esimerkki: (*Eurooppalainen vaihto-optio)* Numeräärin vaihdon tehokkuuden havainnollistamiseksi tarkastellaan Eurooppalaista vaihto-optiota. Kyseinen sopimus antaa haltijalleen oikeuden (mutta ei siis velvoita) maturiteetissa vaihtaa osake toiseen osakkeeseen, jolloin sopimuksen palkkio on siis muotoa $\Phi(s_1,s_2) = (s_1 - s_2)^+$. Oletetaan, että kyseessä olevien arvopapereiden arvot määräytyvät riskineutraalin dynamiikan alaisuudessa stokastisista differentiaaliyhtälöistä

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t), \\ dS_2(t) &= rS_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2(t), \end{aligned}$$

missä $W_1(t)$ ja $W_2(t)$ ovat toisistaan tilastollisesti riippuvia Wiener-prosesseja, joiden differenssien tulolle pätee ehto $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$, missä $\rho \in [-1,1]$ on tunnettu korrelaatiokerroin. Tehtävänä on tällöin määrittää arvo

$$E(t,s_1,s_2) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s_1,s_2)}\left[e^{-r(T-t)}(S_1(T) - S_2(T))^+\right] = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s_1,s_2)}\left[e^{-r(T-t)}S_2(T)\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1\right)^+\right].$$

Koska $e^{-r(T-t)}S_2(T) = s_2 M_2(T)$, missä

$$M_2(T) = e^{\sigma_2(W_2(T)-W_2(t)) - \sigma^2(T-t)/2},$$

on positiivinen eksponentiaalinen martingaali ja osamääräprosessille $Y(t) = S_1(t)/S_2(t)$ pätee ehto

$$dY(t) = (\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho)Y(t)dt + \sigma_1 Y(t)dW_1(t) - \sigma_2 Y(t)dW_2(t),$$

huomataan, että vaihto-option hinta voidaan esittää myös muodossa

$$E(t, s_1, s_2) = s_2 \mathbf{E}^{\mathbb{M}}_{(t,y)} \left[(Y(T) - 1)^+ \right],$$

missä prosessi $Y(t)$ määräytyy mitan $\mathbb{M}$ alaisuudessa sdy:stä

$$dY(\tau) = \sigma Y(\tau) d\tilde{W}(\tau), \quad Y(t) = s_1/s_2,$$

missä $\tilde{W}(t)$ on $\mathbb{M}$-Wiener-prosessi ja $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}$. Kuten osto-optionkin tapauksessa, havaitaan, että

$$E(t, s_1, s_2) = s_1 \Phi(\tilde{d}_1 + \sigma\sqrt{T-t}) - s_2 \Phi(\tilde{d}_1),$$

missä

$$\tilde{d}_1 = \frac{(\ln(s_1/s_2) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4.6 Hintojen herkkyysparametrit (ns. kreikkalaiset)

Tarkastellaan nyt mielivaltaisen yksinkertaisen vaateen hintaa

$$P(t, s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s)}[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T)],$$

kun arvottamisen perustana olevan arvopaperin hintaprosessi on riskineutraalin mitan alaisuudessa muotoa

$$dS_\tau = rS_\tau d\tau + \sigma S_\tau dW_\tau, \quad \tau \geq t, \quad S_t = s.$$

Kuten olemme jo aiemmin osoittaneet, voidaan tämä hinta esittää myös muodossa

$$P(t, s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \Pi \left(s e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \right) \right].$$

Annettuna tämä esitys määritellään seuraavat hinnan $P(t, s)$ komparatiivis-staattisia ominaisuuksia kuvaavat parametrit (tunnetaan ns. kreikkalaisina "the greeks"):

Hinnan delta	$\Delta = \frac{\partial P}{\partial s}(t, s)$
Hinnan gamma	$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(t, s)$
Hinnan korkoherkkyys rho	$\rho = \frac{\partial P}{\partial r}(t, s)$
Hinnan aikaherkkyys theta	$\Theta = \frac{\partial P}{\partial t}(t, s)$
Hinnan riskiherkkyys vega	$\mathcal{V} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}(t, s)$.

Nyt voimme osoittaa seuraavat tulokset

Väite 4.5. *(A) Jos $\Pi(s)$ on vähenevä, niin myös $P(t, s)$ on vähenevä nykyhinnan s suhteen ja siten $\Delta \leq 0$.*
(B) Jos $\Pi(s)$ on kasvava, niin myös $P(t, s)$ on kasvava nykyhinnan s suhteen ja siten $\Delta \geq 0$.
(C) Jos $\Pi(s)$ on konveksi, niin $P(t, s)$ on konveksi nykyhinnan s suhteen ja kasvava volatiliteetin σ funktiona. Ts. jos $\Pi(s)$ on konveksi, niin $\Gamma \geq 0$ ja $\mathcal{V} \geq 0$.
(D) Jos $\Pi(s)$ on konkaavi, niin $P(t, s)$ on konkaavi nykyhinnan s suhteen ja vähenevä volatiliteetin σ funktiona. Ts. jos $\Pi(s)$ on konkaavi, niin $\Gamma \leq 0$ ja $\mathcal{V} \leq 0$.

Erityisesti johdannaisten käypien arvojen volatiliteettiherkkyys (eli johdannaisen $\mathcal{V}$) on viime vuosina ollut intensiivisen tutkimuksen kohteena johtuen sen keskeisestä asemasta johdannaisportfolioiden riskienhallintaongelmissa. Kiinnostuneen lukijan kannattaa tutustua esimerkiksi lähteisiin Bergman, Grundy and Wiener, 1996, Hobson 1998, El Karoui, Jeanblanc-Picqué and Shreve 1998 ja Alvarez 2003b.

4.6.1 Salkun immunisointi

Tarkastellaan arvopaperisalkkua, jonka arbitraasivapaa hinta on $P(t, s)$. Oletetaan lisäksi, että markkinoilla käydään myös kauppaa johdannaisella, jonka arbitraasivapaa hinta on $F(t, s)$. Lisätään arvopaperisalkkuun nyt määrä x johdannaista. Tällöin näin aikaansaadun salkun hinta on

$$V(t, s) = P(t, s) + xF(t, s).$$

Derivoinnilla saadaan, että

$$V_s(t,s) = P_s(t,s) + xF_s(t,s).$$

Näin ollen, mikäli sijoittaja haluaa konstruoida salkun, joka on suojattu pieniltä nykyhinnan s muutoksilta, saadaan

$$P_s(t,s) + xF_s(t,s) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\Delta_P}{\Delta_F}.$$

Tällaista immunisointialgoritmia kutsutaan salkun *delta-suojaukseksi.*

On selvää, että delta-suojauksen teho riippuu pitkälti siitä, kuinka voimakkaasti arvopaperisalkun herkkyys hintamuunnoksien suhteen muuttuu hinnan muuttuessa (ts. salkun gamman suuruudesta). Oletetaan, että haluamme suojata nykyisen positiomme sekä pieniltä nykyhinnan muutoksilta että hintaherkkyyden muutoksilta. Kuten aiemmin, liitetään salkkuun kahta eri johdannaista siten, että niiden osuudet x_F ja x_G valitaan immunisointirajoitteen puitteissa. Tämän salkun hinnaksi muodostuu

$$V(t,s) = P(t,s) + x_G G(t,s) + x_F F(t,s).$$

Asettamalla nyt derivaatat $V_s(t,s) = 0$ ja $V_{ss}(t,s) = 0$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \Delta_G & \Delta_F \\ \Gamma_G & \Gamma_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_P \\ -\Gamma_P \end{bmatrix}.$$

Jos $\Delta_G \Gamma_F \neq \Delta_F \Gamma_G$, niin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\Delta_F \Gamma_P - \Gamma_F \Delta_P}{\Delta_G \Gamma_F - \Delta_F \Gamma_G} \\ x_F &= \frac{\Gamma_G \Delta_P - \Gamma_P \Delta_G}{\Delta_G \Gamma_F - \Delta_F \Gamma_G}. \end{aligned}$$

Esimerkki: Lisätään $P(t,s)$-hintaiseen salkkuun osuus x_F johdannaista, jonka hinta on $F(t,s)$, sekä osuus x_G osaketta, jonka hinta on riskineutraalin hinnoittelun ansiosta s. Asetetaan tavoitteeksi sekä delta- että gammasuojattu sijoitus. Tällöin siis on oltava voimassa

$$\begin{aligned} \Delta_P + x_F \Delta_F + x_G &= 0 \\ \Gamma_P + x_F \Gamma_F &= 0, \end{aligned}$$

mistä seuraa suoraan, että

$$x_F = -\frac{\Gamma_P}{\Gamma_F} \quad \text{ja} \quad x_G = \Delta_F \frac{\Gamma_P}{\Gamma_F} - \Delta_P.$$

4.7 Lyhyesti kassavirtasopimuksista

Monissa mielenkiintoisissa sopimuksissa hinnoiteltava sopimus sisältää kassavirtakomponentteja (esim. kuponkilainat) siten, ettei edellä johtamamme lähestymistapa enää sellaisenaan toimi vaan hinnoitteluyhtälöä on muutettava siten, että kassavirran sisältämä "historia"saadaan sisällytettyä hintaan. Tarkastellaan nyt markkinoita, jotka muodostuvat kahdesta arvopaperista, joiden hintadynamiikkaa kuvaavat yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t \\ dS_t &= \alpha(t,S_t)dt + \sigma(t,S_t)dW_t. \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt ehdollistettua sopimusta, jonka lunastuspalkkio on muotoa $\Pi(S_T, Z_T)$, missä $\Pi : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ on riittävän säännöllinen kuvaus,

$$Z_t = \int_0^t g(u, S_u)du$$

ja $g : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$ on tunnettu deterministinen ja riittävän sileä kuvaus, jonka kumulatiivinen arvo Z_t on olemassa. Kuten aikaisemmin, oletetaan, että ehdollistetun sopimuksen hinta $F(t,s,z)$ mielivaltaisena kalenteripäivänä $t \in [0,T]$ voidaan ilmaista kalenteripäivän sekä sen hetken vallitsevien arvojen kanssa. Kootaan nyt omarahoitteinen salkku osakkeesta ja ehdollisesta sopimuksesta. Salkun arvoprosessi on tällöin

$$V_t = a_t S_t + b_t F(t, S_t, Z_t).$$

Omarahoitteisuusehdosta seuraa, että

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dF(t, S_t, Z_t) = [a_t \alpha(t, S_t) + b_t \mu_t^F]dt + \sigma(t, S_t)[a_t + b_t F_s(t, S_t, Z_t)]dW_t,$$

missä

$$\mu_t^F = \frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t)F_{ss}(t, S_t, Z_t) + \alpha(t, S_t)F_s(t, S_t, Z_t) + F_t(t, S_t, Z_t) + F_z(t, S_t, Z_t)g(t, S_t).$$

Asettamalla salkku riskittömäksi saadaan

$$a_t = -b_t F_s(t, S_t, Z_t),$$

josta puolestaan seuraa, että $V_t = b_t[F(t, S_t, Z_t) - S_t F_s(t, S_t, Z_t)]$ ja

$$dV_t = b_t[\mu_t^F - \alpha(t, S_t)F_s(t, S_t, Z_t)]dt = b_t \left[\frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t)F_{ss}(t, S_t, Z_t) + F_t(t, S_t, Z_t) + F_z(t, S_t, Z_t)g(t, S_t)\right] dt.$$

Koska arvopaperisalkku on kuitenkin riskitön, tulee sen arbitraasivapauden nojalla toteuttaa ehto $dV_t = rV_t dt$. Tästä puolestaan seuraa

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t, S_t)F_{ss}(t, S_t, Z_t) + F_t(t, S_t, Z_t) + F_z(t, S_t, Z_t)g(t, S_t) = rF(t, S_t, Z_t) - rS_t F_s(t, S_t, Z_t).$$

Yhdistämällä tämä tulos replikointiehtoon $F(T, s, z) = \Pi(s, z)$ sadaan, että arbitraasivapaa hinta määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned} F_t(t, s, z) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, s)F_{ss}(t, s, z) + F_z(t, s, z)g(t, s) + rsF_s(t, s, z) - rF(t, s, z) &= 0 \\ F(T, s, z) &= \Pi(s, z). \end{aligned}$$

Feynman-Kačin lauseen nojalla tiedetään, että

$$F(t, s, z) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,s,z)} \left[e^{-r(T-t)}\Pi(S_T, Z_T)\right],$$

missä prosessien riskineutraali dynamiikka määräytyy yhtälöistä

$$\begin{aligned} dS_y &= rS_y dy + \sigma(y, S_y)dW_y, S_t = s \\ dZ_y &= g(y, S_y)dy, Z_t = z. \end{aligned}$$

4.8 Maksimaalinen logaritminen kasvu

Vaikka olemmekin tässä kappaleessa käsitelleet omarahoitteisia sijoitusportfolioita emme ole suoraan vielä liittäneet kappaleen analyysia Markowitzilaiseen portfolioteoriaan. Niin hämmästyttävältä kuin tämä saattaakin tuntua, on Black-Scholes -mallin mukaiset hinnoittelutulokset johdettavissa soveltamalla tavanomaista portfolion valintaongelmaa. Havainnollistaaksemme tätä argumenttia oletetaan, että arvottamisen perustana olevat muuttujat määräytyvät stokastisista differentiaaliyhtälöistä muotoa:

$$\begin{aligned} dB_t &= r_f B_t dt \\ dX_i(t) &= \mu_i X_i(t)dt + \sigma_i X_i(t)dW_i(t), i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

missä $dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{ij}dt$, $\rho_{ij} \in [-1, 1]$. Muodostamalla vakioportfolio $\alpha^T = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ saadaan generoitua arvoprosessi

$$V_t = \alpha_0 B_t + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j(t).$$

Itôn lauseen nojalla saadaan tulokseksi

$$dV_t = r_f \alpha_0 B_t dt + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j(t)(\mu_j dt + \sigma_j dW_j(t)),$$

mistä puolestaan arvolla V_t puolittain jakamalla seuraa

$$\frac{dV_t}{V_t} = r_f\theta_0 dt + \sum_{j=1}^{n} \theta_j(\mu_j dt + \sigma_j dW_j(t)),$$

missä suhteellisille painoille $\theta_0 = \alpha_0 B_t/V_t$ ja $\theta_j = \alpha_j X_j(t)/V_t$, $j = 1, \ldots, n$, pätee luonnollisesti ehto $\sum_{j=0}^{n} \theta_j = 1$. Soveltamalla nyt Itôn lausetta kuvaukseen $v \mapsto \ln v$ saadaan tulokseksi, että

$$d\ln V_t = \left(r_f + \theta^T(\mu - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}\theta^T\sigma\theta\right)dt + \sum_{j=1}^{n}\theta_j\sigma_j dW_j(t),$$

missä $\mu^T = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mathbf{1}^T = (1, \ldots, 1)$, $\theta^T = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ ja $\sigma = \{\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\}_{n\times n}$. Annettuna tämä esitys kysytään seuraavaa:

> "*Onko suhteellinen sijoitusportfolio valittavissa siten, että sen arvoprosessin odotettu logaritminen kasvuvauhti on maksimaalinen?*"

Nyt on selvää, että suhteellisen sijoitusstrategian θ generoiman arvon odotettu logaritminen kasvuvauhti on muotoa

$$\mathbf{E}[\ln(V_t/V_0)] = \left(r_f + \theta^T(\mu - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}\theta^T\sigma\theta\right)t.$$

Tarkastellaan kuvausta $G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ muotoa

$$G(\theta) = r_f + \theta^T(\mu - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}\theta^T\sigma\theta.$$

Kovarianssimatriisin positiividefiniittisyydestä seuraa, että kuvaus $G(\theta)$ on aidosti konkaavi. Näin ollen, mikäli gradientin nollakohta löytyy, on se kuvauksen $G(\theta)$ yksikäsitteisesti määrätty globaali maksimi. Ensimmäisen kertaluvun välttämättömät ehdot optimille ovat muotoa

$$\sigma\theta^* = \mu - r_f\mathbf{1},$$

mistä suoraan seuraa, että

$$\theta^* = \sigma^{-1}\mu - r_f\sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

Optimaalinen arvodynamiikka on siis muotoa

$$d\ln V_t^* = \left(r_f + \frac{1}{2}\left(\mu^T\sigma^{-1}\mu - 2r_f\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mu + r_f^2\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mathbf{1}\right)\right)dt + \sum_{j=1}^{n}\theta_j^*\sigma_j dW_j(t).$$

Esimerkki: Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}
dB_t &= 0.05B_t dt \\
dX_1(t) &= 0.25X_1(t)dt + 0.2X_1(t)dW_1(t) \\
dX_2(t) &= 0.35X_2(t)dt + 0.4X_2(t)dW_2(t) \\
dX_3(t) &= 0.5X_3(t)dt + 0.5X_3(t)dW_3(t),
\end{aligned}$$

missä ajavien Wiener-prosessien (eli faktorien) korrelaatiostruktuuri on muotoa

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.25 \\ 0.1 & 1 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kovarianssimatriisin σ määritelmästä seuraa, että

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.008 & 0.025 \\ 0.008 & 0.16 & -0.05 \\ 0.025 & -0.05 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Tällöin siis

$$\theta^* = \sigma^{-1}(\mu - r_f\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 3.33211 \\ 2.31122 \\ 1.92903 \end{bmatrix}.$$

Tämän sijoitusstrategian generoima maksimaalinen kasvuvauhti on

$$r_f + \frac{1}{2}\left(\mu^T\sigma^{-1}\mu - 2r_f\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mu + r_f^2\mathbf{1}^T\sigma^{-1}\mathbf{1}\right) = 116.39\%.$$

Tällöin optimaaliset faktorilataukset ovat $(\theta_1^*\sigma_1, \theta_2^*\sigma_2, \theta_3^*\sigma_3) = (0.666, 0.924, 0.965)$.

4.9 Miten tämä kaikki liittyy Black-Scholes -malliin?

Sisätuloavaruuksien lineaaristen rakenteiden nojalla johdetut portfoliostrategiat ovat hyvin voimakkaita siitä huolimatta, että ne nojaavat useasti hyvin alkeellisiltakin tuntuviin valintakriteereihin. Tämän takia on syytä painottaa, että myös Black-Scholes -mallin mukaiset hinnoittelukaavat saadaan sisätuloavaruustekniikoiden (eli siis klassisen portfolioteorian) erikoistapauksina, jotka seuraavat enemmän tai vähemmän suoraan $\mathcal{L}^2$-avaruuksien ominaisuuksista. Jottei tämä jäisi epäselväksi, tarkastellaan vakioportfoliota $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ja sen generoimaa arvoprosessia

$$V_t = \alpha_0 B_t + \alpha_1 X_t + \alpha_2 F(t, X_t),$$

missä kuvaus $F : [0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oletetaan riittävän sileäksi. Itôn lauseen nojalla saadaan

$$dV_t = r_f\alpha_0 B_t dt + \alpha_1 X_t(\mu dt + \sigma dW_t) + \alpha_2 F(t, X_t)(\mu_F(t, X_t)dt + \sigma_F(t, X_t)dW_t)$$

jolloin jakamalla tämä yhtälö puolittain arvolla V_t saadaan

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r_f + \theta_1(\mu - r_f) + \theta_2(\mu_F(t, X_t) - r_f))\,dt + (\theta_1\sigma + \theta_2\sigma_F(t, X_t))\,dW_t,$$

missä $\mu_F(t,x) = ((\mathcal{A}F)(t,x) + F_t(t,x))/F(t,x)$ ja $\sigma_F(t,x) = \sigma x F_x(t,x)/F(t,x)$. Soveltamalla nyt Itôn lausetta kuvaukseen $v \mapsto \ln v$ saadaan

$$\begin{aligned} d\ln V_t &= \left(r_f + \theta_1(\mu - r_f) + \theta_2(\mu_F(t, X_t) - r_f) - \frac{1}{2}\left(\theta_1\sigma + \theta_2\sigma_F(t, X_t)\right)^2\right) dt \\ &+ \left(\theta_1\sigma + \theta_2\sigma_F(t, X_t)\right) dW_t. \end{aligned}$$

Annettuna tämä esitys, kysytään edellisen kappaleen tavalla seuraavaa:

> "*Onko suhteellinen sijoitusportfolio valittavissa siten, että sen arvoprosessin odotettu logaritminen kasvuvauhti on maksimaalinen?*"

Aivan kuten edellä huomataan, että salkku on olemassa ja se määräytyy ensimmäisen kertaluvun optimaalisuusehdoista

$$\begin{aligned} \mu - r_f &= (\theta_1\sigma + \theta_2\sigma_F(t,x))\,\sigma \\ \mu_F(t,x) - r_f &= (\theta_1\sigma + \theta_2\sigma_F(t,x))\,\sigma_F(t,x). \end{aligned}$$

Jakamalla nämä ehdot puolittain saadaan ehto

$$\frac{(\mu - r_f)F(t,x)}{(\mathcal{A}F)(t,x) + F_t(t,x) - r_f F(t,x)} = \frac{\mu - r_f}{\mu_F(t,x) - r_f} = \frac{\sigma}{\sigma_F(t,x)} = \frac{F(t,x)}{xF_x(t,x)}$$

josta puolestaan sieventämällä saadaan tuttu Black-Scholesin hinnoitteluyhtälö

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx}(t,x) + r_f x F_x(t,x) - r_f F(t,x) + F_t(t,x) = 0.$$

Olemme siis havainneet, että Black-Scholes -hinnoittelu on perusteltavissa myös logaritmisen kasvuvauhdin maksimoivan portfoliostrategian kautta. On kuitenkin syytä huomata, ettei tämä $\mathcal{L}^2$-lähestymistapa edellytä arbitraasivapautta tai muuta markkinarakennetta ja on siten siis hyvin yleinen hinnoittelu- sekä arvottamisperiaate. Lisäksi se voidaan aina perustella olettamalla päättäjän hyötykuvauksen olevan loga- ritminen.

5 Korkojen aikarakennemallit

As a matter of fact, what investment can we find which offers real fixity or certainty income? ..., the man or woman who invests in bonds is speculating in the general level of prices, or the purchasing power of money. IRVING FISHER

5.1 Deterministiset korkorakennemallit

Korkomalleja tarvitaan kolmeen päätarkoitukseen. Ensinnäkin *hinnoitteluun ja suojaukseen.* Tällöin ollaan vähemmän kiinnostuneita historiallisista hinnoista ja keskitytään instrumenttien kyseisen hetken hinnan mahdollisimman tarkkaan määritykseen. Toiseksi *riskien hallintaan,* jolloin historiallisiin parametrinarvoihin perustuvilla malleilla simuloidaan markkinoiden käyttäytymistä. Kolmanneksi *korkomuutosten selittämisellä* pyritään taloudellisten ilmiöiden korkoriippuvuuden parempaan ymmärtämiseen.

Korkojen mallinnus käytännössä on monimutkainen ja vaativa tehtävä. Hintojen määrittäminen teoreettisen mallin avulla vaatii syvällisiä teoreettisia ja numeerisia taitoja. Parametrien estimointi ei yleensä onnistu yksinkertaisilla menetelmillä, vaan tarvitaan kehittyneitä tilastollisia tekniikoita.

Tarkoituksena on tässä kappaleessa tarkastella korkojen aikarakennemalleja epävarmuuden vallitessa. Tämän tavoitteen saavuttamiseksi tarkastellaan ensiksi deterministisiä korkorakennemalleja ja niiden keskinäisiä riippuvuuksia.

5.1.1 Korkokäsitteitä

Spot-korolla tarkoitetaan sitä korkoa, jonka sijoittaja vaatii sijoitetulle pääomalle *sitoessaan* sen tällä hetkelllä (hetkellä nolla) tietyksi ajaksi. Käytämme n:n vuoden spot-korosta merkintää s_n ja määritelmällisesti siis n-vuotisen spot-tilin pääoma kasvaa $(1+s_n)^n$-kertaiseksi sopimuksen aikana. Yleensä spot-korot ilmaistaan niiden aikasarjamuodossa $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

Termiinikoroilla tarkoitetaan niitä korkoja, jotka lankeavat sijoitetulle pääomalle kiinteän mahdollisesti tulevan aikavälin yli tehdyille sijoituksille. Täsmällisemmin ilmaistuna, termiinikorko $f_{k,n}$ voidaan tulkita siksi koroksi, joka lankeaa hetkellä k talletetulle pääomalle sijoitustilillä, jonka kesto on $n-k$ vuotta (ja siten siis umpeutuu vuonna n). Määritelmällisesti havaitaan heti, että nykyhetkellä tehdyille kiinteäkestoisille sijoituksille $s_n = f_{0,n}$. Tämän havainnon yleistämiseksi tarkastellaan nyt kahta vaihtoehtoista strategiaa:

A Sijoitetaan pääoma K välittömästi n vuodeksi tilille, jonka korko vastaa n:n vuoden spot-korkoa s_n.

B Sijoitetaan pääoma K välittömästi k vuodeksi tilille, jonka korko vastaa k:n vuoden spot-korkoa s_k, ja jäljelle jääviksi $n-k$ vuodeksi termiinitilille, jossa sijoitetulle pääomalle lankeaa korko joka vastaa termiinikorkoa $f_{k,n}$.

Jos termiini- ja spot-korkojen aikarakenteet ovat keskenään konsistentteja, niin välittömästi huomataan, että molempien sijoitusstrategioiden tuottojen tulisi olla yhtä suuret (muussa tapauksessa sijoittaja voisi lainata rahaa matalampituottoisesta vaihtoehdosta ja sijoittaa se välittömästi korkeampituottoiseen $\Rightarrow$ arbitraasi). Tällöin kaikille $n > k$ pätee ehto

$$K(1+s_n)^n = K(1+s_k)^k (1+f_{k,n})^{n-k},$$

josta puolestaan seuraa keskeinen spot-korkojen ja termiinikorkojen välistä suhdetta kuvaava relaatio:

$$(1+f_{k,n})^{n-k} = \frac{(1+s_n)^n}{(1+s_k)^k}, \quad 0 < k < n. \tag{40}$$

Yhtälöstä (40) seuraa suoraan identiteetti

$$(1+f_{k,n})^{n-k}(1+f_{j,k})^{k-j} = (1+f_{j,n})^{n-j}, \quad 0 < j < k < n,$$

jonka mukaan pitkän termiinisopimuksen tuoton täytyy olla yhtä suuri kuin sen ajan suhteen ositettujen sopimusten kumulatiivinen tuotto.

Termiinikorkojen erittäin tärkeä erikoistapaus on ns. *lyhyt korko* $r_k = f_{k,k+1}$, joka mittaa yhden periodin mittaiselle sopimukselle lankeavaa tuottoa. Spot-korkojen sekä termiinikorkojen määritelmän nojalla on nyt selvää, että lyhyelle korolle r_k sekä spot-koroille pätee ehto

$$(1+s_n)^n = \prod_{k=0}^{n-1}(1+r_k), \quad n \geq 1.$$

Lisäksi huomataan, että lyhyelle korolle r_k sekä termiinikoroille $f_{k,n}$ pätee ehto

$$(1+f_{k,n})^{n-k} = \prod_{j=k}^{n-1}(1+r_j), \quad n \geq k.$$

5.1.2 Diskonttaustekijät ja 0-kuponkilainat

Tarkastellaan seuraavaa kysymystä: Kuinka paljon n-vuotiselle spot-tilille tulisi sijoittaa nyt, jotta tilin pääoma olisi n:n vuoden kuluttua 1 euro? Merkitään tätä pääomaa merkinnällä P_n. Tällöin spot-koron määritelmän nojalla huomataan, että vaadittu ehto toteutuu, mikäli $P_n(1+s_n)^n = 1$ eli mikäli

$$P_n = \frac{1}{(1+s_n)^n}. \tag{41}$$

Tämä suure tunnetaan maturiteetin n omaavan *0-kuponkilainan* (ns. *n-bondin*) hintana. Koska P_n liittyy myös kiinteästi diskonttaukseen, kutsutaan sitä myös maturiteetin n omaavan diskonttobondin hinnaksi. Näiden hintojen generoiman aikarakenne on erittäin keskeinen korkorakenteen määrittäjä, sillä bondit ovat käytännöllisesti katsoen kaikkien korkoinstrumenttien perusta. Nyt on selvää, että mikäli n-bondien aikarakenne on tunnettu (ts. mikäli havaitsemme markkinoilla hinnat $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$) niin silloin yhtälöistä (40) ja (41) seuraa, että

$$(1+f_{k,n})^{n-k} = \frac{P_k}{P_n} \Rightarrow f_{k,n} = \left(\frac{P_k}{P_n}\right)^{1/(n-k)} - 1, \quad 0 < k < n, \tag{42}$$

jonka mukaan aikavälin $[k,n]$ yli ulottuvan termiinitilin tuotto on esitettävissä bondien hintojen osamääränä. Lisäksi huomataan, että $s_n = P_n^{-1/n} - 1$ ja $r_k = P_k/P_{k+1} - 1$.

Tarkastellaan nyt vaihtoehtoisesti seuraavaa kysymystä: Kuinka paljon aikavälin $[k,n]$ yli ulottuvalle termiinitilille tulisi sijoittaa hetkellä k, jotta tilin pääoma olisi maturiteetissaan n 1 euro? Merkitään tätä pääomaa nyt merkinnällä $d_{k,n}$. Tällöin termiinikorkojen määritelmän nojalla huomataan, että vaadittu ehto toteutuu mikäli $d_{k,n}(1+f_{k,n})^{n-k} = 1$ eli mikäli

$$d_{k,n} = \frac{1}{(1+f_{k,n})^{n-k}}. \tag{43}$$

Tämä suure tunnetaan termiinidiskonttaustekijänä ja se liittyy oleellisesti bondihintoihin, sillä yhtälöä (42) soveltamalla nähdään suoraan, että $d_{k,n} = P_n/P_k, 0 < k < n$. Erityisesti siis huomataan, että $d_{0,n} = P_n$.

5.1.3 Nykyarvoista

Tarkastellaan nyt kassavirtaa kuvaavaa aikasarjaa muotoa $X = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$. Annettuna kassavirran aikarakenne sen hetkeen 0 diskontattu arvo eli *nykyarvo* (siis nykyisissä euroissa mitattu arvo) on muotoa

$$PV_X(0) = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{(1+s_i)^i} = X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i P_i.$$

Vastaavasti huomataan, että hetkeen k diskontatun tulevan kassavirran nykyarvo (ns. juokseva nykyarvo) voidaan ilmaista muodossa

$$PV_X(k) = \sum_{i=k}^{n} X_i d_{k,i} = \sum_{i=k}^{n} X_i \frac{P_i}{P_k}, \quad k < n.$$

Tämän esityksen yksi keskeisimmistä implikaatioista on juoksevan nykyarvon rekursiivinen esitys (ns. takeneva differenssiyhtälö) muotoa

$$PV_X(k) = X_k + \frac{P_{k+1}}{P_k} PV_X(k+1), \quad PV_X(n) = X_n.$$

5.1.4 Esimerkkejä

Esimerkki 1: (*Kuponkilainat*) Korkojen aikarakennemallinnuksen sekä -sovellusten kannalta keskeinen luokka velkakirjoja ovat ns. kuponkilainat. Ne ovat kassavirta-aikasarjoja $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_n + F\}$, jotka voidaan identifioida niiden sisältämien kuponkimaksujen c_k, $k = 1, \ldots, n$, nimellisarvon F sekä maturiteetin n avulla. Jos kuponkimaksut ja nimellisarvot oletetaan vakioiksi (esim. tasaerälaina), niin kyseisen kuponkilainan hinta voidaan esittää muodossa

$$PV_X(0) = c \sum_{i=1}^{n} P_i + F P_n.$$

Esimerkki 2: (*Kassavirta-swappi*) Tarkastellaan nyt kahta vaihtoehtoista maturiteetin n omaavaa kassavirtaa $X_1 = \{0, \ldots, 0, 1\}$ (nollakuponkilaina) ja $X_2 = \{c, \ldots, c\}$ (tasaeräinen kuponkilaina). Tavoitteena on nyt määrittää se kuponkimaksu c, jolla kassavirrat ovat sijoittajalle yhtä arvokkaita. Esimerkin 1 nojalla huomataan, että tämä ehto toteutuu mikäli

$$c \sum_{i=1}^{n} P_i = P_n \Rightarrow c = \frac{P_n}{\sum_{i=1}^{n} P_i}.$$

Seuraavassa taulukossa on havainnollistettu tätä tulosta eri maturiteeteille, kun spot-korkojen aikasarjan on oletettu olevan muotoa (prosenteissa) $s = \{2.5, 3, 3.6, 4.32, 5.18, 6.22, 7.46, 8.96, 10.75, 12.90\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	1	0.4914	0.3192	0.2306	0.175	0.1356	0.1053	0.0806	0.0601	0.0428

Esimerkki 3: (*Bondioptio*) Tarkastellaan tilannetta, jossa sijoittajalla on oikeus (mutta ei velvollisuutta) k vuoden kuluttua ostaa hintaan $K \in (0, 1)$ maturiteetin n (siis $k + n$ vuoden päästä nykyisyydestä umpeutuva) omaava bondi. Tällöin huomataan, että sijoittajan palkkio hetkellä k on

$$\Pi_{k,n} = \begin{cases} d_{k,k+n} - K & \text{jos } d_{k,k+n} \geq K \\ 0 & \text{jos } d_{k,k+n} < K \end{cases} = (d_{k,k+n} - K)^+,$$

josta puolestaan nähdään, että kyseisen joustavan sopimuksen generoiman palkkion nykyarvo on

$$PV_{\Pi_{k,n}}(0) = P_k(d_{k,k+n} - K)^+ = (P_{k+n} - KP_k)^+.$$

Tämän tuloksen luonteen havainnollistamiseksi todetaan, että vallitseva bondien aikasarja eri maturiteeteille esimerkissä 2 on

$$P = \{0.9756, 0.9426, 0.8993, 0.8444, 0.7768, 0.6962, 0.6043, 0.5033, 0.39895, 0.2972\}.$$

Tällöin esimerkiksi huomataan, että $PV_{\Pi_{5,10}}(0) = (0.2972 - 0.77668K)^+$, mistä puolestaan seuraa, että sopimus on haltijalleen arvokas aina, kun lunastushinnalle K pätee ehto $K < 0.38267$.

Esimerkki 4: (*Takuutuottosopimus*) Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa sijoittaja joutuu k vuoden kuluttua valitsemaan kahden vaihtoehtoisen sopimuksen väliltä. Ensimmäinen sopimus takaa sijoittajalle välittömästi K euroa kun taas toinen puolestaan takaa sijoittajalle maturiteetin n (siis $k + n$ vuoden päästä nykyisyydestä umpeutuvan) omaavan bondin. Tällöin sijoittajan hetken k palkkio on nyt muotoa

$$\Lambda_{k,n} = \max(K, d_{k,k+n}) = K + \max(d_{k,k+n} - K, 0) = K + \Pi_{k,n},$$

missä $\Pi_{k,n}$ on määritelty kuten edellisessä esimerkissä. Tästä esityksestä puolestaan huomataan, että

$$PV_{\Lambda_{k,n}}(0) = K + (P_{k+n} - KP_k)^+.$$

5.1.5 Kuponkilainojen duraatiosta

Korkosidonnaisina instrumentteina kuponkilainat ovat luonnollisesti maturiteetistaan riippuen hyvinkin herkkiä arvottamisen perustana olevan korkorakenteen muutoksien suhteen. Jottei tämä argumentti jäisi epäselväksi, tarkastellaan nimellisarvon F ja maturiteetin N omaavaa kuponkilainaa joka takaa juoksuaikanaan haltijalleen kuponkimaksuvirran $\{c_1, \ldots, c_N\}$. Yksinkertaistamisen takia oletetaan myös, että jatkuvien spot-korkojen korkorakenne $\{s_t\}_{t\in[0,T]}$ on tunnettu. Tällöin kuponkilainan generoiman kassavirran nykyarvo on

$$PV = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{-s_k k} + F e^{-s_N N}.$$

Tämän nykyarvon korkoherkkyyden mittaamiseksi tarkastellaan nyt kuponkilainan generoiman kassavirran nykyarvoa muunnetun korkokäyrän $\{s_t + \lambda\}_{t\in[0,T]}$ suhteen, missä $\lambda \in \mathbb{R}$ on ns. *tasosiirtymä.* Tällöin nykyarvo on muotoa

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{-(s_k+\lambda)k} + F e^{-(s_N+\lambda)N}, \quad P(0) = PV.$$

Derivoinnilla saadaan

$$P'(\lambda) = -\sum_{k=1}^{N} k c_k e^{-(s_k+\lambda)k} - N F e^{-(s_N+\lambda)N},$$

jolloin huomataan, että kuponkilainan prosentuaalinen herkkyys (eli logaritminen derivaatta) korkokäyrän infinitesimaalisten muutoksien suhteen eli ns. *Fisherin ja Weil'in duraatio* on muotoa

$$D_{FW} = -\lim_{\lambda\to 0} \frac{d}{d\lambda} \ln P(\lambda) = \frac{1}{PV}\left[\sum_{k=1}^{N} k c_k e^{-s_k k} + N F e^{-s_N N}\right].$$

Tämän käsitteen yleistys diskreetin korkokäyrän tapaukseen on ns. *kvasi-modifioitu duraatio,* joka on muotoa

$$D_M = -\lim_{\lambda\to 0} \frac{d}{d\lambda} \ln P(\lambda) = \frac{1}{PV}\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{k c_k}{(1+s_k)^{k+1}} + \frac{NF}{(1+s_N)^{N+1}}\right],$$

missä

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(1+s_k+\lambda)^k} + \frac{F}{(1+s_N+\lambda)^N}, \quad P(0) = PV.$$

On syytä huomata, että duraatio on suure, joka ilmaistaan aikayksiköissä. Niinpä duraatio voidaan myös tulkita kuponkilainan keskimääräisenä tehokkaana ikänä (sen sisältämien maksujen mielessä).

Huomautus: Edellä määritellyt duraatiot näyttelevät tärkeätä roolia myös kassavirtojen nykyarvojen approksimoinnissa, sillä jos tasosiirtymä λ on pieni, niin silloin väliarvolauseen nojalla

$$P(\lambda) \approx PV + P'(0)\lambda = (1 - D\lambda)PV,$$

missä D on joko Fisherin ja Weil'in duraatio tai kvasi-modifioitu duraatio korkokäyrän rakenteesta riippuen. On kuitenkin syytä painottaa, että tämän approksimaation tarkkuus on erittäin voimakkaasti tasosiirtymän luonteesta sekä kuponkilainan maturiteetista riippuva.

Keskeisiä perusteluita korkojen aikarakenteelle

• *Odotusten teoria.* Tämän teorian mukaan termiinikorko on yhtäsuuri kuin tuleva spot-korko, joten kyseessä on siis harhaton estimaattori. Koska spot-korkojen aikarakenne on kuitenkin sellainen, että ne ovat poikkeuksetta kasvavia ajan funktioina, ovat myös termiinikorot kasvavia. Näin myös spot-korot kasvavat.

• *Likviditeettipreferenssi.* Sijoittajat preferoivat tyypillisesti lyhytkestoisia sijoituksia suhteessa pitkiin sijoituksiin. Mitä pidempi kesto, sitä pidempään pääoma on kiinnitettynä sijoitukseen ja siis sitä pidempään poissa välittömästä käytöstä.

• *Markkinoiden segmentoituminen.* Tämän teorian mukaan sijoittajat erottelevat eri velkakirjojen markkinat niiden maturiteetin mukaan. Ts. pitkillä ja lyhyillä sopimuksilla on eri markkinat, jolloin eri velkakirjojen hinnat voivat olla toisistaan riippumattomia (perustana olevan koron funktioina).

5.2 Aikarakenneyhtälö

Kuten edellisestä tarkastelusta on jo selvää, ei koroilla itsellään käydä kauppaa vaan korkomallinnuksen keskeisin tarkoitus on mallintaa ja tulkita rahan aika-arvon käyttäytymistä ja sitä kautta määrittää erilaisten velkakirjojen sekä korkoinstrumenttien arbitraasivapaita hintoja. Rahoituksen teorian (ja itse asiassa myös käytännönkin) kannalta ehdottomasti keskeisin luokka korkojohdannaisia ovat ns. *nollakuponkilainat.* Maturiteetin $T > 0$ omaava nollakuponkilaina on korkoon kirjattu sopimus, joka takaa yhden yksikön valuuttaa maturiteetissaan. Oletetaan nyt, että lyhyiden korkojen dynamiikka määräytyy sdy:stä

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \tag{44}$$

missä kuvaukset $\mu : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ja $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja Lipschitz-jatkuvia kuvauksia, jotka toteuttavat tunnetulle positiiviselle vakiolle C tavanomaisen kasvun rajoitusehdon

$$|\mu(t, r)| + |\sigma(t, r)| \leq C(1 + |r|).$$

Näiden ehtojen vallitessa sdy:llä (44) on yksikäsitteinen ratkaisu olemassa. Muodostetaan nyt omarahoitteinen salkku kahdesta eri maturiteetin $T > S > 0$ omaavasta korko- johdannaisesta ja oletetaan, että markkinat hinnoittelevat kyseiset johdannaiset pelkästään nykykorkoon, nykyaikaan sekä maturiteettiin nojaten. Tällöin salkun arvoprosessi on muotoa

$$V_t = a_t F^T(t, r_t) + b_t F^S(t, r_t),$$

missä a_t, b_t ovat salkun painot ja $F^T(t, r)$ sekä $F^S(t, r)$ ovat riittävän sileitä kuvauksia (vähintään luokassa $C^{1,2}$). Itôn lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
dF^T(t, r_t) &= (\mathcal{A}F^T)(t, r_t)dt + F_r^T(t, r_t)\sigma(t, r_t)dW_t \\
dF^S(t, r_t) &= (\mathcal{A}F^S)(t, r_t)dt + F_r^S(t, r_t)\sigma(t, r_t)dW_t,
\end{aligned}$$

missä

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mu(t, r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}$$

on tila-aika prosessiin (t, r_t) liittyvä differentiaalioperaattori. Omarahoitteisuusehdosta seuraa, että

$$dV_t = \left[a_t(\mathcal{A}F^T)(t, r_t) + b_t(\mathcal{A}F^S)(t, r_t)\right]dt + \left[a_t F_r^T(t, r_t) + b_t F_r^S(t, r_t)\right]\sigma(t, r_t)dW_t.$$

Valitaan painot a_t ja b_t nyt siten, että sijoitus on riskitön. Ts. valitaan painot a_t ja b_t siten, että ehto

$$a_t F_r^T(t, r_t) + b_t F_r^S(t, r_t) = 0$$

toteutuu. Sijoittamalla tämä yhtälö sekä arvoprosessin määritelmään että sen dynamiikkaa kuvaavaan yhtälöön saadaan

$$V_t = a_t \left[\frac{F^T(t,r_t)F_r^S(t,r_t) - F^S(t,r_t)F_r^T(t,r_t)}{F_r^S(t,r_t)}\right] \tag{45}$$

$$dV_t = a_t \left[(\mathcal{A}F^T)(t,r_t) - \frac{F_r^T(t,r_t)}{F_r^S(t,r_t)}(\mathcal{A}F^S)(t,r_t)\right] dt. \tag{46}$$

Arbitraasivapauden nojalla markkinoilla ei voi olla dominoivia sijoituskohteita, joten ehdon $dV_t = r_t V_t dt$ tulee siis olla voimassa. Soveltamalla tätä ehtoa yhtälöihin (45) ja (46) saadaan tulos

$$r\frac{F^T(t,r)F_r^S(t,r) - F^S(t,r)F_r^T(t,r)}{F_r^S(t,r)} = (\mathcal{A}F^T)(t,r) - \frac{F_r^T(t,r)}{F_r^S(t,r)}(\mathcal{A}F^S)(t,r),$$

josta sieventämällä saadaan

$$\frac{(\mathcal{A}F^S)(t,r) - rF^S(t,r)}{F_r^S(t,r)} = \frac{(\mathcal{A}F^T)(t,r) - rF^T(t,r)}{F_r^T(t,r)}. \tag{47}$$

Yhtälön (47) vasen puoli on riippumaton maturiteetista T ja oikea puoli on riippumaton maturiteetista S. Olemme siis kyenneet osoittamaan, että osamäärä

$$\frac{(\mathcal{A}F^S)(t,r) - rF^S(t,r)}{F_r^S(t,r)}$$

on riippumaton korkojohdannaisen maturiteetista. Tämän havainnon nojalla huomataan, että on siis olemassa kuvaus $\lambda(t,r)$, joka on riippumaton korkosopimusten maturiteetista ja joka määritellään yhtälöstä (vrt. kappale 3.2)

$$\lambda(t,r) = \frac{(\mathcal{A}F^T)(t,r) - rF^T(t,r)}{F_r^T(t,r)},$$

missä $F^T(t,r)$ on mielivaltaisen maturiteetin T omaavan korkojohdannaisen arbitraasivapaa hinta. Tekijää $\lambda(t,r)$ kutsutaan *riskin markkinahinnaksi* (tai *riskin volatiliteettikohtaiseksi hinnaksi*). Tämän havainnon keskeisin implikaatio on ns. *korkojohdannaisten aikarakenneyhtälö*, jonka mukaan mielivaltaisen maturiteetin omaavan korkojohdannaisen arbitraasivapaa hinta määräytyy ody:stä

$$(\mathcal{A}F^T)(t,r) - rF^T(t,r) - \lambda(t,r)F_r^T(t,r) = 0.$$

Mikäli johdannaisen lunastushinta on $\Pi(r)$ ja maturiteetti on T, niin replikointiehdosta $F^T(T,r) = \Pi(r)$ seuraa, että kyseisen korkojohdannaisen arbitraasivapaa hinta määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)F_{rr}^T(t,r) + [\mu(t,r) - \lambda(t,r)]F_r^T(t,r) - rF^T(t,r) + F_t^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= \Pi(r). \end{aligned}$$

Esitetään nyt tämän reuna-arvotehtävän ratkaisuun soveltuva Feynman-Kačin lauseen seuraava versio:

Väite 5.1. *Oletetaan, että kuvaus $F^T \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ on reuna-arvotehtävän*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)F_{rr}^T(t,r) + [\mu(t,r) - \lambda(t,r)]F_r^T(t,r) - rF^T(t,r) + F_t^T(t,r) &= 0 \\ F^T(T,r) &= \Pi(r) \end{aligned}$$

ratkaisu. Oletetaan lisäksi, että

$$\int_t^T \mathbf{E}_{(t,r)}\left[e^{-2\int_t^s r_u du}\sigma^2(s,r_s){F_r^T}^2(s,r_s)\right] ds < \infty,$$

missä prosessi r_t määräytyy kaikille $s \geq t$ stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dr_s = [\mu(s,r_s) - \lambda(s,r_s)]ds + \sigma(s,r_s)dW_s, \quad r_t = r.$$

Tällöin $F^T(t,r)$ voidaan esittää muodossa

$$F^T(t,r) = \mathbf{E}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Pi(r_T)\right],$$

missä odotusarvossa esiintyvällä alaindeksillä (t,r) viitataan oletukseen $r_t = r$.

Soveltamalla nyt yllä esitettyä Feynman-Kačin lausetta korkojohdannaisen arbitraasivapaata hintaa kuvaavaan reuna-arvotehtävään saadaan

$$F^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Pi(r_T)\right],$$

missä korkoprosessi r_t määräytyy ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa sdy:stä

$$dr_u = (\mu(u,r_u) - \lambda(u,r_u))du + \sigma(u,r_u)d\hat{W}_u, \quad r_t = r,$$

missä $\hat{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi. Erityisesti siis huomataan, että maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ voidaan esittää muodossa

$$p^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right],$$

missä korkoprosessi r_t määräytyy ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa sdy:stä

$$dr_u = (\mu(u,r_u) - \lambda(u,r_u))du + \sigma(u,r_u)d\hat{W}_u, \quad r_t = r.$$

Lisäksi nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ määräytyy reuna-arvotehtävästä

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2(t,r)p^T_{rr}(t,r) + [\mu(t,r) - \lambda(t,r)]p^T_r(t,r) - rp^T(t,r) + p^T_t(t,r) &= 0\\ p^T(T,r) &= 1.\end{aligned}$$

5.3 Numeräärin vaihto

Kuten jo aiemmin Black-Scholes - mallin yhteydessä osoitettiin, voidaan numeräärin vaihdolla useasti helpottaa tarkasteltavaa arvottamisongelmaa huomattavasti. Jotta tämä tulisi selvästi esille myös tämän kappaleen tapauksessa, tarkastellaan korkojohdannaista, jonka lunastushinta on $\Pi(r)$ ja maturiteetti on T. Kuten aiemmin jo nähtiin, voidaan kyseisen johdannaisen arbitraasivapaa hinta esittää muodossa

$$F^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Pi(r_T)\right].$$

Ongelmana on yleensä tällöin tämän esityksen eksplisiittisen muodon määrittäminen, sillä mitä kompleksisempi sopimuksen palkkio on, sitä hankalemmaksi kuvauksen $F^T(t,r)$ määrittäminen muodostuu. Onneksi kuvauksen $F^T(t,r)$ määrittäminen saadaan numeräärin vaihdolla monesti huomattavasti helpompaan muotoon (tai ainakin sellaiseen muotoon, josta osa on helposti määritettävissä pääomamarkkinoilta). Oletetaan, että koron $\mathbb{Q}$-dynamiikka on muotoa

$$dr_s = \alpha(s,r_s)ds + \sigma(s,r_s)d\hat{W}_s, \quad r_t = r,$$

missä $\hat{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi. Aikarakenneyhtälön nojalla tiedämme, että $F^T(t,r)$ on reuna-arvotehtävän

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2(t,r)F^T_{rr}(t,r) + \alpha(t,r)F^T_r(t,r) - rF^T(t,r) + F^T_t(t,r) &= 0\\ F^T(T,r) &= \Pi(r)\end{aligned}$$

ratkaisu. Vastaavasti, maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ määräytyy yhtälöstä

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2(t,r)p^T_{rr}(t,r) + \alpha(t,r)p^T_r(t,r) - rp^T(t,r) + p^T_t(t,r) &= 0\\ p^T(T,r) &= 1.\end{aligned}$$

Määritellään nyt $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$-kuvaus $G^T : [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ yhtälöstä $F^T(t,r) = p^T(t,r)G^T(t,r)$. Tällöin aikarakenneyhtälön nojalla $G^T(t,r)$ toteuttaa reuna-arvotehtävän

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2(t,r)G^T_{rr}(t,r) + \left[\alpha(t,r) + \sigma^2(t,r)\frac{p^T_r(t,r)}{p^T(t,r)}\right]G^T_r(t,r) + G^T_t(t,r) &= 0\\ G^T(T,r) &= \Pi(r),\end{aligned}$$

mistä Feynman-Kačin lauseen nojalla seuraa, että

$$G^T(t,r) = \mathbf{E}_{(t,r)}\left[\Pi(\hat{r}_T)\right],$$

missä korkoprosessi $\hat{r}_t$ määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$d\hat{r}_s = \left[\alpha(s,\hat{r}_s) + \sigma^2(s,\hat{r}_s)\frac{p_r^T(s,\hat{r}_s)}{p^T(s,\hat{r}_s)}\right]ds + \sigma(s,\hat{r}_s)d\hat{W}_s, \quad \hat{r}_t = r.$$

Olemme siis havainneet, että maturiteetin T sekä lunastushinnan $\Pi(r)$ omaavan korkojohdannaisen arbitraasivapaa hinta voidaan esittää myös muodossa

$$F^T(t,r) = p^T(t,r)\mathbf{E}_{(t,r)}\left[\Pi(\hat{r}_T)\right].$$

Kuten myöhemmin affiinien aikarakennemallien tapauksessa tulemme huomaamaan, on edellä havainnollistettu menetelmä erittäin tehokas monien hankalien arvottamisongelmien ratkaisemisessa. Lisäksi edellä johtamamme tulos on myös johdettavissa suoraan Girsanovin lauseeseen nojaten huomaamalla, että maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ toteuttaa yhtälön

$$e^{-\int_t^T r_s ds} = p^T(t,r)\hat{M}(t,T),$$

missä

$$\hat{M}(t,T) = \exp\left(\int_t^T \sigma(s,r_s)\frac{p_r^T(s,r_s)}{p^T(s,r_s)}d\hat{W}_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s,r_s)\left(\frac{p_r^T(s,r_s)}{p^T(s,r_s)}\right)^2 ds\right)$$

on positiivinen eksponentiaalinen martingaali aina, kun Novikovin ehto toteutuu.

5.4 Hieman komparatiivista statiikkaa

Kuten tavanomaisten johdannaistenkin teorian tapauksessa, on keskeisin volatiliteetin $\sigma(t,r)$ vaikutuksen suunnan määräävä tekijä johdannaisen arbitraasivapaan hinnan konveksisuus. Oletetaan, että koron $\mathbb{Q}$-dynamiikka on muotoa

$$dr_u = \alpha(u,r_u)du + \sigma(u,r_u)d\hat{W}_u, \quad r_t = r,$$

missä $\hat{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi. Tämän kappaleen päätulos on esitetty seuraavassa lauseessa:

Lause 5.2. *Oletetaan, että korkojohdannaisen hinta*

$$F^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Pi(r_T)\right]$$

on konveksi nykykoron r suhteen. Tällöin kasvanut volatiliteetti kasvattaa johdannaisen arbitraasivapaata hintaa.

Lause 5.2 yleistää aikaisemmin tavanomaisille osakejohdannaisille johtamamme tulokset korkojohdannaisten tapaukseen. Lauseen 5.2 ehto on itse asiassa yleensä voimassa, ja se voidaankin todistaa suurelle luokalle korkoprosesseja ja vaateita $\Pi(r)$ (Alvarez 2001 ja Alvarez 2003a).

5.5 Affiini korkorakenne

5.5.1 Affiineja korkomalleja

Tarkastellaan anlyyttiseltä käsittelyltään helpompaa erityistapausta, jonka ollessa voimassa voidaan maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ ratkaista eksplisiittisesti. Olkoon nyt korkoprosessia r_t, joka ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa määräytyy sdy:stä

$$dr_t = (\alpha_t r_t + \beta_t)dt + \sqrt{\gamma_t r_t + \delta_t}d\hat{W}_t,$$

missä $\hat{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener-prosessi, kuvaukset $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ sekä δ_t ovat "riittävän"sileitä (vähintään jatkuvasti differentioituvia) ja $\gamma_t > 0$ kaikille $t \in [0,T]$.

Kuten olemme jo aiemmin osoittaneet, voidaan nollakuponkilainan hinta $p^T(t,r)$ esittää muodossa

$$p^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]. \tag{48}$$

Yhtälöä (48) ei yleensä pystytä ratkaisemaan eksplisiittisesti. Tämän kappaleen erikoistapauksessa voidaan funktionaalista muotoa

$$p^T(t,r) = e^{A(t,T)-B(t,T)r}$$

soveltamalla, jolloin mallia kutsutaan *affiiniksi*, voidaan kuitenkin osoittaa, että nollakuponkilainan hintaa kuvaava reuna-arvotehtävä

$$\begin{aligned} p_t^T(t,r) + \frac{1}{2}(\gamma_t r + \delta_t)p_{rr}^T(t,r) + (\alpha_t r + \beta_t)p_r^T(t,r) - rp^T(t,r) &= 0 \\ p^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

on separoituva ja voidaan siis esittää kahden erillisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen avulla. Täsmällisemmin ilmaistuna, tavanomaista derivointia ja hinnoitteluyhtälöä soveltamalla huomataan, että kuvaukset $A(t,T)$ ja $B(t,T)$ määräytyvät differentiaaliyhtälöistä

$$B_t(t,T) + \alpha_t B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma_t B^2(t,T) = -1, \quad B(T,T) = 0,$$

$$A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta_t B^2(t,T) \quad A(T,T) = 0. \tag{49}$$

Integroimalla saadaan

$$A(t,T) = \int_t^T \left[\frac{1}{2}\delta_s B^2(s,T) - \beta_s B(s,T)\right] ds.$$

Näin ollen meidän tulee siis keskittyä yleistetyn *Riccattin* differentiaaliyhtälön (49) ratkaisemiseen. Tekemällä nyt muuttujamuunnos

$$B(t,T) = -\frac{2}{\gamma_t}\frac{W_t'}{W_t}$$

saadaan ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen reuna-arvotehtävä (49) esitettyä toisen kertaluvun lineaarisena reuna-arvotehtävänä

$$W_t'' + \left[\alpha_t - \frac{\gamma_t'}{\gamma_t}\right] W_t' - \frac{\gamma_t}{2} W_t = 0, \quad \frac{W_T'}{W_T} = 0. \tag{50}$$

Kuten lineaaristen diffuusioiden teoriasta hyvin tiedetään, on differentiaaliyhtälön

$$W_t'' + \left[\alpha_t - \frac{\gamma_t'}{\gamma_t}\right] W_t' - \frac{\gamma_t}{2} W_t = 0$$

yleinen ratkaisu muotoa

$$W(t) = c_1\psi_t + c_2\varphi_t,$$

missä c_1 ja c_2 ovat tuntemattomia reaalivakioita ja kuvaukset ψ_t sekä φ_t ovat differentiaaliyhtälön ns. perusratkaisut. Lineaaristen diffuusioiden teoriasta tiedetään, että toinen perusratkaisuista (kuvaus ψ_t) on aidosti kasvava ja toinen (kuvaus φ_t) on aidosti vähenevä. Lisäksi perusratkaisuille pätee ehto $\psi_t'\varphi_t - \psi_t\varphi_t' = HS_t' > 0$, missä $H > 0$ on skaalatiheyden $S_t' = \gamma_t e^{-\int \alpha_t dt}$ suhteen määritelty vakio *Wronskin determinantti*. Nyt on selvää, että

$$B(t,T) = -\frac{2}{\gamma_t}\frac{c_1\psi_t' + c_2\varphi_t'}{c_1\psi_t + c_2\varphi_t}.$$

Tekemiemme oletusten ollessa voimassa perusratkaisut ovat määrittelyjoukossaan jatkuvasti differentioituvia ja rajoitettuja, joten reunaehto $W_T'/W_T = 0$ voidaan esittää muodossa $W_T' = 0$. Tällöin on siis oltava voimassa ehto $c_1\psi_T' = -c_2\varphi_T'$, josta puolestaan seuraa, että kuvaus $B(t,T)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$B(t,T) = -\frac{2}{\gamma_t}\frac{\hat{\varphi}_t(t,T)}{\hat{\varphi}(t,T)} = -\frac{2}{\gamma_t}\frac{d}{dt}\ln(\hat{\varphi}(t,T)),$$

missä kuvaus $\hat{\varphi}(t,T) = \psi'_T\varphi_t - \varphi'_T\psi_t$ on vähenevä. Ts. $B(t,T)$ voidaan tulkita kuvauksen $\hat{\varphi}(t,T)$ riskisopeutetuksi prosentuaaliseksi kasvuvauhdiksi. Sijoittamalla näin saatu tulos kuvauksen $A(t,T)$ määritelmään saadaan tulos

$$A(t,T) = \int_t^T \left[\frac{1}{2}\delta_s \left(\frac{2}{\gamma_s} \frac{\hat{\varphi}_t(s,T)}{\hat{\varphi}(s,T)} \right)^2 + \frac{2\beta_s}{\gamma_s} \frac{d}{ds} \ln\left(\hat{\varphi}_t(s,T)\right) \right] ds$$

Muita affiineja korkomalleja

Kirjallisuudessa on kuitenkin sovellettu muitakin affiineja korkomalleja. Näistä yleisimmät ovat seuraavat:

- $Vasi\check{c}ekin\ malli: \quad dr_t = \quad (b - ar_t)dt + \sigma d\hat{W}_t$
- *Cox-Ingersoll-Ross-malli:* $dr_t = \quad (b - ar_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\hat{W}_t$
- $Ho - Lee - malli: \quad dr_t = \quad b(t)dt + \sigma d\hat{W}_t$
- $Hull - White - malli: \quad dr_t = \quad (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)d\hat{W}_t$
- *Cox-Ingersoll-Ross-1985-malli:* $dr_t = \quad (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}d\hat{W}_t$

Huomautus: On syytä huomata, että Vasičekin mallille sekä sen yleistyksille voidaan edellä johdetut hinnat johtaa analyyttisesti myös suoraan normaalijakaumaa soveltamalla. Yksinkertaistamisen takia oletetaan nyt, että mallin parametrit ovat kaikki vakioita (tämä ei ole välttämätöntä, ja kiinnostunut lukija voi laskuharjoituksen takia tehdä analyysin yleisessä aikariippuvassakin tapauksessa, kun oletetaan, että tekijä a on vakio) on ekvivalentin martingaalimitan alaisuudessa muotoa (usean faktorin malli!)

$$dr_t = (b - ar_t)dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i d\hat{W}_i(t),$$

missä prosessit $\hat{W}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, ovat toisistaan riippuvia $\mathbb{Q}$-Wiener prosesseja, joille pätee ehto $\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{W}_i(t)\hat{W}_j(t)] = \rho_{ij}t \in [-1,1]$ aina kun $i \neq j$. Kuten normaalisti jakautuneiden satunnaismuuttujien teoriasta hyvin tiedetään, voidaan korkodynamiikkaa ajavien Wiener-prosessien summa esittää myös muodossa $\sigma\hat{W}_t$, missä $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$ ja $\hat{W}_t$ on $\mathbb{Q}$-Wiener prosessi. Annettuna tämä havainto, integroimalla lyhyttä korkoa kuvaava sdy puolittain ja jakamalla tämä yhtälö puolittain vakiolla a saadaan

$$-\int_0^t r_s ds = \frac{1}{a}[r_t - r] - \frac{b}{a}t - \frac{\sigma}{a}\hat{W}_t. \tag{51}$$

Kuten Ornstein-Uhlenbeck-prosessia käsittelevässä kappaleessa jo osoitettiin, on lyhyen koron dynamiikkaa kuvaava sdy:n ratkaisu muotoa

$$r_t = \frac{b}{a} + e^{-at}\left(r - \frac{b}{a}\right) + \sigma\int_0^t e^{a(s-t)}d\hat{W}_s. \tag{52}$$

Yhdistämällä (52) yhtälöön (51) saadaan tulos

$$-\int_0^t r_s ds = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a} - r\right)(1 - e^{-at}) - \frac{b}{a}t + \frac{\sigma}{a}\int_0^t (e^{a(s-t)} - 1)d\hat{W}_s.$$

Näin ollen olemme siis osoittaneet, että

$$-\int_0^t r_s ds \sim N\left(\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a} - r\right)(1 - e^{-at}) - \frac{b}{a}t, \frac{\sigma^2}{a^2}\int_0^t (e^{a(s-t)} - 1)^2 ds\right),$$

jolloin bondihinnoille pätee

$$p^T(0,r) = \mathbf{E}_{(0,r)}\left[e^{-\int_0^t r_s ds}\right] = \exp\left(\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a} - r\right)(1 - e^{-at}) - \frac{b}{a}t + \frac{\sigma^2}{2a^2}\int_0^t (e^{a(s-t)} - 1)^2 ds\right).$$

Keskeinen affiinin aikarakenteen kvalitatiivinen seuraus on nyt esitettynä seuraavassa seurauslauseessa:

Seurauslause 5.3. *Oletetaan, että korkojen aikarakenne ekvivalentin martingaalimitan* $\mathbb{Q}$ *alaisuudessa on affiini. Tällöin nollakuponkilainan hinta* $p^T(t,r)$ *on nykykoron* r *konveksi funktio ja kasvanut volatiliteetti kasvattaa nollakuponkilainan hintaa.*

5.5.2 Havainnollistuksia

1. Erikoistapaus: Tarkastellaan aluksi yksinkertaisinta mahdollista erikoistapausta, jossa $\gamma_t \equiv 0$ kaikille $t \in \mathbb{R}_+$. Tällöin tuntematonta kuvausta $B(t,T)$ kuvaava differentiaaliyhtälö tulee muotoon

$$B_t(t,T) + \alpha_t B(t,T) = -1, \quad B(T,T) = 0.$$

Tavanomaista vakioiden variointikaavaa soveltamalla saadaan tulokseksi, että

$$B(t,T) = \int_t^T e^{\int_t^u \alpha_s ds} du.$$

Erityisesti siis huomataan, että mikäli muuttujat α_t, β_t ja δ_t ovat kaikki vakioita, niin silloin

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha(T-t)} - 1\right) \\ A(t,T) &= \frac{\delta}{4\alpha^3}\left(e^{2\alpha(T-t)} - 1\right) - \left(\frac{\delta}{\alpha^3} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\left(e^{\alpha(T-t)} - 1\right) + \left(\frac{\delta}{2\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}\right)(T-t). \end{aligned}$$

2. Erikoistapaus: Tarkastellaan nyt Cox-Ingersoll-Ross-mallia

$$dr_t = (b - ar_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\hat{W}(t),$$

missä $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ ja $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ovat tunnettuja vakioita. Tässä tapauksessa reuna-arvotehtävä (50) tulee muotoon

$$W_t'' - aW_t' - \frac{\sigma^2}{2}W_t = 0, \quad W_T' = 0.$$

Koska tämän reuna-arvotehtävän vakiota vaille yksikäsitteinen ratkaisu on muotoa $W_t = c_2\hat{\varphi}(t,T)$, missä

$$\hat{\varphi}(t,T) = \tilde{\psi}e^{\tilde{\varphi}(t-T)} - \tilde{\varphi}e^{\tilde{\psi}(t-T)},$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{ja} \quad \tilde{\psi} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{\sigma^2}{2}}$$

huomataan, että nollakuponkilainan hinta tulee muotoon

$$p^T(t,r) = \left(\frac{\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}}{\tilde{\psi}e^{\tilde{\varphi}(t-T)} - \tilde{\varphi}e^{\tilde{\psi}(t-T)}}\right)^{2b/\sigma^2} \exp\left(-\frac{e^{\tilde{\varphi}(t-T)} - e^{\tilde{\psi}(t-T)}}{\tilde{\psi}e^{\tilde{\varphi}(t-T)} - \tilde{\varphi}e^{\tilde{\psi}(t-T)}}\right).$$

Kuinka monta faktoria tarvitaan?

• Korkomallia valittaessa tärkeää roolia näyttelee mallien matemaattisten ominaisuuksien lisäksi se, kuinka hyvin ne kuvaavat kyseisen sovelluksen kanalta keskeisiä korkojen ominaisuuksia. Tärkeä kysymys on myös se, millaisia estimointi- ja kalibrointimenetelmiä malleille löytyy.

• Korkokäyrää mallinnetaan yhden tai useamman faktorin malleilla. Tilastolliseen pääkomponenttianalyysiin perustuvat empiiriset tutkimukset ovat osoittaneet, että seuraavat kolme riippumatonta faktoria (ilmiötä) ovat keskeisimmät.

1) Korkokäyrän nousu tai lasku (eng. parallel shift) selittää n. 80 - 90 % korkojen varianssista.
2) Lyhyiden ja pitkien korkojen siirtyminen vastakkaisiin suuntiin (eng. twist) selittää n. 5-10 % varianssista.
3) Keskipitkät korot siirtyvät eri suuntaan kuin pitkät ja lyhyet korot (eng. butterfy) selittää n. 1-2 % varianssista.

Jälleen ongelmana on valinta yksinkertaisuuden ja realistisuuden välillä. Joidenkin johdannaisten hinnoitteluun vaikuttaa korkokäyrän muoto, jolloin yhden faktorin malli ei voi toimia kunnolla.

5.5.3 Numeräärin vaihdosta

Koska maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan hinta voidaan affiinin aikarakenteen tapauksessa esittää muodossa

$$p^T(t,r) = e^{A(t,T)-B(t,T)r}$$

saadaan tavanomaista differentiointia soveltamalla tulokseksi

$$\frac{p_r^T(t,r)}{p^T(t,r)} = -B(t,T).$$

Tällöin siis maturiteetin T sekä lunastuspalkkion $\Pi(r)$ omaavan johdannaisen arbitraasivapaa hinta

$$F^T(t,r) = \mathbf{E}_{(t,r)}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\Pi(r_T)\right]$$

voidaan affiinin korkorakenteen tapauksessa esittää muodossa

$$F^T(t,r) = e^{A(t,T)-B(t,T)r}\mathbf{E}_{(t,r)}\left[\Pi(\hat{r}_T)\right],$$

missä

$$d\hat{r}_s = \left[(\alpha_s - B(s,T)\gamma_s)\,\hat{r}_s + \beta_s - B(s,T)\delta_s\right]ds + \sqrt{\gamma_s\hat{r}_s + \delta_s}\,d\hat{W}_s, \quad \hat{r}_t = r.$$

Erityisesti siis huomataan, että mikäli $\gamma_t \equiv 0$ on korko $\hat{r}_T$ normaalisti jakautunut keskiarvonaan

$$\Upsilon_T = re^{-\int_t^T(B(s,T)\gamma_s-\alpha_s)ds} + \int_t^T e^{-\int_s^T(B(y,T)\gamma_y-\alpha_y)dy}[\beta_s - B(s,T)\delta_s]ds$$

sekä varianssinaan

$$\Theta_T^2 = \int_t^T e^{-2\int_s^T(B(y,T)\gamma_y-\alpha_y)dy}\delta_s ds.$$

Olemme siis havainneet, että mikäli korkojen aikarakenne on affiini ja $\gamma_t \equiv 0$, niin

$$F^T(t,r) = e^{A(t,T)-B(t,T)r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Pi(y)}{\sqrt{2\pi}\Theta_T}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\Upsilon_T}{\Theta_T}\right)^2}dy.$$

Muita lyhyen koron malleja

Edellisessä kappaleessa esiteltiin affiinin aikarakenteen omaavia korkoprosesseja. Kirjallisuudessa on kuitenkin sovellettu muitakin yhden faktorin korkomalleja. Näistä yleisimmät ovat seuraavat:

- *Dothanin malli:* $dr_s = ar_s ds + \sigma r_s d\hat{W}_s$.
- *Black-Derman-Toyn -malli:* $dr_s = a_s r_s ds + \sigma_s r_s d\hat{W}_s$.
- *Black-Karasinski -malli:* $d\ln r_s = (a - b\ln r_s)ds + \sigma d\hat{W}_s$.
- *Mertonin 1975 -malli:* $dr_s = ar_s(\bar{r} - r_s)ds + \sigma r_s d\hat{W}_s$.
- *Cox-Ingersoll-Ross-1985 -malli:* $dr_s = ar_s(\bar{r} - r_s)ds + \sigma r_s^{\frac{3}{2}} d\hat{W}_s$.

5.6 Kuponkilainoista ja niiden hinnoittelusta

Tarkastellaan tässä kappaleessa lyhyesti kuponkimaksuja sisältävien velkakirjojen arbitraasivapaata hinnoittelua. Oletetaan nyt, että lyhyt korko r_t määräytyy ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa sdy:stä:

$$dr_t = \alpha(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)d\hat{W}_t.$$

Tarkastellaan sopimusta, joka takaa haltijalleen seuraavan diskreetin kuponkimaksuvirran

$$(c(t_1, r_{t_1}), \dots, c(t_{n-1}, r_{t_{n-1}}), c(t_n, r_{t_n})),$$

missä $0 < t_1 < \cdots t_{n-1} < t_n = T$ on välin $[0, T]$ tunnettu jako. Merkitään kuponkimaksun $c(t_k, r_{t_k})$ tuottavan johdannaisen hintaa, kun $t < t_k$, merkinnällä $G^{t_k}(t, r)$. Ts.

$$G^{t_k}(t, r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[e^{-\int_t^{t_k} r_s ds} c(t_k, r_{t_k}) \right]$$

kaikille $t < t_k$. Tällöin yllämainitun kuponkimaksuvirran arbitraasivapaa hinta on

$$G^T(t, r) = \sum_{j=1}^{n} G^{t_j}(t, r),$$

aina kun $t_{k-1} < t < t_k$ ja $k \in \{1, \dots, n\}$. Erityisesti siis huomataan, että mikäli $c(t_k, r_{t_k}) = c(t_k)$ kaikille $(t, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, niin silloin

$$G^T(t, r) = \sum_{j=k}^{n} c(t_j) p^{t_j}(t, r),$$

aina kun $t_{k-1} < t < t_k$ ja $k \in \{1, \dots, n\}$.

Esimerkki: Tarkastellaan velkakirjaa, jonka nimellisarvo on vakio F, maturiteetti on T, kuponkimaksut ovat c ja ne lankeavat maksettaviksi tasavälein $t_k = kT/n$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \{1, \dots, n\}$. Oletetaan myös, että korkojen rakenne ekvivalentin mitan alaisuudessa on affiini. Koska

$$p^{t_j}(t, r) = e^{A(t, jT/n) - B(t, jT/n)r}, \quad t < \frac{jT}{n},$$

huomataan, että velkakirjan arbitraasivapaa hinta on

$$G^T(t, r) = \sum_{j=k}^{n} c e^{A(t, jT/n) - B(t, jT/n)r} + F e^{A(t,T) - B(t,T)r}, \quad t \in \left(\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n} \right).$$

Yllä tarkastelluissa malleissa kuponkimaksuvirta oletettiin diskreetiksi. Arvottamisen perustana olevan diffuusioprosessin jatkuvuuden nojalla on kuitenkin myös mahdollista tarkastella velkakirjoja, jotka tuottavat jatkuvan kuponkimaksuvirran muotoa $c(t, r_t)$, missä $c : [0,T) \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ on tunnettu kuvaus. Mikäli velkakirjan nimellisarvo on F, niin silloin kyseisen velkakirjan käypä arvo on muotoa

$$G^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \int_t^T e^{-\int_t^s r_y dy} c(s, r_s) ds + F p^T(t,r).$$

Esimerkki: (*Korkoswappi)* Tarkastellaan kahta tunnetun maturiteetin T sekä nimellisarvon 1 omaavaa velkakirjaa. Oletetaan, että velkakirjojen tuottamat kuponkimaksuvirrat ovat $c_1(t, r_t) = r_t$ sekä $c_2(t, r_t) = k$. Tällöin kuponkimaksuvirran $c_1(t, r_t) = r_t$ tuottaman velkakirjan käypä arvo on analyysin peruslauseen nojalla muotoa

$$G_1^T(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \int_t^T e^{-\int_t^s r_y dy} r_s ds + p^T(t,r) = (1 - p^T(t,r)) + p^T(t,r) = 1.$$

Toisaalta kuponkimaksuvirran $c_2(t, r_t) = k$ tuottaman velkakirjan käypä arvo on

$$G_2^T(t,r) = k \int_t^T p^s(t,r) ds + p^T(t,r).$$

Näiden velkakirjojen käyvät arvot ovat samat, mikäli vakio k toteuttaa yhtälön

$$k \int_t^T p^s(t,r) ds + p^T(t,r) = 1.$$

Tästä saadaan

$$k = \frac{1 - p^T(t,r)}{\int_t^T p^s(t,r) ds},$$

joka tunnetaan swappitasona (swap rate).

Esimerkki: (*Konsolibondi; consol bond).* Konsolibondi on äärettömän maturiteetin eli ns. perpetuiteetti (engl. perpetuity) omaava velkakirja, joka maksaa vakiokupongin c eikä omaa nimellisarvoa. Arbitraasivapauden vallitessa konsolin käypä arvo voidaan esittää muodossa

$$C(t,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \int_t^\infty e^{-\int_t^s r_y dy} c ds = c \int_t^\infty \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[e^{-\int_t^s r_y dy} \right] ds = c \int_t^\infty p^s(t,r) ds.$$

Aikarakenneyhtälön nojalla tiedetään, että konsolin käypä arvo $C(t,r)$ toteuttaa ody:n $(\mathcal{A}C)(t,r) + C_t(t,r) - rC(t,r) + c = 0$, joten soveltamalla Itôn lausetta saadaan (riskiteoriastakin) tutun näköinen stokastinen differentiaaliyhtälö

$$dC(t, r_t) = (r_t C(t, r_t) - c) dt + C_r(t, r_t) \sigma(t, r_t) d\hat{W}_t.$$

Esimerkki: (*Tuottotakuun rahoitus)* Tarkastellaan seuraavaanlaista sopimusta. Sopimuksen haltijalla on maturiteetissa oikeus valita joko kiinteätuottoisen tai markkinakorkoihin sidotun talletussopimuksen välillä. Jos takuutuotto on $R > 0$, niin silloin sopimuksen haltijan tuotto on maturiteetissa

$$\Phi_1(r_T) = \max\left(e^{RT}, e^{\int_0^T r_s ds} \right) = e^{\int_0^T r_s ds} \max\left(e^{RT - \int_0^T r_s ds}, 1 \right) = e^{\int_0^T r_s ds} \left[1 + \left(e^{RT - \int_0^T r_s ds} - 1 \right)^+ \right].$$

Tämän sopimuksen käypä arvo on

$$F_1^T(0,r) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(0,r)} \left[e^{-\int_0^T r_y dy} \Phi_1(r_T) \right] = 1 + e^{RT} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(0,r)} \left[\left(e^{-\int_0^T r_s ds} - e^{-RT} \right)^+ \right].$$

Esimerkiksi Vasičekin mallin (51) tapauksessa sopimuksen käypä arvo on muotoa (vertaa osto-option arvoon!)

$$F_1^T(0,r) = 1 + e^{RT + M(T) + \frac{1}{2}\Sigma^2(T)} \Phi\left(\frac{RT + M(T)}{\Sigma(T)} + \Sigma(T) \right) - \Phi\left(\frac{RT + M(T)}{\Sigma(T)} \right),$$

missä

$$M(T) = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a} - r\right)(1 - e^{-aT}) - \frac{b}{a}T$$

ja

$$\Sigma^2(T) = \frac{\sigma^2}{a^2}\int_0^T (e^{a(s-t)} - 1)^2 ds.$$

Koska tällaiset sopimukset ovat maturiteetistaan ja perustana olevasta korkoprosessista riippuen hyvinkin riskillisiä, yhtiö haluaa suojata nykyisen positionsa määrittämällä sellaisen vakiokuponkivirran, jolla yllä tarkastellun sopimuksen riski saataisiin suojattua. Asettamalla kyseisen velkakirjan käypä arvo yhtäsuureksi kuin $F_1^T(0, r)$ saadaan

$$c = \frac{1 + e^{RT}\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}_{(0,r)}\left[\left(e^{-\int_0^T r_s ds} - e^{-RT}\right)^+\right]}{\int_0^T p^s(0, r)ds}.$$

5.7 Muita korkokäsitteitä

Kuten diskreetissä korkolaskennassa, on jatkuva-aikaisten korkojenkin tapauksessa olemassa muita korkokäsitteitä kuin pelkästään lyhyet korot. Havainnollistetaan tätä sijoitusesimerkillä. Muodostetaan hetkellä $t < S < T$ velkakirjasalkku (a, b) kahdesta eri nollakupongista $p^T(t, r)$ ja $p^S(t, r)$ seuraavalla tavalla. Tällaisen velkakirjasalkun arvoprosessi on

$$V_t = ap^T(t, r) + bp^S(t, r).$$

Myydään lyhyeksi yksi kappale S-bondia ja ostetaan sillä $p^S(t, r)/p^T(t, r)$ kappaletta T-bondia (ts. $(a, b) = (p^S(t, r)/p^T(t, r), -1)$, jolloin $V_t = 0$). Salkun arvoprosessille pätee siis ehto, että

$$V_S = \frac{p^S(t, r)}{p^T(t, r)}p^T(S, r) - 1, \quad V_T = \frac{p^S(t, r)}{p^T(t, r)}.$$

Ts. hetkellä t muodostettu velkakirjasalkku johtaa yhden rahayksikön investointiin hetkellä S (kun lyhyeksi myyty nollakuponkilaina lankeaa maksettavaksi) ja tuottaa hetkellä T varman tuoton $p^S(t, r)/p^T(t, r)$. Tätä tuottovauhtia kutsutaan hetkellä t sovituksi aikavälille $[S, T]$ sovituksi termiinikoroksi. Tämän esimerkin nojalla määritelläänkin hetken t *yksinkertainen (siis lineaarinen) termiinikorko* $L(t; S, T)$ (ns. *LIBOR*-korkomalli, vrt. myös liite - LIBOR pankkikorko) periodille $[S, T]$ yhtälöstä

$$1 + (T - S)L(t; S, T) = \frac{p^S(t, r)}{p^T(t, r)} \Rightarrow L(t; S, T) = -\frac{p^T(t, r) - p^S(t, r)}{p^T(t, r)(T - S)}.$$

Vastaavasti, jos korko lankeaa jatkuvasti sijoitetulle pääomalle, niin hetken t *jatkuva termiinikorko* $R(t; S, T)$ periodille $[S, T]$ määritellään yhtälöstä

$$e^{R(t;S,T)(T-S)} = \frac{p^S(t, r)}{p^T(t, r)} \Rightarrow R(t; S, T) = \frac{1}{(T - S)}(\ln p^S(t, r) - \ln p^T(t, r)).$$

Näiden korkojen avulla voidaan myös määritellä seuraavat korkokäsitteet:

(i) Hetken t yksinkertainen *spot-korko* $L(S, T)$ (ns. *LIBOR*-spot-korko) periodille $[S, T]$ on

$$L(S, T) = -\frac{p^T(S, r) - 1}{p^T(S, r)(T - S)}.$$

Ts. $L(S, T) = L(S; S, T)$.

(ii) Jatkuva spot-korko periodille $[S, T]$ on

$$R(S, T) = -\frac{1}{(T - S)}\ln p^T(S, r).$$

Ts. $R(S, T) = R(S; S, T)$.

(iii) Hetken t välitön maturiteetin T termiinikorko on

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p^T(t,r)}{\partial T}.$$

(iv) Hetken t välitön lyhyt korko on $r_t = f(t,t)$.

Tarkastellaan nyt hieman hetken t välittömän maturiteetin T termiinikoron sekä nollakuponkilainojen hintojen välistä suhdetta. Tavanomaista integrointia soveltamalla saadaan

$$\int_S^T f(t,u)du = -\int_S^T \frac{\partial}{\partial u} \ln p^u(t,r)du = -\ln\left(\frac{p^T(t,r)}{p^S(t,r)}\right),$$

jolloin siis

$$p^T(t,r) = p^S(t,r)e^{-\int_S^T f(t,u)du}.$$

Erityisesti siis nähdään, että

$$p^T(t,r) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}. \tag{53}$$

On syytä huomata, että yllä esitettyjen korkokäsitteiden sekä nollakuponkilainojen hintojen välillä vallitsee voimakas keskenäinen riippuvuus. Tästä puolestaan seuraa, että yhdenkin tekijän dynaaminen määritelmä johtaa sen kanssa konsistenttiin dynaamiseen määritelmään muille tekijöille. Koska tämän monisteen tarkoitus on kuitenkin perehdyttää enemmän arbitraasivapaaseen arvottamiseen, emme tässä yhteydessä paneudu tähän kysymykseen enempää ilman arbitraasivapaan hinnoittelun tarjoamaa koneistoa.

5.8 Termiinikoroista

Kuten edellisessä kappaleessa havaittiin, voidaan bondien hinnat identifioida myös suoraan niiden termiinikorkojen kautta. Tämä on tulos, joka on linjassa aikaisemmin tekemämme deterministisen korkorakenneanalyysin kanssa. Niinpä on luonnollista kysyä, voidaanko arbitraasivapauden vallitessa korkojen aikarakenne identifioida termiinikorkojen kautta suoraan ilman lyhyen koron erillistä spesifiointia. Vastaus tähän on myönteinen, ja jottei se jäisi epäselväksi, oletetaan, että termiinikorot määräytyvät objektiivisen mitan $\mathbb{P}$ alaisuudessa mielivaltaiselle aikaparille (t,T) stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t, \quad f(0,T) = f^*(T), \tag{54}$$

missä $\mu(t,T)$ ja $\sigma(t,T)$ ovat tunnettuja riittävän säännöllisiä adaptoituneita prosesseja ja $f^*(T)$ on hetkellä 0 solmittujen maturiteetin T omaavien sopimusten spot-korko (joka voidaan siis määrittää markkinoilta). Jotta pystyisimme määrittämään termiinikorkomallin (54) indusoiman riskineutraalin dynamiikan, tulee meidän ensiksi tarkastella prosessia

$$Y_t = -\int_t^T f(t,s)ds.$$

Itôn lausetta soveltamalla saadaan

$$dY_t = [r_t - \alpha(t,T)]dt - \beta(t,T)dW_t,$$

missä

$$\alpha(t,T) = \int_t^T \mu(t,s)ds$$

ja

$$\beta(t,T) = \int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Yhtälön (53) nojalla nähdään, että mielivaltaisen T-bondin hinta voidaan ilmaista muodossa $p(t,T) = e^{Y_t}$, joten soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $y \mapsto e^y$ saadaan

$$dp(t,T) = \left[r_t - \alpha(t,T) + \frac{1}{2}\beta^2(t,T)\right]p(t,T)dt - \beta(t,T)p(t,T)dW_t. \tag{55}$$

Kuten aikaisemmassa lyhyen koron mallien analyysissa, kootaan omarahoitteinen salkku (h_t^T, h_t^S) kahdesta eri maturiteetin T ja S omaavasta bondista. Tällöin salkun arvoprosessille $V_t^h = h_t^T p(t,T) + h_t^S p(t,S)$ pätee (ehdon $dV_t^h = h_t^T dp(t,T) + h_t^S dp(t,S)$ nojalla)

$$dV_t^h = \left[h_t^T p(t,T)\Theta(t,T) + h_t^S p(t,S)\Theta(t,S)\right] dt - \left[h_t^T p(t,T)\beta(t,T) + h_t^S p(t,S)\beta(t,S)\right] dW_t,$$

missä $\Theta(t,T) = r_t - \alpha(t,T) + \beta^2(t,T)/2$. Asettamalla salkku riskittömäksi ja edellyttämällä riskittömältä tuotolta arbitraasivapausehto $dV_t^h = r_t V_t^h = h_t^T r_t p(t,T) + h_t^S r_t p(t,S)$ saadaan, että

$$\begin{aligned} h_t^T p(t,T)\left[\frac{1}{2}\beta^2(t,T) - \alpha(t,T)\right] &= -h_t^S p(t,S)\left[\frac{1}{2}\beta^2(t,S) - \alpha(t,S)\right] \\ h_t^T p(t,T)\beta(t,T) &= -h_t^S p(t,S)\beta(t,S). \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä ehdot huomataan, että mielivaltaisille maturiteeteille T, S pätee ehto

$$\frac{\frac{1}{2}\beta^2(t,T) - \alpha(t,T)}{\beta(t,T)} = \frac{\frac{1}{2}\beta^2(t,S) - \alpha(t,S)}{\beta(t,S)}.$$

Koska tämän identiteetin vasen puoli ei riipu maturiteetista S ja identiteetin oikea puoli ei riipu maturiteetista T, huomataan, että arbitraasivapauden vallitessa on olemassa maturiteetista riippumaton tekijä (riskin markkinahinta jälleen!) λ_t siten, että

$$\frac{\frac{1}{2}\beta^2(t,T) - \alpha(t,T)}{\beta(t,T)} = \lambda_t \Rightarrow \frac{1}{2}\beta^2(t,T) - \alpha(t,T) = \lambda_t \beta(t,T).$$

Differentioimalla näin saatu tulos maturiteetin suhteen saadaan keskeinen ns. *Heath-Jarrow-Morton driftiehto,* jonka mukaan arbitraasivapauden vallitessa on oltava voimassa identiteetti

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds - \lambda_t \sigma(t,T).$$

Huomataan siis välittömästi, että arbitraasivapauden vallitessa bondien hintadynamiikka määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$dp(t,T) = \left[r_t + \lambda_t \beta(t,T)\right] p(t,T)dt - \beta(t,T)p(t,T)d\bar{W}_t,$$

missä $\bar{W}$ on Brownin liike ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa. Edellä tehty analyysi implikoi samalla, että arbitraasivapauden vallitessa jatkuva spot-korko $R(t,T)$ periodille $[t,T]$ määräytyy sdy:stä

$$dR(t,T) = \frac{R(t,T) - r_t + \frac{1}{2}\beta^2(t,T) - \lambda_t \beta(t,T)}{T-t}dt + \frac{\beta(t,T)}{T-t}d\bar{W}_t.$$

Vaihtoehtoisesti termiinikorkoja voidaan tarkastella suoraan markkinatodennäköisyyksien vallitessa (eli siis ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa). Jos termiinikorot määräytyvät ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa mielivaltaiselle aikaparille (t,T) stokastisesta differentiaaliyhtälöstä

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T)d\bar{W}_t, \quad f(0,T) = f^*(T), \tag{56}$$

niin siinä tapauksessa edellä tekemämme analyysin sekä yhtälön (55) nojalla huomataan, että kuvauksille $\mu(t,T)$ ja $\sigma(t,T)$ pätee ekvivalentin martingaalimitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa *Heath-Jarrow-Mortonin driftiehto* muotoa

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Esimerkki: (*Affiini korkostruktuuri*) Oletetaan, että korkojen struktuuri on affiini. Tällöin bondihinnat ovat muotoa $p^T(t,r) = e^{A(t,T) - B(t,T)r}$, jolloin suoraan derivoimalla saadaan tulokseksi

$$f(t,T) = B_T(t,T)r - A_T(t,T).$$

On myös syytä huomata, että differentiaaliyhtälöistä (49) ja (**??**) seuraa, että

$$\lim_{t\uparrow T} f(t,T) = \lim_{t\uparrow T}[B_T(t,T)r - A_T(t,T)] = r.$$

5.9 Korkomallien taksonomiaa

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; as far as they are certain, they do not refer to reality. ALBERT EINSTEIN

Fitton ja McNatt (1998) ovat esittäneet seuraavan taksonomian korkomalleille. **Jatkuva vs. diskreetti:** Valtaosa käytetyistä malleista perustuu jatkuva-aikaisten stokastisten pros- essien teoriaan, sillä stokastinen analyysi tarjoaa erittäin tehokkaat matemaattiset työkalut johdannaisten hinnoitteluun. Sovelluksissa jatkuva-aikaiset mallit joudutaan kuitenkin diskretoimaan. Esimerkiksi jatkuva-aikainen prosessi

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t,$$

voidaan diskretoida asettamalla formaalisti $dt = 1$, jolloin saadaan

$$X_{t+1} - X_t = \mu X_t + \sigma(W_{t+1} - W_t),$$

eli

$$X_t = \phi X_t + Z_t,$$

missä $\phi = \mu + 1$ ja satunnaismuuttujat $Z_t = \sigma(W_{t+1} - W_t)$ muodostavat riippumattomien $N(0, \sigma^2)$ muuttujien jonon. Kyseessä on siis autoregressiivinen aikasarjamalli.

Hinta tai korko vs. korkokäyrä: Varhaisimmat korkomallit perustuivat hintojen dynamiikkaan. Nykyisin yleisimmin käytössä ovat jonkin tietyn koron (esim. 3 kk) dynamiikkaa kuvaavat mallit. Näiden mallien etu on (suhteellinen) yksinkertaisuus. Korkokäyrän dynamiikan kuvaava malli antaa monipuolisemman kuvan korkojen kehityksestä ja soveltuu hyvin monenlaisten ongelmien ratkaisemiseen. Korkorakennemallien ongelmana on niiden mutkikkuudesta johtuva vaikea estimointi ja kalibrointi.

Realistinen vs. riskineuraali: Riskineutraaliin mittaan siirtyminen on menettely, jonka avulla matemaattista ratkaisua pyritään helpottamaan. Riskineuraalissa mallissa diskonttaus tapahtuu suoraan lyhyellä korolla. Realistisiin todennäköisyyksiin perustuvassa mallissa diskonttaus vaatii riskikorjauksen. Stressi- ja solvenssitesteissä on tarkasteltava reaalimaailman oikeita todennäköisyyksiä.

Arbitraasivapaa vs. tasapaino: Useimmat arbitraasivapaat mallit sovitetaan täsmällisesti kunkin ajanhetken korkokäyrään. Nämä mallit eivät yleensä kuvaa kovin hyvin korkojen dynamiikkaa. Tasapainorelaatioon perustuva mallit soveltuvat kehityksen kuvaamiseen sekä solvenssi- ja riskiarviohin.

	Riskineutraali	**Realistinen**
Arbitraasivapaa	Hinnoittelu tietyllä hetkellä, kun data luotettava	Ei hallita
Tasapaino	1) Tietyn hetken hinnoittelu, kun data epäluotettava	1) Stressitestit
	2) Dynamiikan mallinnus ja hinnoittelu	2) Solvenssitesti

Eri mallityyppien sovellusalueiden nelikenttä.

6 Hiukan riskin mittaamisesta ja aikasarja-analyysistä

The long run is misleading guide to current affairs. In the long run we are all dead. Economists set themselves too easy, too useless a task if in tempestuous seasons they can only tell us when the storm is long past, the ocean will be flat. JOHN KEYNES

6.1 ES (TailVaR) ja VaR

Olkoon V_t sijoituksen arvo hetkellä t. Sitä kuvataan usein ns. *riskifaktorien* $\mathbf{Z}_t = (Z_{t,1}, Z_{t,2}, ...Z_{t,d})$ $(d > 0)$ avulla

$$V_t = f(t, \mathbf{Z}_t),$$

missä $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. *Tappio* L voidaan esittää riskifaktorien muutoksen funktiona

$$L_{[t,t+T]} = -(V_{t+T} - V_t) = -[f(t, \mathbf{Z}_t + \mathbf{X}_t(t+T)) - f(t, \mathbf{Z}_t)] \quad (T > 0),$$

missä muutos $\mathbf{X}_t(t+T) = (Z_{t+T,1} - Z_{t,1}, Z_{t+T,2} - Z_{t,2}, ..., Z_{t+T,d} - Z_{t,d})$. Koska $\mathbf{Z}_t$ tunnetaan hetkellä t, *tappion ennustejakauma* hetkellä $t + T$ on ehdollinen jakauma

$$F_{t,L_{[t,t+T]}}(a) = \mathbb{P}\{L_{[t,t+T]} \leq a \mid \xi_t\},$$

missä $a \in \mathbb{R}$ ja ξ_t on riskifaktorien muutosten hetkeen t ulottuvan historian generoima sigma-algebra. Mikäli riskifaktorien kuvaus f on differentioituva, saadaan *lineaarinen approksimaatio*

$$L^{\Delta}_{[t,t+T]} = -[f_t(t, \mathbf{Z}_t)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t, \mathbf{Z}_t) X_{t,i}\,(t+T)].$$

Esimerkki: (*Lineaarinen portfolio*) Tarkastellaan portfoliota, jossa on määrä α_i osaketta S_i. Valitaan osakkeiden logaritmiset hinnat riskifaktoreiksi eli $Z_{t,i} = \log S_{t,i}$, $1 \leq i \leq d$, jolloin riskifaktorien muutokset liittyvät portfolion logaritmisiin tuottoihin. Portfolion arvoksi saadaan $V_t = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \; exp(Z_{t,i})$, joten tappiofunktio on

$$L_{[t,t+T]} = -(V_{t+T} - V_t) = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{t,i}[exp(X_{t+T,i}) - 1]$$

ja lineaarinen approksimaatio

$$L^{\Delta}_{[t,t+T]} = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{t,i} X_{t+T,i} = -V_t \sum_{i=1}^{d} \omega_{t,i} X_{t+T,i},$$

missä $\omega_{t,i} = (\alpha_i S_{t,i})/V_t$.

Maksimitappio sijoituksessa on usein 100 %, joten muunlainen riskimitta on tarpeen. Riskin mittaamiseen käytetään yleisesti seuraavia tappion ennustejakauman tunnuslukuja (ks. Hull 2003, Tsay 2002).

Määritelmä. (*Value at Risk* lyh. VaR) luottamustasolla α on tappion ennustejakauman $(1-\alpha)-$kvantiili

$$VaR_\alpha(t, t+T) = \inf\{q \in \mathbb{R} \mid F_{t,L_{[t,t+T]}}(q) \geq \alpha\}.$$

Odotettu tappio (ES, $Expected\ Shortfall, TailVaR$) luottamustasolla α on odotusarvo ehdolla, että tappio on suurempi kuin VaR

$$ES_\alpha(t, t+T) = \mathbf{E}\{L_{[t,t+T]} \mid L_{[t,t+T]} \geq VaR_\alpha(t, t+T)\}.$$

Huomautus. 1) ES ja VaR arvojen määrittämiseen tarvitaan siis *luottamustaso, ennustehorisontti ja tappion ennustejakauma*. Luottamustaso α on tyypillisesti 5 % tai 1 %, tai jopa pienempi. 2) Riskienhallinassa käytetään tappiojakauman sijasta usein *P&L-jakaumaksi* kutsuttua satunnaismuuttujan -$L_{[t,t+T]}$ jakaumaa. Tällöin VaR arvot saatetaan esittää negatiivisina. 3) Optioita tarkasteltaessa herkkyysparametrit (kreikkalaiset) ovat komponetteja lineaarisen approksimaation kaavassa. 4) .

Esimerkki: (*Normaalijakauman VaR ja ES*) Oletetaan, että tappion ennustejakauma $F_{t,L_{[t,t+T]}}$ on normaali odotusarvonaan μ ja varianssinaan σ. Tällöin luottamustasolla α

$$VaR_\alpha(t, t+T) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi),$$

ja

$$ES_\alpha(t, t+T) = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha(\Phi))}{1-\alpha} = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha(\Phi))}{1 - \Phi(q_\alpha(\Phi))},$$

missä φ ja Φ ovat standardoidun normaalijakauman tiheys- sekä kertymäfunktiot ja $q_\alpha(\Phi)$ jakauman Φ $(1-\alpha)$ -kvantiili.

Esimerkki: (*RiskMetrics*) J.P. Morgan kehitti RiskMetrics^{TM} metodologian VaR arvon laskemiseksi. Metodissa oletetaan, että logaritminen päivän tuotto $r_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, missä $(0 < a < 1)$

$$\sigma_t^2 = a\sigma_{t-1}^2 + (1-a)r_{t-1}^2.$$

Tätä kutsutaan IGARCH(1,1) -malliksi (ks. kohta 6.3 "Volatiliteetin mallinuksesta"). Mallilla on voimassa ns. neliöjuurikaava VaR arvolle:

$$VaR_\alpha(t, t+T) = \sqrt{T} \times VaR_\alpha(t, t+1).$$

Koska mallissa oletetaan odotusarvon olevan 0, se sopii muutamien päivien ja viikkojen riskiarvioihin. Embrechts ym. (2004) perustelevat, että pidemmillä - vähintään vuoden periodeille - moniin aineistoihin näyttää sopivan paremmin malliksi satunnaiskulku, jolla on nollasta poikkeava odotusarvo.

Esimerkki. (*Option VaR*) Optiot ovat epälineaarisia, joten lineaarinen tappiofunktio on niille vain karkea approksimaatio. Parempi arvio saadaan kun ottamalla huomioon myös gamma-termin. Olkoon option hinta P ja lyhyen ajan muutos $\delta x = \delta S/S$. Tällöin voidaan approksimoida

$$\delta P = S\Delta\delta x + (1/2)S^2\Gamma(\delta x)^2.$$

Tämä suure *ei ole* normaalisti jakautunut, mutta siihen voidaan soveltaa jotakin normaaliapproksimaatiota, jolloin tulos on usein tarkempi kuin lineaarisen kaavan antama.

VaR ja ES käsitteiden tulkinta

Tappion ennustejakauman tunnusluvut ES ja VaR eroavat tulkinnaltaan.

• Voidaan sanoa, että todennäköisyydellä α tappion suuruus ajan T kuluttua on korkeintaan arvo $VaR_\alpha(t, t+T)$.
• VaR arvo ei riipu mitenkään α-kvantiilia suurempien arvojen jakaumasta. On kuitenkin tärkeää tietää esimerkiksi, johtaako $100 \times \alpha$ % pahimpia tappioita keskimäärin konkurssiin vai ovatko tappiot tällöin hallittavissa. Mitta ES kertoo tappioiden keskimääräisen vakavuuden $100 \times \alpha$ % pahimpia tapauksia.
• VaR käsitettä käytetään kuvaamaan kolmea eri asiaa. 1) Yllä annettua teknistä määritelmää. 2) Riskinarvioinnin menetelmää. 3) Riskinhallinnan yleistä lähestymistapana (tällöin ES on eräs VaR metodi).

Tappion ennustejakauma voidaan estimoida suoraan aineistoista ei-parametrisesti ns. historiallista simulointia käyttäen. Oletetaan, että T-periodin tappiot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita sekä jatkuvia satunnaismuuttujia. Olkoot menneisyyden tappiot suuruusjärjestyksessä $r_{(1)}, r_{(2)}, r_{(3)}, ..., r_{(n)}$ ($r_{(1)}$ pienin). Oletetaan, että $q = n\alpha$ on kokonaisluku. Tällöin voidaan osoittaa, että suureen $VaR_\alpha(t, t+$

$T) = x_\alpha$ estimointiin käytettävälle järjestysstatistiikalle $r(q)$ pätee asymptoottisesti normaaliapproksimaatio:

$$r(q) = N\left[x_\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n(f(x_\alpha))^2}\right].$$

ja edelleen päätellä, että VaR:n ennustevirhe:

- pienenee kun otoskoko n kasvaa,
- kasvaa kun prosenttipiste α pienenee,
- riippuu jakauman hännän paksuudesta (arvosta $f(x_\alpha)$).

Normaalijakauman lisäksi rahoituksessa käytetään normaalijakaumaa paksuhäntäisemmän jakauman mallina usein t-jakaumaa. Hyvin harvinaisia, mutta samalla suurimpia riskejä tutkittaessa, käytetään myös ääriarvojakaumia.

Seuraava ns. *koherenttisuuden* käsite on hyödyllinen mm. sijoitussalkkujen riskin arvioinnissa. Dhaene ym. (2003 ja 2007) perustelee miksi kaikkiin tilanteisiin sopivaa riskimitan määritelmää ei voi löytää. Esimerkiksi seuraavaksi koherenttisuusominaisuus ei ole järkevä vaatimus kaikissa sovelluksissa.

Määritelmä. Riskimittaa ρ kutsutaan *koherentiksi* (ks. Artzner ym. 1999), jos kaikille tappiofunktioille L_1 ja L_2 sekä vakioille $k > 0$ on voimassa:

Subadditiivisuus:	1)	$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$,
Homogeenisuus:	2)	$\rho(kL_1) = k\rho(L_1)$,
Monotonisuus:	3)	$\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$, kun $L_1 \leq L_2$,
Siirtoinvarianssi:	4)	$\rho(L_1 + k) = \rho(L_1) + k$.

Koherentin riskimittarin aksioomia voidaan perustella esimerkiksi seuraavalla tavalla. Subadditiivisuus on tarpeen, jotta kokonaisriskille saadaan turvallinen arvio osariskien summana. Homogeeniseen riskimittariin perustuva arvio ei riipu käytetystä yksiköstä, kuten valuutasta. Monotonisuuden nojalla kahdesta sijoituksesta aina (varmuudella) tappiollisempi on myös riskillisempi. Siirtoinvarianssin perusteella tappion kasvaminen määrän k kasvattaa riskiä vastaavan määrän.

Lause 6.1. *Jos tappion ennustejakaumat ovat jatkuvia, on ES koherentti. Jos tappiojakaumat ovat normaaleja, on myös VaR koherentti.*

Oheisessa taulukossa on tarkasteltu osakkeiden *arvonmuutoksiin* liittyvää riskiä 95 % VaR arvon avulla eri sijoitusperiodeilla. Aineisto koostuu alueellisista osakkeiden hintaindekseistä. Pisimmät sarjoista ovat vuodesta 1921. Kaikki sarjat päättyvät vuoteen 1996. Kullekin sijoitusperiodille ja aineistolle on estimoitu log-normaali jakauma, jonka perusteella VaR-arvot on määritetty. Keskiarvo on laskettu aineistosta, joka sisältää 30 valtiota (kehittyneet maat sisältyvät joukkoon). Taulukon indekseistä pienimmät 95 % VaR riskit ovat kaikilla periodeilla globaali-indeksi, Yhdysvaltojen indeksi ja indeksien keskiarvo. Jokaisella indeksillä riski kasvaa sijoitusperiodin pidentymisen myötä. Kysymys siitä, johtaako sijoitushorisontin pidentäminen lopulta osakesijoitusten riskin pienenemiseen, on kiistanalainen ja liittyy siihen ovatko osakkeiden hinnat keskiarvoon hakeutuvia. Asiaa ovat viime vuosina tutkineet mm. Jorion (2000) sekä Goetzman ja Jorion (2000).

alue	**1 vuosi**	**5 vuotta**	**10 vuotta**
Yhdysvallat	27.8 %	45.5 %	51.2 %
Iso-Britania	24.5 %	54.8 %	50.8 %
Suomi	33.3 %	77.6 %	85.2%
Japani	37.8 %	95.1 %	98.5 %
Keskiarvo	32.9 %	61.0 %	66.7 %
Globaali	20.8 %	40.4 %	41.1 %

Arvonmuutoksille laskettu 95% VaR arvo
alueellisilla indekseillä ja eri sijoitusperiodeilla (Jorion 2000).

6.2 Yhteisintegroituvuudesta

Taloudellisten aikasarjojen mallinnuksessa keskeinen kysymys on usein se, onko sarjan generoiva prosessi keskiarvoon hakeutuva vai ns. yksikköjuuri- prosessi. Epästationaarista aikasarjaa y_t kutsutaan *yksikköjuuriprosessiksi*, jos sen differenssi $\triangle y_t = y_t - y_{t-1}$on stationaarinen. Koska yksikköjuuriprosessi y_t saadaan stationaariseksi yhdellä differoinnilla, sen sanotaan olevan astetta 1 integroituva (merk. $y_t \sim I(1)$). Stationaarista prosessia x_t kutsutaan vastaavasti astetta 0 integroituvaksi (merk. $x_t \sim I(0)$). Satunnaiskulku $y_t = y_{t-1}+\varepsilon_t$, missä innovaatiot ovat ns. *valkoisen kohinan prosessi* - $\mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = 1$ $\forall t$ ja $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$, kun $t \neq k$ - on esimerkki yksikköjuuriprosessista. Stationaaristen ja yksikköjuuriprosessien eroa voidaan luonnehtia seuraavasti (ks. Campbell ym 1997, Alexander 2001):

Stationaarinen prosessi. Jos $x_t \sim I(0)$ ja $E(x_t) = 0$, niin
1) innovaatioilla ei ole pysyvää vaikutusta,
2) x_t:n varianssi on äärellinen,
3) autokorrelaatiot vähenevät niin, että niiden summa on äärellinen,
4) tason x = 0 peräkkäisten ylitysten väliajan odotusarvo on äärellinen.

Yksikköjuuriprosessi. Jos $x_t \sim I(1)$ ja $x_0 = 0$, niin
1) innovaatioiden vaikutus on pysyvä,
2) x_t:n varianssi lähestyy ääretöntä, kun t lähestyy ääretöntä,
3) x_t:n ja x_{t+k}:n korrelaatio lähestyy yhtä kaikilla k, kun t lähestyy ääretöntä,
4) tason x = 0 peräkkäisten ylitysten väliajan odotusarvo on ääretön.

Yksikköjuuriprosessien riippuvuuden mallintaminen regressioanalyysin avulla voi helposti johtaa ns. *näennäiseen regressioon* (spurious regression) seuraavalla tavalla. Estimoitaessa esimerkiksi korreloimattomien satunnaiskulkujen $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ ja $y_t = y_{t-1} + \zeta_t$ ($\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ja $\zeta_t \sim N(0,1)$) muodostamasta aineistosta regressio $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \xi_t$ saadaan usein nollasta eroavat kertoimet tilastollisesti merkitseviksi ja korkea R^2 arvo. Tähän tulokseen riittää se, että molemmat sarjat *sattuvat* kasvamaan tai vähenemään estimointiperiodilla. Vaikka sarjoille on voimassa $x_t \sim I(1)$ ja $y_t \sim I(1)$, on mahdollista, että on olemassa sellainen vakio α, että

$$y_t - \alpha x_t \sim I(0).$$

Tällöin sanotaan, että sarjat ovat *yhteisintegroituneita.* Yhteisintegroituneiden sarjojen välillä on siis tasapainorelaatio, josta sarjat saattavat poiketa paljonkin lyhyellä aikavälillä, mutta pitkällä aikavälillä tasapaino vallitsee. Sijoitusmarkkinoilla ennustettavuus on yleensä harvinaista, joten tarkasteltavat sarjat ovat usein satunnaiskävelyjä ja siten yksikköjuuriprosesseja. Erityisesti pitkän tähtäimen sijoitustoiminnassa yhteisintegroituvuusrelaatioilla voi olla suuri merkitys. Koron dynamiikka näyttää olevan empiirisen tutkimuksen perusteella yksikköjuuriprosessi. Korkojen erot taas vaikuttavat yhteisintegroituneilta. Tilastotieteen ja ekonometrian kirjallisuudessa on esitetty lukuisa joukko yksikköjuuren ja yhteisintegroituvuuden testausmenetelmiä. Teoria on myös yleistetty useammalle kuin kahdelle aikasarjalle ja korkeamman asteen integroituvuudelle.

Esimerkki: Oletetaan, että seuraavat relaatiot ovat voimassa (innovatiot korreloimattomia valkoisen kohinan prosesseja):

$$x_t = w_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$y_t = w_{t-1} + \zeta_t,$$

$$w_t = w_{t-1} + \xi_t.$$

Tällöin sarjat x_t ja y_t ovat yhteisintegroituneita, sillä $y_t - x_t = \varepsilon_t - \zeta_t \sim I(0)$. Muuttujaa w_t kutsutaan sarjojen x_t ja y_t yhteiseksi (stokastiseksi) trendiksi.

6.3 Volatiliteetin mallinnuksesta

Logaritmisten sijoitustuottojen jakauma ei empiiristen tutkimusten perusteella ole normaali. Jakauma on normaalijakaumaa huipukkaampi. Lisäksi suuret vaihtelut keskittyvät tietyille ajanjaksoille, jolloin volatiliteetti on aikariippuva eli *heteroskedastinen* (heteroscedastic). Näiden optioiden hinnottelun ja riskienhallinnan kannalta tärkeiden ominaisuuksien kuvaamiseen on kehitetty (diskreetille aikasarjalle) tilastollinen ns. ARCH(1) -malli (ks. Campbell ym 1997, Tsay 2002), jonka määrittelevä prosessi on

$$u_t = \varepsilon_t (a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^{1/2},$$

joka on (heikosti) stationaarinen, kun parametrit toteuttavat ehdot $a_0 > 0$ ja $0 < a_0 < 1$. Innovaatiot ε_t muodostavat valkoisen kohinan prosessin. Prosessin odotusarvo on

$$\mathbf{E}(u_t) = \mathbf{E}(\varepsilon_t)\mathbf{E}(a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^{1/2} = 0$$

ja varianssi on prosessin ollessa stationaarinen

$$\mathbf{E}(u_t^2) = \mathbf{E}(\varepsilon_t^2)\mathbf{E}(a_0 + a_1 u_{t-1}^2) = a_0 + a_1 \mathbf{E}(u_{t-1}^2) = a_0/(1 - a_1).$$

Ehdollinen odotusarvo informaatiojoukon $\Omega_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}...\}$ suhteen on

$$\mathbf{E}(u_t \mid \Omega_{t-1}) = \mathbf{E}(\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1})(a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^{1/2} = 0$$

eli vakio. Ehdollinen varianssi on

$$\mathbf{E}(u_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2)(a_0 + a_1 u_{t-1}^2) = a_0 + a_1 u_{t-1}^2.$$

Siis ehdollinen varianssi on *aikariippuva*. Normaalisti jakautuneille innovaatioille ε_t on voimassa yhtälö

$$\mathbf{E}(u_t^4 \mid \Omega_{t-1}) = 3[\mathbf{E}(u_t^2 \mid \Omega_{t-1})]^2 = 3(a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^2.$$

Jotta $\mathbf{E}(u_t^4)$ on olemassa ja vakio, on oltava $1 - 3a_1^2 > 0$ ja $0 \le a_1^2 < 1/3$. Tällöin saadaan

$$\mathbf{E}(u_t^4) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(u_t^4 \mid \Omega_{t-1})] = 3\mathbf{E}[(a_0 + a_1 u_{t-1}^2)^2] = \frac{3a_0^2(1 + a_1)}{(1 - a_1)(1 - 3a_1^2)},$$

joten prosessi on normaalijakaumaa *huipukkaampi*

$$\frac{\mathbf{E}(u_t^4)}{[var(u_t)]^2} = \frac{3a_0^2(1 + a_1)}{(1 - a_1)(1 - 3a_1^2)} \times \frac{(1 - a_1)^2}{a_0^2} = 3\frac{1 - a_1^2}{1 - 3a_1^2} > 3.$$

ARCH(1) -mallin uskottavuusfunktio on

$$f(u_1, u_2, u_3, ..u_T \mid a_0, a_1) = f(u_T \mid \Omega_{T-1}) \times f(u_{T-1} \mid \Omega_{T-2}) \times ... \times f(u_2 \mid \Omega_1) \times f(u_2 \mid a_0, a_1)$$

$$= \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{u_t^2}{2\pi\sigma_t^2}\right] \times f(u_1, u_2, u_3, ..u_T \mid a_0, a_1),$$

missä $f(u_1, u_2, u_3, ..u_T \mid a_0, a_1)$ on havaintojen $u_1, u_2, u_3, ..u_T$ yhteistiheysfunktio.

Huomautus. ARCH(1) on esimerkki prosessista, jonka muutoksen ennustamisessa menneiden arvojen tunteminen eli informaatiojoukko $\Omega_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}...\}$ ei hyödytä. Prosessin varianssissa sen sijaan on ennustettavuutta, kuten kaava $\mathbf{E}(u_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = a_0 + a_1 u_{t-1}^2$ osoittaa. Varianssin ennustettavuus ei ole tehokkaiden markkinoiden hypoteesin vastainen ominaisuus.

ARCH(1) -malli voidaan yleistää korkeamman asteen autoregressiiviseksi ARCH(p) -malliksi ($p > 1$)

$$u_t = \varepsilon_t (a_0 + a_1 u_{t-1}^2 + a_1 u_{t-2}^2 + ... + a_1 u_{t-p}^2)^{1/2}$$

ja edelleen liukuvan keskiarvon termin sisältäväksi GARCH(m,n) -malliksi, jonka määrittelevät yhtälöt

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sigma_{t-i}^2.$$

GARCH(m,n) -mallin soveltaminen sisältää tavallisesti seuraavat vaiheet:

1) tuottosarjaan sovitetaan tilastollinen malli (esim. ARMA) mahdollisten lineaaristen riippuvuuksien poistamiseksi ja testataan esiintyykö residuaaleissa heteroskedastisuutta,

2) määritetään mallin keroimet m ja n, jonka jälkeen suoritetaan estimointi (esim. suurimman uskottavuuden menetelmällä),

3) testataan mallin sopivuus (esim. residuaalien normaalisuutta testaamalla) ja korjataan mallia jos tarpeen.

ARCH -mallin yleistykset

Finanssiekonometrian kirjallisuudessa on esitetty toistasataa ARCH -mallin muunnelmaa ja yleistystä. Niiden motiivina ovat ARCH(p) -mallin seuraavat ominaisuudet:

• Positiivisilla ja negatiivisilla shokeilla on samanlainen vaikutus ehdolliseen varianssiin. Käytännössä shokkien vaikutukset ovat erilaiset.
• Mallin parametrit ovat hyvin rajoittuneet. Esim. ARCH(1) -mallin parametrin a_1 tulee kuulua välille [0, 1/3], jotta 4. momentti olisi olemassa.
• Malli kuvaa mekaanisesti ehdollisen varianssin eikä auta selittämään sarjan vaihtelua.
• Varianssin ennusteet ovat usein liian suuria. Tämä johtuu hitaasta reagoinnista suuriin yksittäisiin shokkeihin.

7 Henkivakuutussopimuksen käyvän arvon määritys

"Abonding the established actuarial precautions and relying entirely on the financial markets to come to our rescue, is not a responsible strategy. The way forward lies somewhere in the middle."
RAGNAR NORBERG

Monisteen loppuosassa on tarkoitus perehdyttää lukija henkivakuutusvastuiden käypään arvottamiseen modernin rahoitusteorian perusperiaatteiden sekä klassisen vakuutusmatematiikan suurten lukujen lakiin perustuvien henkivakuutusriskien hajautuksen periaatteiden mukaisesti. Perusajatuksena on tarkastella vakuutussopimuksen generoimaa kokonaistappiota ja pyrkiä määrittämään preemiot siten, että vakuutus on klassisessa aktuaarimielessä reilu. Algoritmisesti ajatellen lähestymistapa ongelmiin on seuraavanlainen:

1. Identifioidaan sijoitussidonnaisen vakuutussopimuksen generoimaa vastuuta kuvaava palkkio (tarvitaan markkinaperustaisen käyvän arvon määrittämiseen);

2. Annettuna kuolleisuustodennäköisyydet määritetään se sijoitusportfolio joka suojaa yhtiön sopimuksen markkinaperustaiselta sijoitusriskiltä;

3. Muodostamalla riittävän hajautettu vakuutussopimusportfolio eliminoidaan vakuutusriski vetoamalla suurten lukujen lakiin ja valitaan preemiot siten, että vakuutus on aktuaarimielessä reilu.

7.1 Määritys ilman korkoriskiä

Tässä kappaleessa on tarkoituksena havainnollistaa eksplisiittisesti miten rahoitusinstrumenttien käyvän arvon määritystekniikoita voidaan soveltaa henkivakuutusinstrumenttien hinnoittelussa. Hinnoittelun perusideana on yhdistää klassisen suurten lukujen lakiin pohjautuvan yhdistämisvaikutus rahoitusinstrumenttien hinnoitteluun. Analyysin toteuttamiseksi oletamme, että *kuolleisuusriski ja markkinariski ovat toisistaan tilastollisesti riippumattomia*. Tämä helpottaa odotettujen vastuiden arvonmääritystä merkittävästi, sillä se sallii henki- ja markkinariskin erillisen tarkastelun. Tätä kautta henkivakuutusriskiä voidaan pyrkiä eliminoimaan suurten lukujen lain pohjalta ja sijoitussidonnaisten sopimusten generoimilta markkinaperustaisilta vastuilta voidaan suojautua hajauttamalla riskiä sopivasti valitun johdannaissuojauksen avulla.

Merkitään nyt merkinnällä n_x x-ikäisten vakuutettujen lukumäärää nykyhetkellä ja oletetaan, että vakuutuksenottajien elinajat $\{T_i\}_{i=1}^{n_x}$ muodostavat identtisesti ja toisistaan riippumattomasti jakautuneen jonon satunnaismuuttujia. Tällöin laskuriprosessi

$$N_t = \sum_{i=1}^{n_x} 1_{(t,\infty)}(T_i), \quad N_0 = n_x$$

mittaa hetkellä t elossa olevien vakuutettujen lukumäärää. On selvää, että elinaikojen $\{T_i\}_{i=1}^{n_x}$ tilastollisista ominaisuuksista seuraavat identiteetit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda N_t}] &= \left(e^{\lambda}\mathbb{P}[T_1 > t] + \mathbb{P}[T_1 \le t]\right)^{n_x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{E}[N_t] &= n_x \mathbb{P}[T_1 > t] \\ \mathrm{var}[N_t] &= n_x \mathbb{P}[T_1 > t]\mathbb{P}[T_1 \le t]. \end{aligned}$$

Erityisesti suurten lukujen lain nojalla havaitaan, että

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} N_t = \lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} 1_{(t,\infty)}(T_i) = \mathbb{P}[T_1 > t].$$

Edellä kuvattiin kuolleisuusriskiä ja sen tilastollisia ominaisuuksia. Markkinariskin kuvaamiseksi oletetaan, että riskineutraalin hinnoittelumitan $\mathbb{Q}$ alaisuudessa arvopaperin (tai yleisemmin kohde-etuuden) hintaprosessi määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä muotoa

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad S_0 = s \in \mathbb{R}_+,$$

missä $r > 0$ on vallitseva riskitön diskonttauskorko, volatiliteetti $\sigma > 0$ on tunnettu vakio ja $\tilde{W}_t$ on satunnaista dynamiikkaa ajava Brownin liike joka kuvaa sijoituksen kohtaamaa markkinariskiä.

7.1.1 Kertapreemioon perustuva sopimus

Annettuna yllä esitetty karakterisointi vakuutettujen lukumäärästä sekä arvottamisen perustana olevasta arvopaperin satunnaisesta hintadynamiikasta, tarkastellaan nyt ensimmäisenä tapauksena kertapreemioon π perustuvaa vakuutusta joka takaa haltijalleen maturiteetissa T arvottamisen perustana olevan arvopaperin hinnasta riippuvan korvauksen $C(S_T)$ mikäli vakuutettu on maturiteetissa vielä elossa. Yksittäisen vakuutuksenottajan kassavirta F_i on siis muotoa

$$F_i = \{-\pi, 0, \ldots, C(S_T)\}, \quad \text{jos } T_i > T.$$

Tällöin yhtiön kokonaistappio edellä kuvatusta vakuutustuotteesta on muotoa

$$L_T = e^{-rT} N_T C(S_T) - n_x \pi.$$

Ottamalla tästä identiteetistä odotusarvo puolittain saadaan tulokseksi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = n_x \left(\mathbb{P}[T_1 > T]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C(S_T)] - \pi\right).$$

Havaitaan, että tämä odotusarvo häviää aina kun preemio on muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C(S_T)]. \tag{57}$$

Ts. käypä preemio voidaan tulkita ns. *modifioidun vaateen* $C_{\text{mod}}(S_T) = \mathbb{P}[T_1 > T]C(S_T)$ käypänä arvona, sillä se mittaa selviytymistodennäköisyydellä painotetun vaateen käypää arvoa.

On syytä huomata, että edellä johdettu tulos voidaan myös perustella käyttämällä rahoitusinstrumentteja vastuun suojaamiseksi (ts. muodostamalla suojaava portfolio). Tarkastellaan nyt asetelmaa, jossa yhtiö hankkii pääomamarkkinoilta vakuutussopimuksen solmimishetkellä a_0 kappaletta maturiteetin T omaavaa johdannaista joka takaa haltijalleen tuoton $C(S_T)$ maturiteetissaan. Yhdistetyn sopimuksen (vakuutussopimus+sijoitusportfolio) kokonaistappio on nyt muotoa

$$L_T = e^{-rT} N_T C(S_T) - n_x \pi - a_0(e^{-rT}C(S_T) - \Pi^T(C(s))), \tag{58}$$

missä $\Pi^T(C(s)))$ on johdannaisinstrumentin käypä markkinahinta. Ottamalla tästä identititeetistä puolittain odotusarvo havaitaan, että

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}C(S_T)](n_x \mathbb{P}[T_1 > T] - a_0) + a_0 \Pi^T(C(s)) - n_x \pi.$$

Valitsemalla sijoitusstrategiaksi $a_0 = n_x \mathbb{P}[T_1 > T]$ ja preemioksi $\pi = \mathbb{P}[T_1 > T]\Pi^T(C(s))$ saadaan odotettu tappio häviämään. Kuten edellä, käypä preemio voidaan tulkita modifioidun vaateen $\mathbb{P}[T_1 > T]C(S_T)$ käyväksi arvoksi. Koska vakuutusportfoliossa on kuitenkin n_x kappaletta vakuutussopimuksia huomataan, että modifioidun vaateen suojaavaksi portfoliostrategiaksi tulee valita $n_x \mathbb{P}[T_1 > T]$ kappaletta johdannaista.

On syytä huomata, että edellä tehty havainto pohjautui keskimääräisyysargumenttiin johon vakuutusportfolion mahdollinen hajautus ei vaikuta. Niinpä on luonnollista kysyä voidaanko edellä tehty havainto johtaa myös suurten lukujen lakiin perustuvilla riskiteoriasta tutuilla poolausargumenteilla. Valitsemalla sijoitusportfolio $a_0 = n_x \mathbb{P}[T_1 > T]$ ja jakamalla tappioprosessi (58) x-ikäisten vakuutuksenottajien lukumäärällä n_x saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n_x} L_T &= e^{-rT} \frac{N_T}{n_x} C(S_T) - \pi - \mathbb{P}[T_1 > T](e^{-rT}C(S_T) - \Pi^T(C(s))) \\
&= e^{-rT} C(S_T) \left[\frac{N_T}{n_x} - \mathbb{P}[T_1 > T] \right] + \mathbb{P}[T_1 > T]\Pi^T(C(s)) - \pi
\end{aligned}$$

Tällöin suurten lukujen lain nojalla havaitaan, että

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} L_T = \mathbb{P}[T_1 > T]\Pi^T(C(s)) - \pi \qquad \text{melkein varmasti.}$$

Ts. kuten tavallisestikin henkivakuutusmatematiikassa havaitsemme, että muodostamalla riittävän suuri vakuutusportfolio saadaan henkiriski eliminoitua ja jäljelle jää pelkästään markkinariskeistä riippuvia tekijöitä. Valitsemalla preemio π hinnoittelusäännön (57) mukaisesti johtaa tulokseen jonka mukaan

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} L_T = 0 \qquad \text{melkein varmasti.}$$

Klassisen riskiteorian mukaisesti havaitaan, että henkivakuutusriski on mahdollista eliminoida vakuutusportfolion hajautuksella (siis riittävällä vakuutettujen lukumäärällä) ja puolestaan sijoitusriskistä muodostuva osa voidaan hajauttaa pääomamarkkinoille.

Esimerkkejä: Tarkastellaan esimerkin vuoksi kahta vaihtoehtoista sijoitussidonnaista minimituoton (takuusumma sekä takuutuottovauhti) omaavaa sopimusta. Tarkastellaan ensiksi takuusumman K takaavaa sopimusta, jonka palkkio on muotoa

$$C(S_T) = \max(S_T, K) = K + (S_T - K)^+.$$

Käyvän arvon määritelmän mukaisesti havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\Pi^T(C(s)) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(K + (S_T - K)^+)] \\
&= e^{-rT} K \Phi(-\eta_T) + s \Phi\left(\eta_T + \sigma\sqrt{T}\right)
\end{aligned}$$

missä

$$\eta_T = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right).$$

Edellä tekemämme tarkastelun pohjalta havaitaan, että vakuutuksen käypä preemio on muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T] \left[e^{-rT} K \Phi\left(-\eta_T\right) + s\Phi\left(\eta_T + \sigma\sqrt{T}\right)\right].$$

Tarkastellaan nyt vaihtoehtoisesti sijoitetulle pääomalle periodikohtaisen tuoton $\max(R_g, \rho_t)$ takaavaa sopimusta kun $R_g > 1$ mittaa minimituottotakuuta ja

$$\rho_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma(\tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-1})} \tag{59}$$

on kohde-etuuden satunnainen kokonaistuotto aikavälin $[t-1, t]$ yli. Koska Brownin liikkeen $\tilde{W}_t$ lisäykset $\{\tilde{W}_T - \tilde{W}_{T-1}, \ldots, \tilde{W}_2 - \tilde{W}_1, \tilde{W}_1\}$ ovat toisistaan tilastollisesti riippumattomia ja $\tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-1} \sim N(0,1)$ kaikille $t \in \{1, \ldots, T\}$ havaitaan, että $\{\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i-1}\}_{i=1}^T$ muodostaa jonon toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Merkitään sijoitetun pääoman arvoa hetkellä t merkinnällä V_t. Tällöin sijoitetun pääoman arvo määräytyy differenssiyhtälöstä

$$V_t = \max(R_g, \rho_t) V_{t-1}, \quad V_0 = v,$$

missä v on vakuutetun hetkellä 0 sijoittama pääoma. Tämän differenssiyhtälön ratkaisu on muotoa

$$V_T = \left(\prod_{i=1}^{T} \max(R_g, \rho_i)\right) v = \left(\prod_{i=1}^{T} \left(R_g + (\rho_i - R_g)^+\right)\right) v.$$

Ajavan Wiener-prosessin muutoksien muodostaman jonon $\{\tilde{W}_i - \tilde{W}_{i-1}\}_{i=1}^T$ alkioiden riippumattomuudesta ja samoin jakautuneisuudesta seuraa suoraan, että

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} V_T] = \left(e^{-r} R_g + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r}\left(e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma\tilde{W}_1} - R_g\right)^+\right]\right)^T v.$$

Koska

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r}\left(e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma\tilde{W}_1} - R_g\right)^+\right] = \Phi\left(\zeta + \sigma\right) - e^{-r} R_g \Phi\left(\zeta\right), \tag{60}$$

missä

$$\zeta = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \ln R_g\right) \tag{61}$$

havaitaan, että sijoitetun pääoman käypä arvo maturiteetissa on

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} V_T] = \left(e^{-r} R_g \Phi\left(-\zeta\right) + \Phi\left(\zeta + \sigma\right)\right)^T v. \tag{62}$$

Tässä tapauksessa vakuutuksen käypä preemio on luonnollisesti muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T]\left(e^{-r} R_g \Phi\left(-\zeta\right) + \Phi\left(\zeta + \sigma\right)\right)^T v.$$

On syytä painottaa, että periodikohtaisen minimituoton R_g takaavien sopimusten käyvät arvot ovat melko korkeita ja siten riskillisiä instrumentteja liikkeellelaskijan näkökulmasta. Seuraavassa taulukossa havainnollistetaan tällaisen sopimuksen käypää arvoa $\Pi(V_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} V_T]$ volatiliteetin sekä maturiteetin funktiona kun $v = 1, R_g = e^{0.04}$ ja $r = 3.5\%$ (jolloin takuun generoima ylituotto suhteessa riskittömään tuottoon on $R_g - e^r \approx 0.52\%$). Taulukosta 1 havaitaan, että periodikohtaisen minimituoton R_g takaavan sopimuksen käypä arvo kasvaa sekä maturiteetin että arvottamisen perustana olevan kohde-etuuden volatiliteetin funktiona. Kuten Taulukosta 1 voidaan kuitenkin havaita, on sopimuksen käypä arvo erittäin herkkä kohde-etuuden volatiliteetin muutoksien suhteen ja maturiteetin kasvu voimistaa tätä herkkyyttä. Esimerkiksi yhden periodin kestävän vastuun osalta minimituoton R_g takaavan sopimuksen käypä arvo kasvaa 5.85% kun kohde-etuuden volatiliteetti kasvaa 5%:sta 20%:iin. Vastaavasti 10 periodia kestävän vastuun osalta sopimuksen käypä arvo kasvaa jo 76.51% kun kohde-etuuden volatiliteetti kasvaa 5%:sta 20%:iin. Minimituoton R_g ja vallitsevan riskittömän kokonaistuoton e^r välisen erotuksen vaikutusta käypään arvoon kohde-etuuden volatiliteetin sekä vakuutussopimuksen maturiteetin funktiona

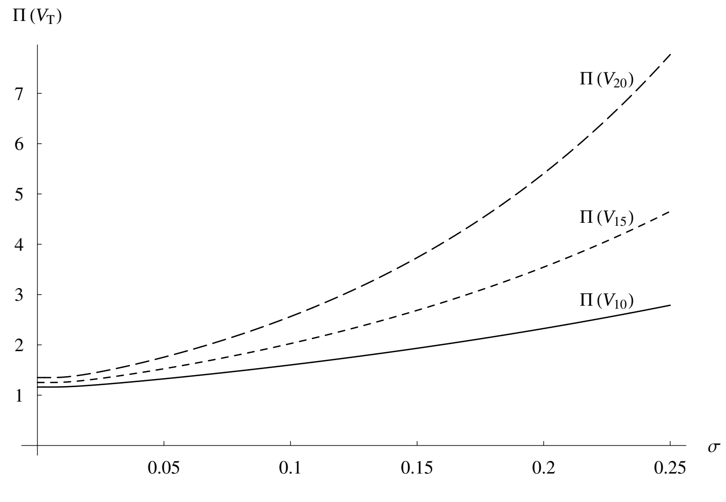
σ	$\Pi(V_1)$	$\Pi(V_5)$	$\Pi(V_{10})$	$\Pi(V_{15})$	$\Pi(V_{20})$	$\Pi(V_{25})$	$\Pi(V_{30})$
5%	1.023	1.118	1.25	1.398	1.564	1.748	1.955
10%	1.043	1.232	1.517	1.868	2.3	2.833	3.489
15%	1.062	1.354	1.833	2.482	3.36	4.55	6.16
20%	1.082	1.486	2.207	3.279	4.871	7.237	10.75

Taulukko 1: Tuoton $\max(R_g, \rho_t)$ takaavan sijoitussidonnaisen sopimuksen käypä arvo

σ	$\Pi(V_1)$	$\Pi(V_5)$	$\Pi(V_{10})$	$\Pi(V_{15})$	$\Pi(V_{20})$	$\Pi(V_{25})$	$\Pi(V_{30})$
5%	1.029	1.151	1.325	1.525	1.756	2.021	2.327
10%	1.048	1.265	1.601	2.026	2.563	3.243	4.103
15%	1.068	1.39	1.932	2.686	3.734	5.191	7.216
20%	1.088	1.525	2.325	3.545	5.406	8.243	12.57

Taulukko 2: Tuoton $\max(R_g, \rho_t)$ takaavan sijoitussidonnaisen sopimuksen käypä arvo

havainnollistetaan Taulukossa 2 kun $v = 1, R_g = e^{0.05}$ ja $r = 3.5\%$ (jolloin takuun generoima ylituotto suhteessa riskittömään tuottoon on $R_g - e^r \approx 1.57\%$) Taulukko 2 havainnollistaa miten ylituoton $R_g - e^r$ kasvu kasvattaa vastuiden käypää arvoa. Vertailemalla taulukon 1 sekä taulukon 2 arvoja on kuitenkin selvää, että kohde-etuuden volatiliteetti on kuitenkin selkeästi keskeinen tekijä käyvässä arvossa. Vastuiden käypää arvoa volatiliteetin funktiona eri maturiteeteille on kuvattu kuvassa 1. Taulukoissa tekemiemme havaintojen mukaisesti on selvää, että mitä pidempi sopimus sitä herkempi on sen arvo kohde-etuuden volatiliteetin funktiona.



Kuva 1: Käypä arvo $\Pi(V_T)$ volatiliteetin σ funktiona

Edellisen tarkastelun yleistämiseksi tilanteeseen, jossa vakuutuksenottaja voi omalla säästämisellään vaikuttaa vakuutuskorvauksen suuruuteen, tarkastellaan nyt kertapreemioon π sekä kertakorvaukseen perustuvaa säästävää vakuutussopimusta joka takaa haltijalleen periodikohtaisen tuoton $\max(\rho_t, R_g)$, missä ρ_t on yhtälössä (59) määritelty kohde-etuuden periodikohtainen kokonaistuotto. Oletetaan myös, että

(a) vakuutuksenottaja sijoittaa vakuutussopimuksen juoksuaikana $\{0, 1, \ldots, T\}$ periodittain summan s_t;

(b) maturiteetissa ei tapahdu lisäsijoitusta, jolloin $s_T = 0$;

(c) vakuutuksenottaja saa vakuutussopimuksen generoiman pääoman maturiteetissa T vain siinä tapauksessa, että on elossa sopimuksen maturiteetissa.

Annettuna edellä esitetty vakuutussopimuksen kuvaus havaitaan, että yhtiön vakuutuskohtainen kokonaistappio on nyt muotoa

$$L_T = e^{-rT}\hat{V}_T N_T - n_x\pi,$$

missä $\hat{V}_T$ on sijoitetun pääoman arvo maturiteetissa. On selvää, että tämän esimerkin tapauksessa arvoprosessi $\hat{V}_t$ määräytyy stokastisesta differenssiyhtälöstä

$$\hat{V}_t = \max(\rho_t, R_g)\hat{V}_{t-1} + s_t, \quad \hat{V}_0 = v. \tag{63}$$

Iteroimalla tätä yhtälöä havaitaan, että ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$\hat{V}_T = \left(\prod_{i=1}^{T}\max(\rho_i, R_g)\right)v + \sum_{j=1}^{T-1} s_j \prod_{i=j+1}^{T}\max(\rho_i, R_g). \tag{64}$$

Tällöin diskonttaamalla saadaan

$$e^{-rT}\hat{V}_T \quad = \quad \left(\prod_{i=1}^{T} e^{-r}\max(\rho_i, R_g)\right)v + \sum_{j=1}^{T-1} e^{-rj}s_j \prod_{i=j+1}^{T} e^{-r}\max(\rho_i, R_g),$$

josta puolestaan seuraa, että vastuun käypä arvo on yhtälön (62) nojalla muotoa

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\hat{V}_T] = \left[v + \sum_{j=1}^{T-1}(e^r\mathfrak{M})^{-j}s_j\right]\mathfrak{M}^T \tag{65}$$

missä

$$\mathfrak{M} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r}\max(\rho_1, R_g)] = e^{-r}R_g\Phi\left(-\zeta\right) + \Phi\left(\zeta + \sigma\right). \tag{66}$$

Tapauksessa, jossa säästösumma on vakio (eli $s_k \equiv s \in \mathbb{R}_+$ kaikille $k \in \{1, \ldots, T-1\}$) saadaan vastuun käypä arvo muotoon

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\hat{V}_T] = \mathfrak{M}^T v + \frac{s\mathfrak{M}^T}{e^r\mathfrak{M} - 1}\left[1 - \frac{1}{(e^r\mathfrak{M})^{T-1}}\right]. \tag{67}$$

Tässä tapauksessa vakuutuksen käypä preemio on muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T]\left[v + \sum_{j=1}^{T-1}(e^r\mathfrak{M})^{-j}s_j\right]\mathfrak{M}^T.$$

On syytä painottaa, että edellä tarkastellun säästävän vakuutussopimuksen vastuiden käypä arvo on erittäin herkkä volatiliteetin muutoksien suhteen ja pienetkin muutokset volatiliteetissa saattavat vaikuttaa radikaalisti vastuiden käypään arvoon. Niinpä se voidaan katsoa poikkeuksellisen riskilliseksi liikkeellelaskijan näkökulmasta. Tämä huomio korostaa jälleen kohde-etuuden riskiltä suojautumisen merkitystä sijoitussidonnaisten sopimuksien osalta. Seuraavassa taulukossa havainnollistetaan käypää arvoa $\Pi(\hat{V}_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\hat{V}_T]$ volatiliteetin sekä maturiteetin funktiona kun $v \equiv s_k = 1, R_g = e^{0.04}$ ja $r = 3.5\%$ (jolloin takuun generoima ylituotto suhteessa riskittömään tuottoon on $R_g - e^r \approx 0.52\%$). Taulukosta 3

σ	$\Pi(\hat{V}_1)$	$\Pi(\hat{V}_5)$	$\Pi(\hat{V}_{10})$	$\Pi(\hat{V}_{15})$	$\Pi(\hat{V}_{20})$	$\Pi(\hat{V}_{25})$	$\Pi(\hat{V}_{30})$
5%	1.0226	5.002	9.792	14.47	19.14	23.89	28.8
10%	1.0425	5.314	11	17.3	24.45	32.74	42.54
15%	1.0625	5.643	12.38	20.73	31.41	45.33	63.72
20%	1.0824	5.989	13.93	24.91	40.55	63.21	96.41

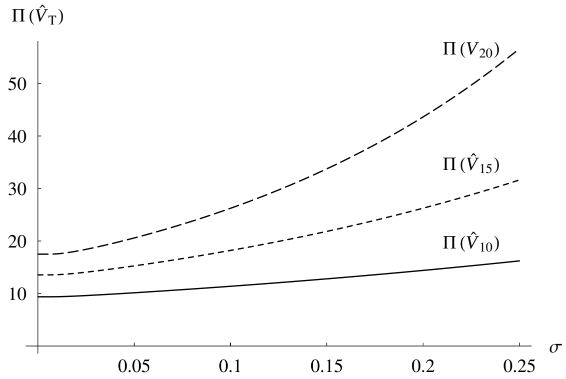
Taulukko 3: Tuoton $\max(R_g, \rho_t)$ takaavan säästävän sijoitussidonnaisen sopimuksen käypä arvo

voidaan havaita, että säästävän vakuutussopimuksen käypä arvo on sekä maturiteetin että arvottamisen perustana olevan kohde-etuuden volatiliteetin kasvava funktio. Kuten minimituottotakuusopimuksenkin tapauksessa, säästävän sopimuksen käypä arvo on erittäin herkkä kohde-etuuden volatiliteetin muutoksien suhteen ja maturiteetin kasvu vain voimistaa tätä herkkyyttä. Esimerkiksi viiden periodin kestävän vastuun osalta sopimuksen käypä arvo kasvaa 19.74% kun kohde-etuuden volatiliteetti kasvaa 5%:sta 20%:iin. Vastaavasti 20 periodia kestävän vastuun osalta sopimuksen käypä arvo kasvaa jo 111.80% kun kohde-etuuden volatiliteetti kasvaa 5%:sta 20%:iin. Ylituoton $R_g - e^r$ kasvun vaikutusta vastuun käypään arvoon havainnollistetaan taulukossa 4 kun $v \equiv s_k = 1, R_g = e^{0.05}$ ja $r = 3.5\%$ (jolloin takuun generoima ylituotto suhteessa riskittömään tuottoon on $R_g - e^r \approx 1.57\%$). Aikaisempien havaintojemme mukaisesti

σ	$\Pi(\hat{V}_1)$	$\Pi(\hat{V}_5)$	$\Pi(\hat{V}_{10})$	$\Pi(\hat{V}_{15})$	$\Pi(\hat{V}_{20})$	$\Pi(\hat{V}_{25})$	$\Pi(\hat{V}_{30})$
5%	1.029	5.093	10.14	15.26	20.58	26.22	32.3
10%	1.048	5.405	11.38	18.2	26.23	35.87	47.64
15%	1.068	5.739	12.79	21.83	33.74	49.75	71.55
20%	1.088	6.091	14.4	26.25	43.63	69.55	108.6

Taulukko 4: Tuoton $\max(R_g, \rho_t)$ takaavan säästävän sijoitussidonnaisen sopimuksen käypä arvo

nähdään, että vakuutusvastuiden käypä arvo on hyvin herkkä kohde-etuuden volatiliteetin muutoksien suhteen ja tämä herkkyys vain voimistuu maturiteetin kasvaessa. Säästävän vakuutussopimuksen käyvän arvon herkkyyttä volatiliteetin funktiona eri maturiteeteille on kuvattu kuviossa 2.



Kuva 2: Säästävän vakuutussopimuksen käypä arvo $\Pi(\hat{V}_T)$ volatiliteetin σ funktiona

Huomautus: On syytä mainita, että kertomalla differenssiyhtälö (63) puolittain diskonttaustekijällä e^{-rt} saadaan

$$K_t = \max(e^{-r}\rho_t, e^{-r}R_g)K_{t-1} + e^{-rt}s_t, \quad K_0 = v, \tag{68}$$

missä $K_t = e^{-rt}\hat{V}_t$ on sijoitetun pääoman nykyarvo. Ottamalla tästä yhtälöstä odotusarvo puolittain ja soveltamalla sekä ehdollisen odotusarvon torniominaisuutta että yhtälöitä (60) ja (62) johtaa tulokseen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[K_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(e^{-r}\rho_t, e^{-r}R_g)K_{t-1}] + e^{-rt}s_t \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(e^{-r}\rho_t, e^{-r}R_g)|\mathcal{F}_{t-1}]K_{t-1}] + e^{-rt}s_t \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max(e^{-r}\rho_1, e^{-r}R_g)]K_{t-1}] + e^{-rt}s_t \\
&= \mathfrak{M}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[K_{t-1}] + e^{-rt}s_t.
\end{aligned}$$

Tällä tavalla mv. maturiteetin omaavan vastuun käypä arvo (65) saadaan määritettyä differenssiyhtälön

$$A_t = \mathfrak{M}A_{t-1} + e^{-rt}s_t, \quad A_0 = v$$

ratkaisuna, sillä $A_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[K_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt}\hat{V}_t]$.

Edellä tehty arvoprosessin $\hat{V}_t$ autoregressiivisyyteen perustuva havainto voidaan yleistää suoraan myös tapaukseen, jossa aikavälien pituus ei välttämättä ole tasavälinen. Yleisemmin, oletetaan, että $\{\tau_i\}_{i=0}^k$ on ennaltakäsin määritelty jono ajanhetkiä jolle pätee $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = T$, missä T on tarkasteltavan vakuutussopimuksen maturiteetti. Annettuna jono $\{\tau_k\}$ säästävän vakuutussopimuksen arvo määräytyy stokastisesta differenssiyhtälöstä

$$\hat{V}_{\tau_i} = \max(\rho_{\tau_i}, R_g)\hat{V}_{\tau_{i-1}} + s_{\tau_i}, \quad \hat{V}_{\tau_0} = v, \tag{69}$$

missä

$$\rho_{\tau_i} = \frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_i-\tau_{i-1})+\sigma(\tilde{W}_{\tau_i}-\tilde{W}_{\tau_{i-1}})} \tag{70}$$

on kohde-etuuden kokonaistuotto yhden tarkasteluperiodin yli. Kertomalla yhtälö (69) puolittain diskonttaustekijällä $e^{-r\tau_i}$ saadaan tulokseksi

$$K_{\tau_i} = e^{-r(\tau_i-\tau_{i-1})}\max(\rho_{\tau_i}, R_g)K_{\tau_{i-1}} + e^{-r\tau_i}s_{\tau_i}, \quad K_{\tau_0} = v, \tag{71}$$

missä $K_{\tau_i} = e^{-r\tau_i}\hat{V}_{\tau_i}$. Ottamalla tästä yhtälöstä puolestaan odotusarvo puolittain ja soveltamalla ehdollisen odotusarvon torniominaisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[K_{\tau_i}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(\tau_i-\tau_{i-1})}\max(\rho_{\tau_i}, R_g)K_{\tau_{i-1}}] + e^{-r\tau_i}s_{\tau_i} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(\tau_i-\tau_{i-1})}\max(\rho_{\tau_i}, R_g)|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}]K_{\tau_{i-1}}] + e^{-r\tau_i}s_{\tau_i} \\
&= \hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[K_{\tau_{i-1}}] + e^{-r\tau_i}s_{\tau_i},
\end{aligned}$$

missä

$$\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i) = e^{-r(\tau_i-\tau_{i-1})}R_g\Phi(-\zeta(\tau_{i-1}, \tau_i)) + \Phi(\zeta(\tau_{i-1}, \tau_i) + \sigma\sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}}) \tag{72}$$

ja

$$\zeta(\tau_{i-1}, \tau_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau_i - \tau_{i-1}}}\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\tau_i - \tau_{i-1}) - \ln R_g\right). \tag{73}$$

Tämän havainnon pohjalta voidaan iteroimalla osoittaa, että säästävän vakuutussopimuksen generoiman vastuun käypä arvo on

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\hat{V}_T] = \left(\prod_{i=1}^{k}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v + \sum_{j=1}^{k-1}e^{-r\tau_j}s_{\tau_j}\prod_{i=j}^{k-1}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{74}$$

7.1.2 Useampipreemioinen sopimus

Edellisen kappaleen sopimuksissa preemio oli kertaluontoinen ja siten kappaleen tarkastelu ylenkatsoi useamman periodin yli ulottuvien preemiovirtojen vaikutuksen vastuiden käypään arvoon. Yleistämisen takia tarkastellaan nyt diskreetin preemiovirran omaavaa vakuutussopimusta, joka takaa kertaluontoisen kohde-etuuden arvosta sekä ajanhetkestä riippuvan kuolemantapauskorvauksen $C_i(s)$ (jossa tyypillisesti $C_i(s) \leq C_j(s)$ kun $i \leq j$). Oletetaan myös, että $\{\tau_i\}_{i=0}^k$ on ennaltakäsin määritelty jono ajanhetkiä jolle pätee $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = T$, missä T on tarkasteltavan vakuutussopimuksen maturiteetti. Tämän vakuutussopimuksen generoimia kassavirtoja voidaan nyt kuvata seuraavalla tavalla:

Aika	Preemiot	Korvaukset
τ_0	$\pi_{\tau_0}N_0$	0
τ_1	$\pi_{\tau_1}N_{\tau_1}$	$C_1(S_{\tau_1})(N_0 - N_{\tau_1})$
τ_2	$\pi_{\tau_2}N_{\tau_2}$	$C_2(S_{\tau_2})(N_{\tau_1} - N_{\tau_2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
τ_{k-1}	$\pi_{\tau_{k-1}}N_{\tau_{k-1}}$	$C_{k-1}(S_{\tau_{k-1}})(N_{\tau_{k-2}} - N_{\tau_{k-1}})$
τ_k	0	$C_k(S_{\tau_k})(N_{\tau_{k-1}} - N_T)$

Mikäli yllä esittämämme oletukset ovat voimassa, niin silloin vakuutussopimuksen generoiman konaistappion nykyarvo on

$$L_T = \sum_{i=1}^{k}e^{-r\tau_i}C_i(S_{\tau_i})(N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i}) - \sum_{i=0}^{k-1}e^{-r\tau_i}\pi_{\tau_i}N_{\tau_i}.$$

Kuten aikaisemmin määrittämällä tappion odotusarvo johtaa tulokseen

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i})] \left(\mathbb{P}[T_1 > \tau_{i-1}] - \mathbb{P}[T_1 > \tau_i]\right) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i].$$

Tällöin vakuutussopimuksen reilun hinnoittelun periaatteen mukaisesti määritetyn käyvän preemiovirran tulee toteuttaa ehto

$$\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i})] \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i], \tag{75}$$

sillä $\mathbb{P}[T_1 > \tau_{i-1}] - \mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]$. Erityisesti siis havaitaan, että mikäli preemiovirta $\pi_{\tau_i} \equiv \pi$ on vakio ja vakuutuksen hinnoittelu aktuaarimielessä reilu, niin silloin

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i})] \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}. \tag{76}$$

Johdetaan tämä tulos nyt myös nojaamalla suojaavan sijoitusportfolion muodostamisen ideaan. Tämän kappaleen tapauksessa yhtiö ostaa

$$a_i = n_x \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]$$

kappaletta maturiteetin τ_i omaavaa johdannaista joka takaa haltijalleen palkkion $C_i(S_{\tau_i})$ maturiteetissaan. Tässä tapauksessa yhtiön tappioprosessi on muotoa

$$\begin{aligned} L_T &= \sum_{i=1}^{k} e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i})(N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i}) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} N_{\tau_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i \left(e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i}) - \Pi^{\tau_i}(C_i(s))\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i}) \left[N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i} - a_i\right] - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} N_{\tau_i} + \sum_{i=1}^{k} a_i \Pi^{\tau_i}(C_i(s)). \end{aligned}$$

Jakamalla puolittain x-ikäisten vakuutettujen lukumäärällä n_x saadaan

$$\frac{1}{n_x} L_T = \sum_{i=1}^{k} e^{-r\tau_i} C_i(S_{\tau_i}) \left[\frac{N_{\tau_{i-1}}}{n_x} - \frac{N_{\tau_i}}{n_x} - \frac{a_i}{n_x}\right] - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} \frac{N_{\tau_i}}{n_x} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{n_x} \Pi^{\tau_i}(C_i(s)).$$

Jos vakuutusportfolion koko on riittävän suuri (eli $n_x \to \infty$) saadaan suurten lukujen lain nojalla tulokseksi, että

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{N_{\tau_{i-1}}}{n_x} - \frac{N_{\tau_i}}{n_x} - \frac{a_i}{n_x} = 0 \quad \text{melkein varmasti}$$

jolloin

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} L_T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i] \Pi^{\tau_i}(C_i(s)) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i} \pi_{\tau_i} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i]$$

melkein varmasti. Havaitaan, että mikäli vakuutusportfolio on riittävästi hajautettu (eli n_x on suuri) niin silloin vakuutussopimuksen reilun hinnoittelun periaatteen mukaisesti määritetyn käyvän preemiovirran tulee toteuttaa ehto (75). Erityisesti siis havaitaan, että mikäli preemiovirta $\pi_{\tau_i} \equiv \pi$ on vakio ja vakuutuksen hinnoittelu aktuaarimielessä reilu, niin silloin preemion tulee olla muotoa (76).

Esimerkkejä: Kuten edellisessä kappaleessa, tarkastellaan nyt esimerkin vuoksi kahta vaihtoehtoista sijoitussidonnaista minimituoton (takuusumma sekä takuutuottovauhti) omaavaa sopimusta. Tarkastellaan ensiksi takuusumman K_i (jossa K_i on kasvava jono) takaavaa sopimusta, jonka palkkio on muotoa

$$C_i(S_{\tau_i}) \quad = \quad \max(S_{\tau_i}, K_i) = K_i + (S_{\tau_i} - K_i)^+.$$

Käyvän arvon määritelmän mukaisesti havaitaan, että

$$\Pi^{\tau_i}(C_i(s)) = e^{-r\tau_i} K_i \Phi\left(-\eta_{\tau_i}\right) + s\Phi\left(\eta_{\tau_i} + \sigma\sqrt{\tau_i}\right)$$

missä

$$\eta_{\tau_i} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau_i}}\left(\ln\left(\frac{s}{K_i}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i\right).$$

Edellä tekemämme tarkastelun pohjalta havaitaan, että käypä preemiovirta määräytyy identiteetistä

$$\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]\Pi^{\tau_i}(C_i(s)).$$

Preemiovirran ollessa vakio havaitaan edellä johtamamme identiteetin nojalla, että

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]\left[e^{-r\tau_i}K_i\Phi\left(-\eta_{\tau_i}\right) + s\Phi\left(\eta_{\tau_i} + \sigma\sqrt{\tau_i}\right)\right]}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}.$$

Tarkastellaan nyt vaihtoehtoisesti sijoitetulle pääomalle periodikohtaisen tuoton $\max(R_g, \rho_{\tau_i})$ takaavaa sopimusta kun kohde-etuuden kokonaistuotto ρ_{τ_i} on muotoa

$$\rho_{\tau_i} = \frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(\tau_i - \tau_{i-1}) + \sigma(\tilde{W}_{\tau_i} - \tilde{W}_{\tau_{i-1}})}.$$

Edellisen kappaleen yhtälön (74) nojalla havaitaan, että

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_j}V_{\tau_j}] = \left(\prod_{i=1}^{j}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v. \tag{77}$$

Edellä tekemämme tarkastelun pohjalta havaitsemme siis, että käypä preemiovirta määräytyy tässä tapauksessa identiteetistä

$$\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}[\tau_{j-1} < T_1 \leq \tau_j]\left(\prod_{i=1}^{j}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v.$$

Erityisesti preemiovirran ollessa vakioinen käypä preemiovirta määräytyy tässä tapauksessa identiteetistä

$$\pi = \frac{\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}[\tau_{j-1} < T_1 \leq \tau_j]\left(\prod_{i=1}^{j}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}.$$

Edellisen kappaleen tavalla tarkastellaan nyt vielä säästävää tapausta, jossa vakuutuksenottaja voi omalla säästämisellään vaikuttaa saamaansa (tai perikunnan saamaan) vakuutuskorvaukseen. Kuten aikaisemmin oletetaan, että vakuutuksenottaja sijoittaa sopimuksen juoksuaikana summan s_{τ_i} joka periodilla. Yleisyyden vuoksi oletetaan, että korvaussumma on kasvava osuus $\alpha_i \in (0, 1)$ sijoitetun pääoman arvosta. Soveltamalla yhtälöä (74) havaitaan, että

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_j}\alpha_j\hat{V}_{\tau_j}] = \alpha_j\left[\left(\prod_{i=1}^{j}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v + \sum_{l=1}^{j-1} e^{-r\tau_l}s_{\tau_l}\prod_{i=l}^{j-1}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_i, \tau_{i+1}) + e^{-r\tau_j}s_{\tau_j}\right] \tag{78}$$

ja

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\alpha_k\hat{V}_T] = \alpha_k\left[\left(\prod_{i=1}^{k}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_{i-1}, \tau_i)\right)v + \sum_{l=1}^{k-1} e^{-r\tau_l}s_{\tau_l}\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\mathfrak{M}}(\tau_i, \tau_{i+1})\right]. \tag{79}$$

Tässä tapauksessa odotettu kokonaistappio on luonnollisesti

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i}\alpha_i\hat{V}_{\tau_i}]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i] - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i].$$

Vakuutuksen reilu preemiovirta määräytyy siis identiteetistä

$$\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i}\alpha_i\hat{V}_{\tau_i}]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i],$$

jolloin siis vakioisen preemiovirran tapauksessa

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau_i}\alpha_i\hat{V}_{\tau_i}]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]}{\sum_{i=0}^{k-1} e^{-r\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}.$$

7.2 Käypä arvo ja korkoriski

Edellisessä kappaleessa emme huomioineet mahdollista korkoriskiä ja sen vaikutusta vakuutusvastuiden käypiin arvoihin. Koska korkoriski on kuitenkin poikkeuksellisen merkittävä tekijä erityisesti säästävissä vakuutusmuodoissa, lisäämme nyt tarkasteluun myös koroille aikarakenteen. Pääomamarkkinoilla määräytyvä kohde-etuuden arvon oletetaan noudattavan stokastista dynamiikkaa muotoa

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t + \eta S_t d\hat{W}_t, \quad S_0 = s, \tag{80}$$

missä r_t on vallitseva lokaalisti riskittömien sijoituskohteiden tuottoa kuvaava lyhyt korkokanta, $\tilde{W}_t$ mittaa ajavaa systemaattista markkinariskifaktoria (siis aggregaattiriski) ja $\hat{W}_t$ on kohde-etuuden idiosynkraattinen riskifaktori joka oletetaan markkinariskistä riippumattomaksi. Luonnollisesti tapausta jossa $\eta = 0$ voidaan katsoa vastaavan tilannetta, jossa kohde-etuuden arvo noudattaa tehokkaasti hajautetun rahaston tuottodynamiikkaa.

Kuten yleensä, maturiteetin T omaavan nollakuponkilainan (ns. T-bondin) hintaa hetkellä $t \leq T$ kun vallitseva korkokanta on r merkitään merkinnällä $P^T(t,r)$. Annettuna lyhyen koron malli tiedetään, että kyseessä oleva nollakupongin hinta voidaan esittää muodossa

$$P^T(t,r) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right]. \tag{81}$$

Kuten korkorakennemallinnuksesta käy hyvin ilmi, tämä korkojohdannaisluokka on keskeisessä roolissa käypien arvojen määrityksessä. Tämän kappaleen tarkasteluissa lähdemme oletuksesta jonka mukaan lyhyt korko määräytyy riskineutraalin hinnoittelumitan alaisuudessa stokastisesta differentiaaliyhtälöstä muotoa

$$dr_s = \lambda(s, r_s) ds + \beta(s, r_s) d\tilde{W}_s, \quad \tilde{r}_t = r, \tag{82}$$

missä kuvaukset $\lambda(t,r)$ sekä $\beta(t,r)$ ovat riittävän säännöllisiä yhtälön (82) ratkaisun yksikäsitteisen vahvan ratkaisun olemassaololle.

Tässä vaiheessa on hyvä huomata, että soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $s \mapsto \ln s$ saadaan

$$d \ln S_t = r_t dt + \sigma d\tilde{W}_t + \eta d\hat{W}_t - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta^2) dt.$$

Tämän havainnon nojalla huomaamme, että kaikille $t \leq T$ on voimassa identiteetti

$$S_T = S_t e^{\int_t^T r_s ds} \mathcal{M}_T, \tag{83}$$

missä

$$\mathcal{M}_T = e^{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) + \eta(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta^2)(T-t)} \tag{84}$$

on positiivinen eksponentiaalinen (Waldin) martingaali. Tälle martingaalille pätee

$$d\mathcal{M}_T = (\sigma d\tilde{W}_T + \eta d\hat{W}_T) \mathcal{M}_T, \quad \mathcal{M}_t = 1. \tag{85}$$

yhtälöiden (81) ja (83) nojalla havaitaan, että

$$e^{-\int_t^T r_s ds} = \frac{S_t}{S_T} \mathcal{M}_T, \tag{86}$$

josta puolestaan seuraa identiteetit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \right] = S_t$$

ja

$$P^T(t,r) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right] = S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{(t,r)} \left[\frac{\mathcal{M}_T}{S_T} \right]. \tag{87}$$

Määrittelemällä ekvivalentti mitta $\mathbb{M}$ uskottavuuskertoimen $d\mathbb{M}/d\mathbb{Q} = \mathcal{M}_T$ avulla saadaan (87) muotoon

$$P^T(t,r) = S_t \mathbb{E}^{\mathbb{M}}_{(t,r)} \left[\frac{1}{S_T} \right], \tag{88}$$

missä mitan $\mathbb{M}$ alaisuudessa

$$dS_\tau = (r_\tau + \sigma^2 + \eta^2) S_\tau d\tau + (\sigma d\tilde{W}_\tau^{\mathbb{M}} + \eta d\hat{W}_\tau^{\mathbb{M}}) S_\tau, \quad S_t = s.$$

Vastaavasti on syytä huomata, että T-bondin hinta $P^T(t,r)$ toteuttaa aikarakenneyhtälön (reuna-arvotehtävä)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta^2(t,r) P_{rr}^T(t,r) + \lambda(t,r) P_r^T(t,r) - r P^T(t,r) + P_t^T(t,r) &= 0 \\ P^T(T,r) &= 1 \end{aligned}$$

jolloin Itôn lauseen nojalla

$$dP^T(t,r_t) = r_t P^T(t,r_t) dt + \beta(t,r_t) \frac{P_r^T(t,r_t)}{P^T(t,r_t)} d\tilde{W}_t.$$

Tämän esityksen nojalla puolestaan havaitaan, että

$$e^{-\int_0^T r_s ds} = P^T(0,r) \check{\mathcal{M}}_T,$$

missä

$$\check{\mathcal{M}}_T = \exp\left(\int_0^T \beta(s,r_s) \frac{P_r^T(s,r_s)}{P^T(s,r_s)} d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T \beta^2(s,r_s) \left(\frac{P_r^T(s,r_s)}{P^T(s,r_s)} \right)^2 ds \right)$$

on positiivinen eksponentiaalinen martingaali aina kun Novikovin ehto toteutuu. Tämä havainto on hyödyllinen erityisesti määritettäessä johdannaisinstrumenttien käypiä arvoja sillä se mahdollistaa laskentayksikön muuntamisen bondihinnaksi (aikaisemmin mainitsemamme numeräärin vaihto).

7.2.1 Kertapreemioon perustuva sopimus

Edellisen vakioiseen korkorakenteeseen perustuvan analyysimme mukaisesti, tarkastellaan nyt ensimmäisenä tapauksena kertapreemioon π perustuvaa vakuutusta joka takaa haltijalleen maturiteetissa T arvottamisen perustana olevan arvopaperin hinnasta riippuvan korvauksen $C(S_T)$ mikäli vakuutettu on maturiteetissa vielä elossa. Kuten aikaisemmin havaitsemme, että yksittäisen vakuutuksenottajan kassavirta F_i on siis muotoa

$$F_i = \{-\pi, 0, \ldots, C(S_T)\}, \quad \text{jos } T_i > T.$$

Tällöin yhtiön kokonaistappio edellä kuvatusta vakuutustuotteesta on muotoa

$$L_T = e^{-\int_0^T r_s ds} N_T C(S_T) - n_x \pi.$$

Ottamalla tästä identiteetistä odotusarvo puolittain saadaan tulokseksi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = n_x \left(\mathbb{P}[T_1 > T] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} C(S_T) \right] - \pi \right).$$

Havaitaan, että tämä odotusarvo häviää aina kun preemio on muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T] \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} C(S_T) \right]. \tag{89}$$

Ts. käypä preemio voidaan jälleen kerran tulkita modifioidun vaateen $C_{\text{mod}}(S_T) = \mathbb{P}[T_1 > T] C(S_T)$ käyväksi arvoksi. Analyysin kannalta merkittävin ero on nyt vain polkuriippuvassa diskonttauksessa sekä sitä kautta kohde-etuuden riskineutraalissa dynamiikassa.

Edellä johdettu tulos on mahdollista myös perustella käyttämällä rahoitusinstrumentteja vastuun suojaamiseksi. Tarkastellaan nyt asetelmaa, jossa yhtiö hankkii pääomamarkkinoilta vakuutussopimuksen solmimishetkellä $a_0 = n_x \mathbb{P}[T_1 > T]$ kappaletta maturiteetin T omaavaa johdannaista joka takaa haltijalleen tuoton $C(S_T)$ maturiteetissaan. Yhdistetyn sopimuksen (vakuutussopimus+sijoitusportfolio) kokonaistappio on tässä tapauksessa muotoa

$$\begin{aligned} L_T &= e^{-\int_0^T r_s ds} N_T C(S_T) - n_x \pi - n_x \mathbb{P}[T_1 > T] (e^{-\int_0^T r_s ds} C(S_T) - \Pi^T(C(s))) \\ &= e^{-\int_0^T r_s ds} C(S_T) \left[N_T - n_x \mathbb{P}[T_1 > T] \right] + n_x \left(\mathbb{P}[T_1 > T] \Pi^T(C(s)) - \pi \right), \end{aligned}$$

missä $\Pi^T(C(s)))$ on johdannaisinstrumentin vallitseva käypä markkinahinta. Jakamalla tappioprosessi x-ikäisten vakuutuksenottajien lukumäärällä n_x saadaan

$$\frac{1}{n_x}L_T = e^{-\int_0^T r_s ds}C(S_T)\left[\frac{N_T}{n_x} - \mathbb{P}[T_1 > T]\right] + \mathbb{P}[T_1 > T]\Pi^T(C(s)) - \pi.$$

Tällöin suurten lukujen lain nojalla havaitaan edellisen kappaleen havaintojen mukaisesti, että

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x}L_T = \mathbb{P}[T_1 > T]\Pi^T(C(s)) - \pi \qquad \text{melkein varmasti.}$$

Havaitaan, että muodostamalla riittävän suuri vakuutusportfolio saadaan henkiriski eliminoitua ja jäljelle jää pelkästään markkinariskeistä riippuvia tekijöitä. Valitsemalla preemio π hinnoittelusäännön (89) mukaisesti johtaa tulokseen

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x}L_T = 0 \qquad \text{melkein varmasti.}$$

Esimerkkejä: (A) On selvää, että korkojen aikarakenteen satunnaisuuden seurauksena myös vakioisten kertakorvausten käyvät arvot riippuvat korkoepävarmuudesta nollakuponkilainojen käypien arvojen kautta. Täsmällisemmin ilmaistuna oletetaan, että kertakorvaukselle pätee $C(s) = C > 0$. Tällöin hinnoittelusäännön (89) mukaisesti valittu preemio on muotoa

$$\pi = \mathbb{P}[T_1 > T]P^T(0,r)C.$$

(B) Aikaisemmin tekemämme analyysin mukaisesti tarkastellaan taas kahta vaihtoehtoista sijoitussidonnaista minimituoton (takuusumma sekä takuutuottovauhti) omaavaa sopimusta. Takuusumman K takaavan sopimuksen palkkio on muotoa

$$C(S_T) = \max(S_T, K) = K + (S_T - K)^+.$$

Tämän sopimuksen käypä arvo voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
\Pi^T(C(s)) &= KP^T(0,r) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}(S_T - K)^+\right] \\
&= KP^T(0,r) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}S_T\chi_{[K,\infty)}(S_T)\right] - K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}\chi_{[K,\infty)}(S_T)\right] \\
&= KP^T(0,r) + s\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathcal{M}_T\chi_{[K,\infty)}(S_T)\right] - KP^T(0,r)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\check{\mathcal{M}}_T\chi_{[K,\infty)}(S_T)\right].
\end{aligned}$$

Määritellään ekvivalentit mitat $\mathbb{M}, \check{\mathbb{M}}$ uskottavuuskertoimien $d\mathbb{M}/d\mathbb{Q} = \mathcal{M}_T$ ja $d\check{\mathbb{M}}/d\mathbb{Q} = \check{\mathcal{M}}_T$ mukaisesti (Novikovin ehdon toteutuessa). Tällöin sopimuksen käypä arvo tulee muotoon

$$\Pi^T(C(s)) = s\mathbb{P}^{\mathbb{M}}[S_T \geq K] + KP^T(0,r)\mathbb{P}^{\check{\mathbb{M}}}[S_T < K]. \tag{90}$$

Näiden yhtälöiden pohjalta on selvää, että yleisesti ottaen minimituottotakuun takaavan sopimuksen käyvän arvon määritys jopa kertaluontoisen preemion tapauksessa on korkoriskin vallitessa hyvin vaativa tehtävä jonka tarkastelu edellyttää tyypillisesti numeeristen menetelmien soveltamista. On olemassa kuitenkin luokka korkomalleja joiden alaisuudessa käyvät arvot voidaan määrittää eksplisiittisesti monissa sovellutuksien kannalta keskeisissä tapauksissa. Oletetaan nyt, että korkojen aikarakenne määräytyy affiinista Vasičekin mallista

$$dr_t = (a - br_t)dt + cd\tilde{W}_t, \quad r_0 = r. \tag{91}$$

Tässä tapauksessa nollakuponkilainan käypä hinta voidaan esittää muodossa $P^T(t,r) = e^{A(t,T)-B(t,T)r}$, missä

$$B(t,T) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-b(T-t)}\right)$$

ja

$$A(t,T) = \frac{c^2}{2b^2}\int_t^T \left(1 - e^{-b(T-s)}\right)^2 ds - \frac{a}{b}\int_t^T \left(1 - e^{-b(T-s)}\right) ds.$$

Lisäksi

$$dP^T(t,r_t) = r_tP^T(t,r_t)dt - cB(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t,$$

jonka nojalla eksponentiaalinen martingaali $\check{\mathcal{M}}_T$ on tässä tapauksessa muotoa

$$\check{\mathcal{M}}_T = e^{-c\int_t^T B(s,T)d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}c^2\int_t^T B^2(s,T)ds}.$$

Tällöin uskottavuuskertoimen $d\check{\mathbb{M}}/d\mathbb{Q} = \check{\mathcal{M}}_T$ mukaisesti määritellyn ekvivalentin mitan alaisuudessa

$$\begin{aligned} dS_t &= (r_t - c\sigma B(t,T))dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t^{\check{\mathbb{M}}} + \eta S_t d\hat{W}_t^{\check{\mathbb{M}}} \\ dP^T(t,r_t) &= (r_t + c^2 B^2(t,T))P^T(t,r_t)dt - cB(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t^{\check{\mathbb{M}}}. \end{aligned}$$

Soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $S_t/P^T(t,r_t)$ johtaa tulokseen

$$S_T = \frac{s}{P^T(0,r)}e^{\check{\mathcal{L}}_T}, \tag{92}$$

missä

$$\check{\mathcal{L}}_T = \int_0^T (\sigma + cB(s,T))d\tilde{W}_s^{\check{\mathbb{M}}} + \eta \hat{W}_T^{\check{\mathbb{M}}} - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds - \frac{1}{2}\eta^2 T$$

on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja jolle pätee

$$\mathbb{E}[\check{\mathcal{L}}_T] = -\frac{1}{2}\int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds - \frac{1}{2}\eta^2 T$$

ja

$$\mathrm{var}[\check{\mathcal{L}}_T] = \int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds + \eta^2 T.$$

Havaitaan siis, että

$$\mathbb{P}^{\check{\mathbb{M}}}[S_T < K] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\check{\mathcal{L}}_T]}}\left(\ln\left(\frac{KP^T(0,r)}{s}\right) - \mathbb{E}[\check{\mathcal{L}}_T]\right)\right).$$

Vastaavasti uskottavuuskertoimen $d\mathbb{M}/d\mathbb{Q} = \mathcal{M}_T$ mukaisesti määritellyn ekvivalentin mitan alaisuudessa

$$\begin{aligned} dS_t &= (r_t + \sigma^2 + \eta^2)dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t^{\mathbb{M}} + \eta S_t d\hat{W}_t^{\mathbb{M}} \\ dP^T(t,r_t) &= (r_t - \sigma cB(t,T))P^T(t,r_t)dt - cB(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t^{\mathbb{M}}. \end{aligned}$$

Soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $P^T(t,r_t)/S_t$ johtaa tulokseen

$$\frac{1}{S_T} = \frac{P^T(0,r)}{s}e^{\mathcal{L}_T}, \tag{93}$$

missä

$$\mathcal{L}_T = -\int_0^T (\sigma + cB(s,T))d\tilde{W}_s^{\mathbb{M}} - \eta \hat{W}_T^{\mathbb{M}} - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds - \frac{1}{2}\eta^2 T$$

on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja jolle pätee

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_T] = -\frac{1}{2}\int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds - \frac{1}{2}\eta^2 T$$

ja

$$\mathrm{var}[\mathcal{L}_T] = \int_0^T (\sigma + cB(s,T))^2 ds + \eta^2 T.$$

Havaitaan siis, että

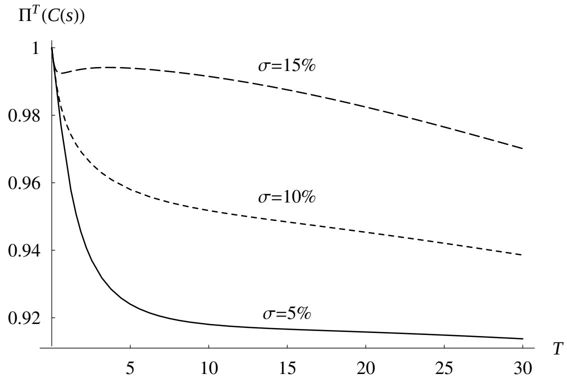
$$\mathbb{P}^{\mathbb{M}}[S_T \geq K] = \mathbb{P}^{\mathbb{M}}\left[\frac{1}{S_T} \geq \frac{1}{K}\right] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{L}_T]}}\left(\ln\left(\frac{s}{KP^T(0,r)}\right) - \mathbb{E}[\mathcal{L}_T]\right)\right).$$

Yhdistämällä edellä johtamamme tulokset havaitaan, että Vasičekin mallin tapauksessa vakuutussopimuksen käypä arvo voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}\Pi^T(C(s)) = s\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{L}_T]}}\left(\ln\left(\frac{s}{KP^T(0,r)}\right) - \mathbb{E}[\mathcal{L}_T]\right)\right)\\ + KP^T(0,r)\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\check{\mathcal{L}}_T]}}\left(\ln\left(\frac{KP^T(0,r)}{s}\right) - \mathbb{E}[\check{\mathcal{L}}_T]\right)\right).\end{aligned} \tag{94}$$

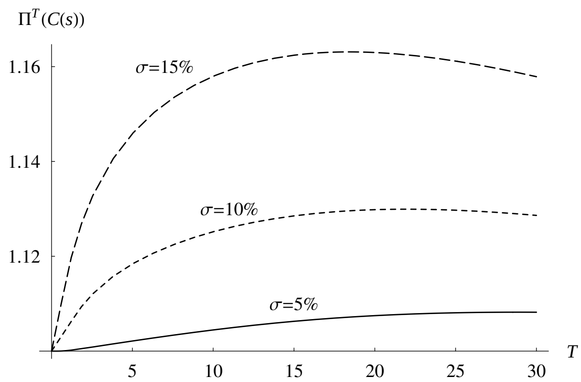
On syytä painottaa, että tämä Geman, El Karoui & Rochet'n tulos voidaan itse asiassa yleistää tapauksiin, joissa nollakuponkilainojen hinnat ovat logaritmisessa skaalassa Gaussilaisia. On kuitenkin selvää, että mitä hankalemmin malli on parametrisoitu, sitä vaativampia ovat käyvän arvon esityksessä (94) esiintyvät määrätyt integraalit.

Takuutuottosopimuksen käypää arvoa havainnollistetaan maturiteetin sekä kohde-etuuden volatiliteetin funktiona graafisesti kuvassa 3 kun $a = 0.00315, b = 0.07, K = 1, \eta = 0, s = 0.9, c = 0.01$ ja $r = 0.04$. Kuten kuvasta 3 on selvää, on kohde-etuuden volatiliteetin vaikutus sopimuksen käypään



Kuva 3: Käypä arvo $\Pi^T(C(s))$ kohde-etuuden volatiliteetin σ sekä maturiteetin T funktiona

arvoon hyvin voimakas. Lisäksi maturiteetin pidetessä tämä herkkyys vain kasvaa. Tämän havainnon valossa onkin selvää, että erityisesti pitkäkestoisten sijoitussidonnaisten henkivakuutustuotteiden käyvät arvot ovat hyvinkin herkkiä arvottamisen perustana olevan kohde-etuuden volatiliteetin suhteen. Kohde-etuuden arvon vaikutuksen kuvaamiseksi takuutuottosopimuksen käypää arvoa havainnollistetaan maturiteetin sekä kohde-etuuden volatiliteetin funktiona graafisesti kuvassa 4 kun $a = 0.00315, b = 0.07, K = 1, \eta = 0, s = 1.1, c = 0.01$ ja $r = 0.04$. Kuten kuvasta 4 voidaan havaita, on kohde-etuuden arvon vaiku-



Kuva 4: Käypä arvo $\Pi^T(C(s))$ kohde-etuuden volatiliteetin σ sekä maturiteetin T funktiona

tus myös merkittävä. Vertailemalla kuvaa 3 ja kuvaa 4 keskenään havaitaan, että erityisesti sillä onko sopimus rahassa (in the money) tai poissa rahasta (out of the money) on merkittävä vaikutus sopimuksen arvoon. Joka tapauksessa sama yleinen laadullinen tulos pätee ja kasvanut kohde-etuuden volatiliteetti kasvattaa käypää arvoa. Myös lyhyen koron volatiliteetin kasvu vaikuttaa käypiä arvoja kasvattavasti. Tätä herkkyyttä on kuvattu seuraavassa taulukossa kun sopimus on solmimishetkellä poissa rahasta ja $a = 0.00315, b = 0.07, K = 1, \eta = 0, s = 0.9, \sigma = 0.1$ sekä $r = 0.04$. Vertailun vuoksi taulukossa 6 kuvataan tilannetta kun sopimus on jo solmimishetkellä rahassa oletuksen $s = 1.1$ mukaisesti.

c	$\Pi^5(C(s))$	$\Pi^{10}(C(s))$	$\Pi^{15}(C(s))$	$\Pi^{20}(C(s))$	$\Pi^{25}(C(s))$	$\Pi^{30}(C(s))$
0%	0.9414	0.9211	0.9108	0.9055	0.9028	0.9015
0.5%	0.9494	0.9348	0.9259	0.9197	0.9152	0.9116
1%	0.958	0.9518	0.9484	0.9453	0.9421	0.9386
1.5%	0.9672	0.9719	0.9784	0.9838	0.9876	0.9895
2%	0.9768	0.9951	1.017	1.038	1.058	1.076
2.5%	0.987	1.022	1.064	1.111	1.163	1.218
3%	0.9977	1.052	1.122	1.21	1.319	1.454
3.5%	1.009	1.085	1.194	1.345	1.557	1.857

Taulukko 5: Käypä arvo $\Pi^T(C(s))$ korkovolatiliteetin c sekä maturiteetin T funktiona

c	$\Pi^5(C(s))$	$\Pi^{10}(C(s))$	$\Pi^{15}(C(s))$	$\Pi^{20}(C(s))$	$\Pi^{25}(C(s))$	$\Pi^{30}(C(s))$
0%	1.1088	1.1061	1.1035	1.1019	1.101	1.1005
0.5%	1.1132	1.1137	1.1123	1.1105	1.1086	1.107
1%	1.1184	1.1252	1.1285	1.1298	1.1297	1.1286
1.5%	1.1245	1.1404	1.153	1.1627	1.1697	1.1743
2%	1.1315	1.1595	1.1864	1.2117	1.2349	1.2558
2.5%	1.1392	1.1824	1.2298	1.281	1.3356	1.3938
3%	1.1477	1.2093	1.2849	1.3768	1.4889	1.6265
3.5%	1.157	1.2404	1.3538	1.5086	1.7233	2.0268

Taulukko 6: Käypä arvo $\Pi^T(C(s))$ korkovolatiliteetin c sekä maturiteetin T funktiona

Edellisen kappaleen tavalla yleistetään analyysi nyt tapaukseen, jossa yhtiö takaa sijoitetulle pääomalle periodikohtaisen tuoton $\max(R_g, \rho_t)$. Tässä tapauksessa pääoman kasvua kuvaava autoregressiivinen yhtälö tulee muotoon

$$V_{\tau_i} = \max(R_g, \rho_{\tau_i})V_{\tau_{i-1}} + s_{\tau_i}, \quad V_0 = v \tag{95}$$

missä yhtälön (83) nojalla

$$\rho_{\tau_i} = \frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} = \exp\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds\right)\mathcal{M}_{\tau_{i-1},\tau_i} \tag{96}$$

ja

$$\mathcal{M}_{\tau_{i-1},\tau_i} = e^{\sigma(\tilde{W}_{\tau_i}-\tilde{W}_{\tau_{i-1}})+\eta(\hat{W}_{\tau_i}-\hat{W}_{\tau_{i-1}})-\frac{1}{2}(\sigma^2+\eta^2)(\tau_i-\tau_{i-1})}.$$

Yhtälön (64) nojalla tiedetään, että

$$V_T = \left(\prod_{i=1}^{k}\max(\rho_{\tau_i}, R_g)\right)v + \sum_{j=1}^{k-1} s_{\tau_j}\prod_{i=j+1}^{k}\max(\rho_{\tau_i}, R_g). \tag{97}$$

Kertomalla tämä identiteetti puolittain diskonttaustekijällä $e^{-\int_0^T r_s ds}$ johtaa rekursioon

$$e^{-\int_0^T r_s ds}V_T = \left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds}\max(\rho_{\tau_i}, R_g)\right)v + \sum_{j=1}^{k-1} e^{-\int_0^{\tau_j} r_s ds}s_{\tau_j}\prod_{i=j+1}^{k} e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds}\max(\rho_{\tau_i}, R_g).$$

Tällä tavalla vastuun käypä arvo tulee muotoon

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s ds}V_T\right] = \mathfrak{P}v + \mathfrak{Q},$$

missä ehdollisen odotusarvon torniominaisuuden nojalla

$$\mathfrak{P} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\prod_{i=1}^{k} e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \max(\rho_{\tau_i}, R_g)\right)\right]$$

ja

$$\mathfrak{Q} = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^{\tau_j} r_s ds} s_{\tau_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\prod_{i=j+1}^{k} e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \max(\rho_{\tau_i}, R_g)\Big|\mathcal{F}_{\tau_j}\right]\right].$$

Tämän analyysin nojalla on selvää, että tarkastelun kannalta keskeinen odotusarvo on $\mathfrak{P}$. Kyseinen odotusarvo voidaan ehdollisen odotusarvon torniominaisuuden nojalla esittää ehdollisten odotusarvojen tulomuodossa. Valitettavasti, koska ehdollistus tehdään kullakin ajanhetkellä vallitsevan korkokannan suhteen, ei odotusarvoja $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{Q}$ voida yleensä ratkaista eksplisiittisesti vaan on turvauduttava numeerisiin menetelmiin.

Kuten edellä havaittiin, voidaan Vasičekin mallin (91) tapauksessa minimitakuutuotto-option käypä arvo määrittää suljetussa muodossa aikarakenteen Gaussilaisuudesta johtuen. Tarkastellaan kyseistä aikarakennetta pääoman kasvuyhtälön (95) tapauksessa. Pääoman kasvuyhtälön autoregressiivisyydestä seuraa, että

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[J_{\tau_i}|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \max(R_g, \rho_{\tau_i})|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] J_{\tau_{i-1}} + e^{-\int_0^{\tau_{i-1}} r_s ds} P^{\tau_i}(\tau_{i-1}, r_{\tau_{i-1}}) s_{\tau_i},$$

missä $J_{\tau_i} = e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} V_{\tau_i}$. Havaitaan, että vastuun käyvän arvon iteratiiviseen määrittämiseen on määritettävä ehdollinen odotusarvo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \max\left(R_g, \rho_{\tau_i}\right)|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] &= R_g \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \chi_{(0, R_g S_{\tau_{i-1}})}(S_{\tau_i})|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} \chi_{[R_g S_{\tau_{i-1}}, \infty)}(S_{\tau_i})|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&= R_g P^{\tau_i}(\tau_{i-1}, r_{\tau_{i-1}}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\check{\mathcal{M}}_{\tau_{i-1}, \tau_i} \chi_{(0, R_g S_{\tau_{i-1}})}(S_{\tau_i})|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathcal{M}_{\tau_{i-1}, \tau_i} \chi_{[R_g S_{\tau_{i-1}}, \infty)}(S_{\tau_i})|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right],
\end{aligned}$$

missä

$$\check{\mathcal{M}}_{\tau_{i-1}, \tau_i} = e^{-c\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(s, \tau_i) d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}c^2 \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B^2(s, \tau_i) ds}.$$

Määrittelemällä edellisen esimerkin mukaisesti eksponentiaalisten martingaalien $\mathcal{M}_{\tau_{i-1}, \tau_i}$ ja $\check{\mathcal{M}}_{\tau_{i-1}, \tau_i}$ generoimat ekvivalentit mitat $\mathbb{M}_i$ sekä $\check{\mathbb{M}}_i$ saadaan tulokseksi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} r_s ds} \max\left(R_g, \rho_{\tau_i}\right)|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] = R_g P^{\tau_i}(\tau_{i-1}, r_{\tau_{i-1}}) \mathbb{P}^{\check{\mathbb{M}}_i}[S_{\tau_i} < R_g S_{\tau_{i-1}}] + \mathbb{P}^{\mathbb{M}_i}[S_{\tau_i} \geq R_g S_{\tau_{i-1}}],$$

joka voidaan jälleen esittää yhtälön (94) mukaisesti. Tämän esimerkin tapauksessa

$$\mathbb{P}^{\check{\mathbb{M}}_i}[S_{\tau_i} < R_g S_{\tau_{i-1}}] = \Phi\left(\frac{1}{\Sigma_{\check{Z}(\tau_{i-1}, \tau_i)}}\left(\ln\left(R_g P^{\tau_i}(\tau_{i-1}, r_{\tau_{i-1}})\right) - \mathbb{E}[\check{Z}(\tau_{i-1}, \tau_i)]\right)\right),$$

missä

$$\mathbb{E}[\check{Z}(\tau_{i-1}, \tau_i)] = -\frac{1}{2}\eta^2(\tau_i - \tau_{i-1}) - \frac{1}{2}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\sigma + cB(s, \tau_i))^2 ds$$

ja

$$\Sigma^2_{\check{Z}(\tau_{i-1}, \tau_i)} = \eta^2(\tau_i - \tau_{i-1}) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\sigma + cB(s, \tau_i))^2 ds.$$

Vastaavasti huomataan, että

$$\mathbb{P}^{\mathbb{M}_i}[S_{\tau_i} \geq R_g S_{\tau_{i-1}}] = \Phi\left(\frac{1}{\Sigma_{Z(\tau_{i-1}, \tau_i)}}\left(-\ln\left(R_g P^{\tau_i}(\tau_{i-1}, r_{\tau_{i-1}})\right) - \mathbb{E}[Z(\tau_{i-1}, \tau_i)]\right)\right),$$

missä

$$\mathbb{E}[Z(\tau_{i-1},\tau_i)] = -\frac{1}{2}\eta^2(\tau_i-\tau_{i-1}) - \frac{1}{2}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\sigma + cB(s,\tau_i))^2 ds$$

ja

$$\Sigma^2_{Z(\tau_{i-1},\tau_i)} = \eta^2(\tau_i-\tau_{i-1}) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}(\sigma + cB(s,\tau_i))^2 ds.$$

7.2.2 Useampipreemioinen sopimus

Yleistetään kappaleen 2.2. tulokset nyt tilanteeseen, jossa korkoriski on huomioitu. Mikäli yllä esittämämme oletukset ovat voimassa, niin silloin vakuutussopimuksen generoiman kokonaistappion nykyarvo on

$$L_T = \sum_{i=1}^{k} e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} C_i(S_{\tau_i})(N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i}) - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds}\pi_{\tau_i} N_{\tau_i}.$$

Kokonaistappion odotusarvo on nyt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[L_T] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} C_i(S_{\tau_i})]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i] - \sum_{i=0}^{k-1} P^{\tau_i}(0,r)\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i].$$

Tällöin vakuutussopimuksen aktuaarimielessä reilun hinnoittelun periaatteen mukaisesti määritetyn käyvän preemiovirran tulee toteuttaa ehto

$$\sum_{i=0}^{k-1} P^{\tau_i}(0,r)\pi_{\tau_i}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} C_i(S_{\tau_i})]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i]. \tag{98}$$

Erityisesti siis havaitaan, että mikäli preemiovirta $\pi_{\tau_i} \equiv \pi$ on vakio ja vakuutuksen hinnoittelu reilu, niin silloin

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} C_i(S_{\tau_i})]\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i]}{\sum_{i=0}^{k-1} P^{\tau_i}(0,r)\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}. \tag{99}$$

Aikaisemmin tekemämme analyysin pohjalta on selvää, että (99) voidaan myös johtaa muodostamalla vakuutussopimuksen sijoitusriskiltä suojaava sijoitusportfolio. *Korkojen aikarakenteen satunnaisuuden vallitessa suojaava portfoliostrategia on kuitenkin epätriviaali ja sisältää sekä johdannais- että bondisuojauksen.* Tämän kappaleen tapauksessa yhtiö ostaa

$$a_i = n_x\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i]$$

kappaletta maturiteetin τ_i omaavaa johdannaista joka takaa haltijalleen palkkion $C_i(S_{\tau_i})$ maturiteetissaan. Lisäksi yhtiö velkarahoittaa preemiovirran generoimat vastuut portfoliostrategian

$$b_i = -n_x\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]\pi_{\tau_i}$$

mukaisesti. Tällöin yhtiön asiakaskohtainen tappio (siis kokonaistappio per vakuutettu) on muotoa

$$\begin{aligned}\frac{L_T}{n_x} &= \sum_{i=1}^{k} e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds} C_i(S_{\tau_i})\left[\frac{N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i}}{n_x} - \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i]\right] + \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i]\Pi^{\tau_i}(C_i(s)) \\ &- \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\int_0^{\tau_i} r_s ds}\pi_{\tau_i}\left[\frac{N_{\tau_i}}{n_x} - \mathbb{P}[T_1 > \tau_i]\right] - \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{P}[T_1 > \tau_i]\pi_{\tau_i}P^{\tau_i}(0,r).\end{aligned}$$

Havaitaan siis jälleen, että mikäli vakuutusportfolio on henkiriskin osalta riittävästi hajautettu (ts. $n_x \to \infty$) niin suurten lukujen lain nojalla saadaan tulokseksi, että

$$\lim_{n_x\to\infty}\frac{N_{\tau_{i-1}} - N_{\tau_i}}{n_x} = \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \le \tau_i] \quad \text{melkein varmasti}$$

ja

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{N_{\tau_i}}{n_x} = \mathbb{P}[T_1 > \tau_i] \quad \text{melkein varmasti}$$

jonka nojalla

$$\lim_{n_x \to \infty} \frac{1}{n_x} L_T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i] \Pi^{\tau_i}(C_i(s)) - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i] \pi_{\tau_i} P^{\tau_i}(0, r)$$

melkein varmasti. Havaitaan, että mikäli vakuutusportfolio on riittävästi hajautettu (eli n_x on suuri) niin silloin vakuutussopimuksen reilun hinnoittelun periaatteen mukaisesti määritetyn käyvän preemiovirran tulee toteuttaa ehto (98). Erityisesti siis havaitaan, että mikäli preemiovirta $\pi_{\tau_i} \equiv \pi$ on vakio ja vakuutuksen hinnoittelu reilu, niin silloin preemion tulee olla muotoa (99).

Esimerkkejä: (A) Tarkastellaan sopimusta, jossa $C_i(s) = C_i > 0$ kaikille $i = 1, \ldots, k$. Tällöin yhtälön (98) nojalla käyvän preemiovirran tulee toteuttaa ehto

$$\sum_{i=0}^{k-1} P^{\tau_i}(0, r) \pi_{\tau_i} \mathbb{P}[T_1 > \tau_i] = \sum_{i=1}^{k} P^{\tau_i}(0, r) C_i \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i].$$

Mikäli preemiovirta $\pi_{\tau_i} \equiv \pi$ on vakio, niin silloin yhtälön (99) nojalla käypä preemio on muotoa

$$\pi = \frac{\sum_{i=1}^{k} P^{\tau_i}(0, r) C_i \mathbb{P}[\tau_{i-1} < T_1 \leq \tau_i]}{\sum_{i=0}^{k-1} P^{\tau_i}(0, r) \mathbb{P}[T_1 > \tau_i]}.$$

(B) Edellisen kappaleen esimerkin mukaisesti tarkastellaan nyt sijoitussidonnaista sopimusta joka takaa haltijalleen vähintään takuusumman K_i (jossa K_i on kasvava jono maksuja). Tässä tapauksessa sopimuksen palkkio on muotoa

$$C_i(S_{\tau_i}) \quad = \quad \max(S_{\tau_i}, K_i) = K_i + (S_{\tau_i} - K_i)^+.$$

Yhtälön (90) nojalla on nyt selvää, että tämän sopimuksen käypä arvo voidaan esittää yleisesti muodossa

$$\Pi^T(C_i(s)) = s\mathbb{P}^{\mathbb{M}}[S_T \geq K_i] + K_i P^T(0, r) \mathbb{P}^{\check{\mathbb{M}}}[S_T < K_i].$$

Kuten kappaleen 3.1 analyysi osoitti, ei tätä käypää arvoa voida sieventää merkittävästi enempää ilman lisäoletuksia korkojen aikarakenteesta. Mikäli arvottamisen perustana oleva korkojen aikarakenne noudattaa Vasičekin mallin mukaista stokastista dynamiikkaa voidaan tämän takuutuottosopimuksen käypä arvo esittää yhtälön (94) nojalla muodossa

$$\begin{aligned} \Pi^T(C_i(s)) = {} & s\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\mathcal{L}_T]}}\left(\ln\left(\frac{s}{K_i P^T(0, r)}\right) - \mathbb{E}[\mathcal{L}_T]\right)\right) \\ & + K_i P^T(0, r)\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\check{\mathcal{L}}_T]}}\left(\ln\left(\frac{K_i P^T(0, r)}{s}\right) - \mathbb{E}[\check{\mathcal{L}}_T]\right)\right). \end{aligned}$$

Minimitakuutuottovauhdin $\max(R_g, \rho_{\tau_i})$ takaavan sopimuksen käyvän arvon määritys on kappaleen 3.1 tulosten valossa luonnollisesti erittäin vaikeata ja yleisesti ottaen käyvän arvon määritys voidaankin tyypillisesti toteuttaa vain numeerisesti pääoman kasvuyhtälön autoregressiivisyyttä soveltamalla.

7.2.3 Hyödyllinen yleistys

Edellisen kappaleen tulosten valossa on selvää, että korkoriskin vallitessa nollakuponkilainojen hintojen stokastinen aikarakenne näyttelee keskeistä osaa sopimusten käypien arvojen määrityksessä. Erityisesti nollakuponkilainojen logaritmisen kasvuvauhdin Gaussilaisuus helpotti analyysia merkittävästi ja johti suljetun muodon tuloksiin jotka oli esitettävissä standardin normaalijakautuman kertymäfunktion avulla. Tämän havainnon valossa onkin luonnollisesti kiinnostavaa tarkastella kuinka pitkälle edellisen kappaleen tulokset on yleistettävissä. Tarkastellaan nyt asetelmaa, jossa kohde-etuuden hintadynamiikka määräytyy stokastisesta differentiaaliyhtälöstä (80) ja bondihinnat noudattavat stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dP^T(t,r_t) = r_t P^T(t,r_t)dt + \Lambda(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t$$

mukaista dynamiikkaa. Oletetaan myös, että kuvaus $\Lambda(t,T)$ on deterministinen sekä jatkuva molempien tekijöidensä suhteen. Määritellään nyt eksponentiaaliset martingaalit

$$\mathcal{M}_t^T = e^{\sigma(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) + \eta(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{1}{2}(\sigma^2+\eta^2)(T-t)}$$

sekä

$$\check{\mathcal{M}}_t^T = e^{\int_t^T \Lambda(s,T)d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_t^T \Lambda^2(s,T)ds}.$$

Määritellään nyt mitta $\tilde{\mathbb{Q}}$ uskottavuuskertoimen $d\tilde{\mathbb{Q}}/d\mathbb{Q} = \mathcal{M}_t^T$ avulla. Tämän mitan alaisuudessa on selvää, että

$$\begin{aligned} dP^T(t,r_t) &= (r_t + \sigma\Lambda(t,T))P^T(t,r_t)dt + \Lambda(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} \\ dS_t &= (r_t + \sigma^2 + \eta^2)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} + \eta S_t d\hat{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}. \end{aligned}$$

Soveltamalla Itôn lausetta kuvaukseen $P^T(t,r_t)/S_t$ havaitaan, että

$$d\frac{P^T(t,r_t)}{S_t} = \left[(\Lambda(t,T)-\sigma)d\tilde{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}} - \eta d\hat{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}\right]\frac{P^T(t,r_t)}{S_t}.$$

Tämän tuloksen nojalla saadaan tulokseksi

$$\frac{1}{S_T} = \frac{P^T(t,r_t)}{S_t}e^{Z(t,T)},$$

missä

$$Z(t,T) = \int_t^T (\Lambda(s,T)-\sigma)d\tilde{W}_s^{\tilde{\mathbb{Q}}} - \eta(\hat{W}_T^{\tilde{\mathbb{Q}}} - \hat{W}_t^{\tilde{\mathbb{Q}}}) - \frac{1}{2}\int_t^T \left[(\Lambda(s,T)-\sigma)^2 + \eta^2\right]ds$$

on normaalisti jakautunut keskiarvonaan

$$\mathbb{E}[Z(t,T)] = -\frac{1}{2}\int_t^T \left[(\Lambda(s,T)-\sigma)^2 + \eta^2\right]ds$$

sekä varianssinaan

$$\mathrm{var}[Z(t,T)] = \int_t^T \left[(\Lambda(s,T)-\sigma)^2 + \eta^2\right]ds.$$

Vastaavasti määrittelemällä nyt mitta $\check{\mathbb{Q}}$ uskottavuuskertoimen $d\check{\mathbb{Q}}/d\mathbb{Q} = \check{\mathcal{M}}_t^T$ avulla havaitaan, että

$$\begin{aligned} dP^T(t,r_t) &= (r_t + \Lambda^2(t,T))P^T(t,r_t)dt + \Lambda(t,T)P^T(t,r_t)d\tilde{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}} \\ dS_t &= (r_t + \sigma\Lambda(t,T))S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}} + \eta S_t d\hat{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}}. \end{aligned}$$

Soveltamalla Itôn lausetta nyt kuvaukseen $S_t/P^T(t,r_t)$ havaitaan, että

$$d\frac{S_t}{P^T(t,r_t)} = \left[(\sigma - \Lambda(t,T))d\tilde{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}} + \eta d\hat{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}}\right]\frac{S_t}{P^T(t,r_t)}.$$

Tämän tuloksen nojalla saadaan tässä tapauksessa tulokseksi

$$S_T = \frac{S_t}{P^T(t,r_t)}e^{\check{Z}(t,T)},$$

missä

$$\check{Z}(t,T) = \int_t^T (\sigma - \Lambda(s,T))d\tilde{W}_s^{\check{\mathbb{Q}}} + \eta(\hat{W}_T^{\check{\mathbb{Q}}} - \hat{W}_t^{\check{\mathbb{Q}}}) - \frac{1}{2}\int_t^T \left[(\sigma - \Lambda(s,T))^2 + \eta^2\right]ds$$

on normaalisti jakautunut keskiarvonaan

$$\mathbb{E}[\check{Z}(t,T)] = -\frac{1}{2}\int_t^T \left[(\sigma - \Lambda(s,T))^2 + \eta^2\right] ds$$

sekä varianssinaan

$$\mathrm{var}[\check{Z}(t,T)] = \int_t^T \left[(\sigma - \Lambda(s,T))^2 + \eta^2\right] ds.$$

Edellisen kappaleen tuloksien mukaisesti havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{F}_t}[e^{-\int_t^T r_s ds}\max(R_g, S_T)] &= R_g\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{F}_t}[e^{-\int_t^T r_s ds}\chi_{(0,R_g)}(S_T)] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{F}_t}[e^{-\int_t^T r_s ds}S_T\chi_{[R_g,\infty)}(S_T)] \\
&= R_g P^T(t,r_t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{F}_t}[\check{\mathcal{M}}_t^T\chi_{(0,R_g)}(S_T)] + S_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{\mathcal{F}_t}[\mathcal{M}_t^T\chi_{[R_g,\infty)}(S_T)] \\
&= R_g P^T(t,r_t)\mathbb{P}^{\check{\mathbb{Q}}}_{\mathcal{F}_t}[S_T < R_g] + S_t\mathbb{P}^{\tilde{\mathbb{Q}}}_{\mathcal{F}_t}[S_T \geq R_g].
\end{aligned}$$

Koska

$$\mathbb{P}^{\check{\mathbb{Q}}}_{\mathcal{F}_t}[S_T < R_g] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[\check{Z}(t,T)]}}\left(\ln\left(\frac{R_g P^T(t,r_t)}{S_t}\right) - \mathbb{E}[\check{Z}(t,T)]\right)\right)$$

ja

$$\mathbb{P}^{\tilde{\mathbb{Q}}}_{\mathcal{F}_t}[S_T \geq R_g] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}[Z(t,T)]}}\left(\ln\left(\frac{S_t}{R_g P^T(t,r_t)}\right) - \mathbb{E}[Z(t,T)]\right)\right)$$

havaitaan, että minimitakuutuottosopimuksen käypä arvo on esitettävissä vastaavassa muodossa kuin aikaisemmin yleisessäkin Gaussilaisessa tapauksessa. Tämä on hyödyllinen tulos, sillä se mahdollistaa korkojen aikarakenteen yleistämisen tapauksiin, joissa korkokäyrän volatiliteetti voi olla hyvinkin kompleksista muotoa ja riippua mahdollisesti useistakin ajavista toisistaan riippumattomista Brownin liikkeistä (kunhan bondien hintojen logaritminen kasvuvauhti on normaali).

Viitteet

[1] Aase, K. K. ja Persson, S.-A. *Pricing of Unit-linked Life Insurance Policies*, 1994, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 26-52.

[2] Alexander, C. *Market Models*, 2001, John Wiley & Sons.

[3] Alvarez, L. H. R. *Zero Coupon Bonds and Affine Term Structures: Reconsidering the One-factor model*, 1998, *Insurance: Mathematics and Economics*, **23**, 85–90.

[4] Alvarez, L. H. R. *On the Form and Risk-sensitivity of Zero Coupon Bonds for a Class of Interest Rate Models*, 2001, *Insurance: Mathematics and Economics*, **28**, 83–90.

[5] Alvarez, L. H. R. *On the Convexity and Risk-Sensitivity of the Price of American Interest Rate Derivatives*, 2003a, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63**, 923–936.

[6] Alvarez, L. H. R. *On the Properties of r-excessive Mappings for a Class of Diffusions*, 2003b, *Annals of Applied Probability*, **13**, 1517–1533

[7] Alvarez, L. H. R. *TKM28: Rahoituksen kvantitatiiviset menetelmät*, 2003, Kurssimoniste, TuKKK.

[8] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-N., and Heath, D. *Coherent Measures of Risk*, 1999, *Mathematical Finance* 9, 203-228.

[9] Bergman, Y. Z., Grundy, B. D., and Wiener, Z. *General properties of option prices*, 1996, *Journal of Finance*, **51**, 1573–1610.

[10] Bender, C., Sottinen, T. and Valkeila, E. *No-arbitrage pricing beyond semimartingales*, 2006, WIAS Preprint No. 1110.

[11] Bodie, Z., Kane, A. and Marcus, A., *Investments*, 2002, McGraw-Hill.

[12] Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D., Khorasanee, Z., Plumb, R. and Rickayzen, B. *Modern Actuarial Theory and Practice*, Second Edition, 2004, Chapman&Hall.

[13] Björk, T. *Interest rate theory*, 1997, in *Financial Mathematics*, W.J. Runggaldier (ed.), CIME Lectures 1996, Springer Lecture Notes in Mathematics, Germany.

[14] Björk, T. *Arbitrage Theory In Continuous Time*, 1998, Oxford UP, Somerset.

[15] Brennan, M. J. ja Schwartz, E. *Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee*, 1976, *Journal of Business*, **52**, 63–93.

[16] Brennan, M. J. ja Schwartz, E. *The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee*, 1976, *Journal of Financial Economics*, **3**, 195–213.

[17] Brigo, D. and Mercurio, F. *Interest Rate Models: Theory and Practice*, 2001, Sringer-Verlag, Berlin.

[18] Cairns, A. *Interest rate models: An introduction, 2004*, Princeton University Press.

[19] Campbell, J., Lo, A. and MacKinlay, A *The econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.

[20] Cochrane, J.H. *Asset Pricing*, 2001, Princeton University Press.

[21] Copeland, T. E. ja Weston, J. F. *Financial Theory and Corporate Policy*, 1992, Addison-Wesley, New York.

[22] Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. *Economic capital cllocation derived from risk measures*, 2003, *North American Actuarial Journal* 7, 44-47.

[23] Dhaene, J., Laeve, R., Vanduffel, S., Darkiewicz, G., and Goovaerts, M. *Can a coherent risk measure be too subadditive?*, ilmestyy lehdessä *Journal of Risk and Insurance* 2007.

[24] Duffie, D. *Dynamic asset pricing theory*, (Second Edition) 1996, Princeton UP, U.S.A.

[25] El Karoui, N., Jeanblanc-Picqué, M., and Shreve, S. E. *Robustness of the Black-Scholes Formula*, 1998, *Mathematical Finance*, **8**, 9–126.

[26] Embrehts, P., Kaufmann, R. Patie P. *Strategic long-term financial risks: single risk factors*, 2005, *Computational Optimization and Applications*, **32**, 61-90.

[27] Fitton, P. and McNatt, J. *The four faces of interest rate model*, in Investment Management for Insurers (Ed. Babbel, D and Fobozzi, F.), 1999 Frank J. Fabozzi Associates.

[28] Geman, H., El Karoui, N., and Rochet, J. C. *Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing*, 1995, *Journal of Applied Probability*, **32**, 443–458.

[29] Hobson, D. G. *Volatility mis-specification, option pricing and super-replication via coupling*, 1998, *Annals of Applied Probability*, **8**, 193–205.

[30] Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5th ed, 2003, Pearson Education Inc, New Jersey.

[31] Ingersoll Jr., J. E., *Theory of financial decision making*, 1987, Rowman & Littlefield Publishers, Inc., Maryland.

[32] Jorion, P. *The long-term risks of global stock markets*, 2003, *Financial Management,* **32**, 4, Winter.

[33] Jorion, P. ja Goetzmann, W. *Global stock markets in the twentieth century*, 1999, J*ournal of Finance,* **54,** 3, 953-980.

[34] Karatzas, I. *Lectures on the mathematics of finance*, 1997, *CRM Monograph Series*, American Mathematical Society, Providence.

[35] Karlin, S. ja Taylor, H. *A second course in stochastic processes*, 1981, Academic Press, Orlando.

[36] Kolbin, V. V. *Stochastic Programming*, 1977, D. Reidel Publishing Company, Boston.

[37] Laffont, J.-J. *The economics of uncertainty and information*, 1989, MIT Press, Cambridge.

[38] Leland, H. E. *Saving and uncertainty: The precautionary demand for saving*, 1968, *The Quarterly Journal of Economics*, **28**, 465–473.

[39] Luenberger, D. G. *Investment Science*, 1998, Oxford University Press, New York.

[40] Miltersen, K. R. ja Persson, S.-A. *Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return*, 2003, *Scandinavian Actuarial Journal*, **4**, 257–279.

[41] Møller, T. *On Valuation and Risk Management at the Interface of Insurance and Finance*, 2002, *British Actuarial Journal*, **8**, 787–828.

[42] Møller, T. ja Steffensen, M. *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*, 2007, Cambridge University Press, UK.

[43] Nielsen, J. A. ja Sandmann, K. *Equity-linked life insurance: A model with stochastic interest rates*, 1995, *Insurance: Mathematics & Economics*, **16**, 225–253.

[44] Nielsen, J. A. ja Sandmann, K. *Uniqueness of the fair premium for equity-linked life insurance contracts*, 1996, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, **21**, 65–102.

[45] Øksendal, B. *Stochastic differential equations: An introduction with applications*, (Fifth Edition) 1998, Springer, Berlin.

[46] Panjer, H. *Financial Economics with applications to investments, insurance and pensions*, 1998, The Actuarial Foundation.

[47] Persson, S.-A. *Stochastic Interest Rate in Life Insurance: The Principle of Equivalence Revisited*, 1998, *Scandinavian Actuarial Journal*, 97–112.

[48] Protter, P. *Stochastic integration and differential equations*, 2nd edition, 2004, Springer, New York.

[49] Rabin, M. *Psychology nad Economics*, 1998, *Journal of Economic Literature*, 36, 11-46.

[50] Ruskeepää, H. *Mathematica® Navigator: Graphics and Methods of Applied Mathematics*, 1999, Academic Press, San Diego.

[51] Samuelson, P. A. *The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances, and higher moments*, 1970, *The Review of Economic Studies*, **37**, 537–542.

[52] Sandmo, A. *The effect of uncertainty on saving decisions*, 1970, *The Review of Economic Studies*, **37**, 353–360.

[53] Siegel, J. *Stocks for the Long Run*, 2002, McGraw-Hill.

[54] Shiller, R. *Irrational Exuburance*, 2000, Princeton University Press.

[55] Shleifer, A ja Vishny R. *The limits of arbitrage, 1997, The Journal of Finance*, 1, 35-55.

[56] Tanskanen, A. J. ja Lukkarinen, J. *Fair valuation of path-dependent participating life insurance contracts*, 2003, *Insurance: Mathematics & Economics*, **33**, 595—609.

[57] Tsay, R. *Analysis of Financial Time Series,* 2002, John Wiley & Sons.

LIITE: Eräitä käytettyjä symboleja

Symboli
U hyötyfunktio s. 1
A Arrowin ja Prattin absoluuttinen riskiaversio s. 6
R suhteellinen riskiaversio s.7
D tuottomatriisi s. 9
w varallisuus s. 9
$\mathbf{P}$ arvopaperin hintavektori s.10
ψ tilahintavektori s.10
r_f riskitön tuotto s.12
d_1(riskillinen)tuotto s.13
c_i kulutus s. 15
$u(c_1, c_2)$ samahyötykäyrä s. 16
β_s subjektiivinen diskonttaustekijä s. 19
m_t deflaattori s. 19
$\bar{\mathbf{r}}$ (riskillisten) keskituottojen vektori s. 20
$\mathbf{w}^T$ on suhteellisten sijoitusosuuksien muodostama vektori s.20
$\mathbf{1}$ ykkösvektori s. 19
ρ vaadittu tuotto s. 19
$\mathbf{r}$ tuottovektori s. 25
ρ tunnettu kynnystaso s. 27
α vaadittu turvaavuustaso s. 27; (parametri s. 2)
$\mathbf{f}$ faktorien muodostam vektor s. 31
W_t Wiener prosessi s. 36
r_t lyhyt riskitön korko s. 47
$\Pi(s)$ palkkiokuvaus s. 47
h_t omarahoitteinen sijoitussalkku s. 47
V_t^h (omarahoitteisen) salkun arvo s. 47

Symboli
$C_K^T(t,s)$ eurooppalaisen osto-option hinta s. 49
$P_K^T(t,s)$ eurooppalaisen myyntioption hinta s. 50
s_n spot-korko, s. 62
$f_{k,n}$ termiinikorko s. 62
P_n 0-kuponkilaina s. 63
PV_X nykyarvo s. 63
$\lambda(t,r)$ riskin markkinahinta
L tappio s. 81
VaR Value at risk s. 81
ES Odotettu tappio s. 82

”**Kreikkalaiset**”	
Hinnan delta	$\Delta = \frac{\partial P}{\partial s}(t,s)$
Hinnan gamma	$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(t,s)$
Hinnan korkoherkkyys rho	$\rho = \frac{\partial P}{\partial r}(t,s)$
Hinnan aikaherkkyys theta	$\Theta = \frac{\partial P}{\partial t}(t,s)$
Hinnan riskiherkkyys vega	$\mathcal{V} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}(t,s).$

LIITE: Hyödyllistä sanastoa ja tulkintoja

Erinomainen myös tämän monisteen aihepiirin tietoja sisältävä internetsivusto on *Wikipedia, the free encyclopedia* (http://en.wikipedia.org/).

1. *Amerikkalainen optio* on optio, joka voidaan lunastaa milloin tahansa sopimuksen juoksuaikana. Ts. amerikkalainen (osake) osto-optio antaa haltijalleen oikeuden ostaa etukäteen sovittuun hintaan sopimuksen perustana oleva osake minä hetkenä tahansa ennen maturiteettia (ts. sopimuksen raukeamista). On syytä huomata, että tämän luokan optioiden arvottaminen voidaan nähdä optimaalisen pysäytyksen ongelmana ja siten ns. vapaapäätepisteongelmana.

2. *Arbitraasi* on sijoitusmahdollisuus, jossa varma nettotuotto voidaan generoida ilman nettoinvestointia ja siten todellista sijoitusriskiä. Se perustuu yleensä markkinoiden hinnoittelupoikkeamiin, joissa eri markkinoilla annetaan vastaavalle tuotteelle eri hinta. Siten arbitraasi on eräänlainen markkinoiden informatiivisen tehottomuuden mittari. Esimerkkinä voidaan tarkastella valuuttamarkkinoita, joissa euro/dollari-vaihtosuhde on toisistaan poikkeava. Tällöin varmaa riskitöntä tuottoa voitaisiin saavuttaa ostamalla dollareita niiltä markkinoilta,jossa se on vaihtosuhteeltaan edullisempi, ja myydä ne välittömästi niille markkinoille, joissa se on kalliimpi. Tällaisen strategian hinta olisi 0, mutta tuotto positiivinen tn:llä 1. Jos markkinat ovat informatiivisesti tehokkaat, niin tällaiset poikkeamat katoavat itsestään hyvin nopeasti kysynnän ja tarjonnan lain nojalla.

3. *Aasialainen optio* on optio, jonka tuotto riippuu sen arvon perustana olevan arvopaperin keskimääräi- sestä arvosta. Tällaiset sopimukset ovat yleisesti käytössä raaka-ainemarkkinoilla, ja ne ovat teknisesti hyvinkin vaativia arvotettavia, sillä ne ovat ns. polkuriippuvaisia (ts. riippuvat arvopaperin arvon kehityksestä koko sopimuksen juoksuaikana).

4. *Kynnysoptio* (barrier option) on optio, jonka arvo riippuu siitä onko arvottamisen perustana oleva arvopaperi saavuttanut jonkin edeltäkäsin sovitun kynnystason vai ei.

5. *Korioptio* on optiosopimus, jossa kohde-etuutena oleva arvopaperi on osakesalkun tuotto. On syytä huomata, että monet ns. sijoitussidonnaiset sopimukset kuuluvat tähän luokkaan, sillä niissä on nimenomaan kyse optioista, jotka perustuvat yhtiön sijoitusportfolion tuottoon.

6. *Bermudalainen optio* on optio, joka voidaan juoksuaikanaan lunastaa eri ajanhetkinä. Sitä voidaan siis pitää eurooppalaisten optioiden ja amerikkalaisten optioiden välimuotona.

7. *Beta* (eli osakkeen β) on osakkeen systemaattisen riskin mitta. Tämä on APT-teoreettisen mallin pohjalta esitettävissä seuraavalla tavalla. Esitetään arvopaperin tuotto markkinasalkun tuoton avulla faktorimallina $r_i = a_i + \beta_i(r_M - r_f) = \bar{r}_i + \beta_i(r_M - \bar{r}_M)$, missä luonnollisesti on oltava voimassa ehto $\mathrm{cov}[r_i, r_M] = \beta_i\sigma_M^2$. Lisäämällä arvopaperin tuottoa kuvaavaan yhtälöön arvopaperikohtainen faktorista riippumaton satunnaiskomponentti ε_i saadaan $r_i = \bar{r}_i + \beta_i(r_M - \bar{r}_M) + \varepsilon_i$. Ottamalla tästä yhtälöstä odotusarvo puolittain saadaan tulokseksi ehto $\mathbf{E}[\varepsilon_i] = 0$. Vastaavasti satunnaiskomponentin ε_i sekä faktorin riippumattomuudesta seuraa, että $\mathrm{var}[r_i] = \beta_i^2\sigma_M^2 + \mathrm{var}[\varepsilon_i]$. Huomataan, että arvopaperin tuoton varianssi on kahden komponentin summa. Ensimmäinen tekijä $\beta_i^2\sigma_M^2$ on ns. *systemaattinen riski* tai *diversifioitumaton riski*, joka mittaa markkinoiden kokonaisriskiä. Tätä riskiä ei voida pienentää diversifioinnilla, koska jokainen arvopaperi, jonka $\beta \neq 0$ sisältää tämän riskin. Toinen tekijä $\mathrm{var}[\varepsilon_i]$ on ns. *epäsystemaattinen tai spesifinen riski* (tunnetaan myös nimellä *idiosynkraattinen* riski), joka ei korreloi markkinariskin kanssa, ja sitä voidaankin pienentää diversifioimalla salkkua.

8. *Sharpen indeksi* on sijoitusportfolion tuoton riskikorjattu mittari. Olkoon portfolion tuotto r_p, hajonta σ_p ja riskitön tuotto r_f. Sharpen indeksi määritellään kaavalla $(r_p - r_f)/\sigma_p$.

9. *Treynorin indeksi* on sijoitusportfolion tuoton riskikorjattu mittari. Olkoon portolion tuotto r_p, beta β_p ja riskitön tuotto r_f. Treynorin indeksi määritellään kaavalla $(r_p - r_f)/\beta_p$.

10. *Jensenin alfa* on sijoitusportfolion tuoton riskikorjattu mittari. Olkoon portolion tuotto r_p, beta β_p, riskitön tuotto r_f ja markkinasalkun tuotto r_M. Jensenin alfa määritellään kaavalla $r_p - r_f - \beta_p(r_M - r_f)$.

11. *Arvostussuhde.* $P/E-luku$ on osakkeen hinnan (P) ja tuoton (E) suhde. $P/D-luku$ on osakkeen hinnan (P) ja osingon (O) suhde. P/D-lukua kutsutaan myös $efektiiviseksiosinkotuotoksi$. $M/B-luku$ (*Market to Book*) on yhtiön markkina-arvon ja kirja-arvon (varat - velat) välinen suhde.

12. *Binäärinen optio* on optio, jonka palkkio on epäjatkuva. Tähän luokkaan kuuluvat monet "kaikki tai ei mitään-tyyppiset sopimukset, jotka takaavat haltijalleen osakkeen (tmv. arvopaperin), mikäli arvottamisen perustana olevan arvopaperin arvo ylittää annetun kynnyshinnan, ja ei mitään, mikäli näin ei tapahdu.

13. *Bondioptio* on optio, jossa arvottamisen perustana oleva arvopaperi on bondi.

14. *Eurooppalinen osto-optio* on sopimus, joka takaa haltijalleen oikeuden ostaa ennalta käsin sovittuun hintaan arvottamisen perustana olevan osakkeen maturiteetissaan.

15. *Päällekkäiset optiot* ovat optioita optioista. Monesti puhutaan myös johdannaissopimuksiin upotetuista optioista.

16. *Hajasäärioptio* (straddle) on optio, joka velvoittaa haltijansa joko myymään tai ostamaan maturiteetissa osake edeltäkäsin sovittuun kiinteään lunastushintaan.

17. *Takaisinosto-oikeuden omaava bondi* on bondi, joka takaa sen liikkeellelaskijalle oikeuden (muttei velvoitetta) ostaa se bondin omistajalta etukäteen sovittuun hintaan etukäteen sovittuina ajankohtina velkakirjan juoksuaikana.

18. *Luottojohdannainen* on johdannaissopimus, jonka palkkio riippuu jonkin sopimusosapuolten (tai kaikkien osapuolien) luottokelpoisuudesta. Monien luottojohdannaisten arvottamisen perustana on ns. *luottokori,* joka puolestaan on erilaisista velkakirjoista koostuva arvopaperisalkku. Sellaisessa tapauksessa luottokelpoisuustekijät vaikuttavat johdannaisen arvoon luottokorissa olevien luottojen sisältämän *luottoriskin* kautta.

19. *Valuuttaswappi* on sopimus, joka takaa haltijalleen oikeuden vaihtaa kuponkilainan arvottamistekijät yhdestä valuutasta (ja sen mukaisesta korosta) toiseen.

20. *Päiväkauppa* (tai *päivän sisäinen kauppa*) on arvopaperikauppa, joka toteutetaan yhden (pörssi-) päivän aikana.

21. *Johdannaisen delta* Δ mittaa johdannaisen hinnan herkkyyttä arvottamisen perustana olevan osakkeen hinnan muutoksiin.

22. *Johdannaisen gamma* Γ mittaa johdannaisen deltan herkkyyttä arvottamisen perustana olevan osakkeen hinnan muutoksiin.

23. *Johdannaisen rho* ρ mittaa johdannaisen hinnan herkkyyttä diskonttokoron muutoksien suhteen.

24. *Johdannaisen theta* θ mittaa johdannaisen hinnan muutosvauhtia ajan suhteen.

25. *Johdannaisen vega* $\mathcal{V}$ mittaa johdannaisen hinnan herkkyyttä arvottamisen perustana olevan osakkeen hinnan volatiliteetin muutoksiin.

26. *Diskonttobondi* on tavanomaisen nollakuponkilainan eli T-bondin yksi vaihtoehtoinen nimitys.

27. *Konsolibondi* (consol bond) on nimellisarvoton äärettömän maturiteetin omaava kuponkilaina, joka maksaa omistajalleen jatkuvan vakiokupongin c.

28. *Ennenaikaiseksi lunastamiseksi* kutsutaan johdannaissopimuksen lunastamista ennen maturiteettia. Tämä ominaisuus on voimassa vain amerikkalaisille sekä bermudalaisille johdannaisille.

29. *Eurooppalainen optio* on optio, joka voidaan lunastaa vain sopimuksen maturiteetissa. Ts. eurooppalainen (osake) osto-optio antaa haltijalleen oikeuden ostaa etukäteen sovittuun hintaan sopimuksen perustana oleva osake etukäteen sovittuna ajanhetkenä. Vastaavasti eurooppalainen (osake) myynti-optio antaa haltijalleen oikeuden myydä etukäteen sovittuun hintaan sopimuksen perustana oleva osake etukäteen sovittuna ajanhetkenä.

30. *Vaihto-optio* on sopimus, joka antaa haltijalleen oikeuden vaihtaa arvopaperi toiseen.

31. *Eksoottiseksi optioksi* lasketaan mikä tahansa epätavallinen (kaupankäyntiaktiivisuusmielessä) johdannaissopimus.

32. *Swappi* on yleisnimitys sopimuksille, joissa annettuun arvottamisen perustana olevaan satunnaiseen arvoon sidottu kassavirta vaihdetaan toiseen. Erityisesti korkoswapeilla on keskeinen riskienhallinnallinen merkitys korkoriskiltä suojauduttaessa.

33. *Sopimuksen ekspiraatiolla* tarkoitetaan sopimuksen umpeutumista, ja siten ekspiraatiohetki on sopimuksen umpeutumishetki (eli maturiteetti).

34. *Valuuttajohdannainen* on valuuttasidonnainen sopimus.

35. *Termiinisopimus* on sopimus, joka velvoittaa haltijansa ostamaan annettuna ajanhetkenä etukäteen sovitun arvopaperin sopimuksen kirjaamishetkellä vallitsevien hintojen mukaisesti.

36. *Implikoitu volatiliteetti* on johdannaisen tai arvopaperin käyvän arvon implikoima volatiliteetti. Ts. se on se volatiliteetti, joka on konsistentti noteeratun hinnan kanssa.

37. *Indeksijohdannainen* on johdannaissopimus, jonka arvottamisen perustana oleva tekijä on osake- tai muu vastaava indeksi (esim. HEX25).

38. *Numerääri* on sovellettu arvon mittari (ts. se arvo, minkä suhteen muut arvot suhteutetaan ja minkä tekijöinä muut arvot ilmaistaan). Tällöin, jos sopimuksen 1 vallitseva hinta on P_1 euroa ja sopimuksen 2 hinta on P_2 euroa, niin silloin sopimuksen 1 hinta on P_1/P_2 sopimuksen 2 arvossa mitattuna.

39. *Polkuriippuvainen johdannainen* on sopimus, jonka arvo riippuu arvottamisen perustana olevan suureen koko historiasta eikä pelkästään sen arvosta maturiteetissa. Tähän luokkaan kuuluu suuri osa korkojohdannaisista sekä minimi- ja maksimikurssiin sidotuista johdannaisista.

40. *Reaalioptio* on johdannaissopimus, jonka perustana oleva arvo on reaalinen (ei siis pörssisuure).

41. *Lyhyeksi myyminen* on kaupankäyntiä, jossa myydään arvopapereita velaksi (niitä ei siis myyntihetkellä vielä omisteta).

42. *Transaktiokustannukset* ovat kaupankäynnistä aiheutuvat kustannukset (komissiot ymv. kustannukset).

43. *Warrantti* on yhtiön tai finanssi-instituution liikkeellelaskema optio. Warrantit ovat tyypillisesti hyvin pitkän maturiteetin omaavia optioita.

44. *Sääjohdannainen* on johdannaissopimus, jonka arvo riippuu säästä.

45. *LIBOR pankkikorko* (London InterBank offered Rate) on Lontoon pankkien toisille pankeille antaman lainan korko (vrt. Libor-korkomalli s. 77).