SUOMEN PANKIN
KIRJASTO

KESKUSTELUALOITTEITA
DISCUSSION PAPERS

Olli-Pekka Lehmussaari

Juha Tarkka

PORTFOLIO-OPTIMOINNIN SUORITTAMINEN "SALKKU"-TIETOKONEOHJELMALLA

IV A5, IV A9
muistiinnot

23.1.1984
VP 1 / 84

Suomen Pankin
Valuuttapolitiikan osasto

Bank of Finland
Exchange Policy Department

SISÄLLYSLUETTELO:

1 JOHDANTO 1

2 TEHOKKAIDEN PORTFOLIOIDEN URA 2

3 KÄYTÄNNÖN ESIMERKKI PORTFOLIOANALYYSIN SUORITTAMISESTA "SALKKU"-OHJELMALLA 10

4 LOPPUVAROITUS 18

LIITE

1 JOHDANTO

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on opastaa portfolioteoriasta kiinnostuneita tutkijoita teorian tulosten empiirisessä hyödyntämisessä yksinkertaisen ATK-sovellutuksen avulla. Moderni portfolioteoria on ensi sijassa tullut tutuksi teoreettisista, yrityksen rahoitukseen liittyvistä tutkimuksista. Teorian avulla johdettujen tulosten käytäntöön soveltaminen on kuitenkin usein koettu vaikeaksi riittämättömien laskentarutiinien johdosta. Seuraavassa esiteltävää sovellusta voi käyttää apuna esimerkiksi järkevien valuuttasijoitussalkkujen ja/tai -velkasalkkujen etsimisessä.

Eräs portfolioteorian johtoajatuksista on, että portfolion kokonaisriski on tietyin edellytyksin pienempi kuin portfoliossa mukana olevien yksittäisten sijoituskohteiden ja että portfolioon liittyvää kokonaisriskiä voidaan pienentää diversifikaation avulla. Epävarmuuden vähentäminen vaikuttaa kuitenkin portfolion odotettuun tuottoon, minkä seurauksena investoija joutuu valintatilanteeseen odotetun tuoton ja siihen liittyvän epävarmuuden suhteen.

Seuraavassa ei kuitenkaan tarkastella investoijan suhtautumista epävarmuuteen, vaan esitetään menetelmä nk optimaalisten portfolioiden uran laskemiseksi. Päätöksentekijän suhtautuminen riskin ja odotetun tuoton väliseen trade offiin määrittää tältä uralta pisteen, joka on konsistentti rationaalisesti käyttäytyvä investoijan preferenssin kanssa.

Portfolioteorian asema kansantaloustieteessä on vakiintunut. Markowitzin (1959) ja Tobinin (1965) huomiota herättäneiden artikkeleiden jälkeen aihepiirin (mean variance -lähestymistapa) kirjallisuus on voimakkaasti lisääntynyt. Nyttemmin portfolioteoriaa on sovellettu mm. valuuttakurssien määräytymiseen ja yleiseen maksutaseanalyysiin (Branson 1979, Dornbusch 1980, Kouri 1976, 1977, Kouri ja Macedo 1978, Macedo 1982).

Esitys rakentuu seuraavasti: luvussa 2 johdetaan tehokkaiden portfolioiden uralle eksplisiittinen lauseke, joka on tavanomaisen rajoitetun ääriarvotehtävän ratkaisu. Tämän erityisratkaisuna voidaan määrittää mm. ns. minimivarianssiportfolio. Luvussa 3 tarkastellaan ratkaisun ATK-sovellusta, joka on ohjelmoitu Suomen Pankin DEC-20 laitteistolle.

2 TEHOKKAIDEN PORTFOLIOIDEN URA

Seuraavassa ajatellaan, että investointipäätöstä harkitseva taloudenpitäjä voi sijoittaa vaihtoehtoisiin riskipitoisiin sijoituskohteisiin, joita on n kappaletta. Kokonaisvarallisuuden osaa, joka sijoitetaan i:nteen sijoituskohteeseen on merkitty x_i:llä. Sijoituskohteet muodostavat vektorin $x = (x_1 \ldots x_n)'$. Tästä seuraa että $\Sigma x_i = 1$.

Portfolioteorian perustuloksia ovat mm. seuraavat.[1)]

1 Kun eri sijoituskohteiden tuottoihin liittyvät odotusarvot, varianssit ja tuottojen korrelaatiot tunnetaan, voidaan laskea ns. tehokkaiden portfolioiden ura. Tällä tarkoitetaan niiden sijoitussalkkujen joukkoa, joiden odotettua tuottoa ei voi kasvattaa ilman että tuottoon liittyvä riski samalla lisääntyisi. Vastaavasti tälle uralle kuuluvien salkkujen riskipitoisuutta ei voida mitenkään vähentää tuoton odotusarvosta tinkimättä. Tämä tehokkaiden portfolioiden ura muodostaa tuotto-riski-koordinaatistossa oikealle aukeavan hyperbelin (kuvio 1).

2 Edellisessä kohdassa mainitun paraabelin pohjalla on ns. minimivarianssiportfolio. Tämä osoittaa sen riskitason, jota suurempaan varmuuteen sijoittaja ei voi millään keinolla päästä, vaikka olisikin valmis tinkimään odotetusta tuottovaatimuksestaan. Kuviossa 1 minimivarianssiportfolio sijoittuu pisteeseen M.

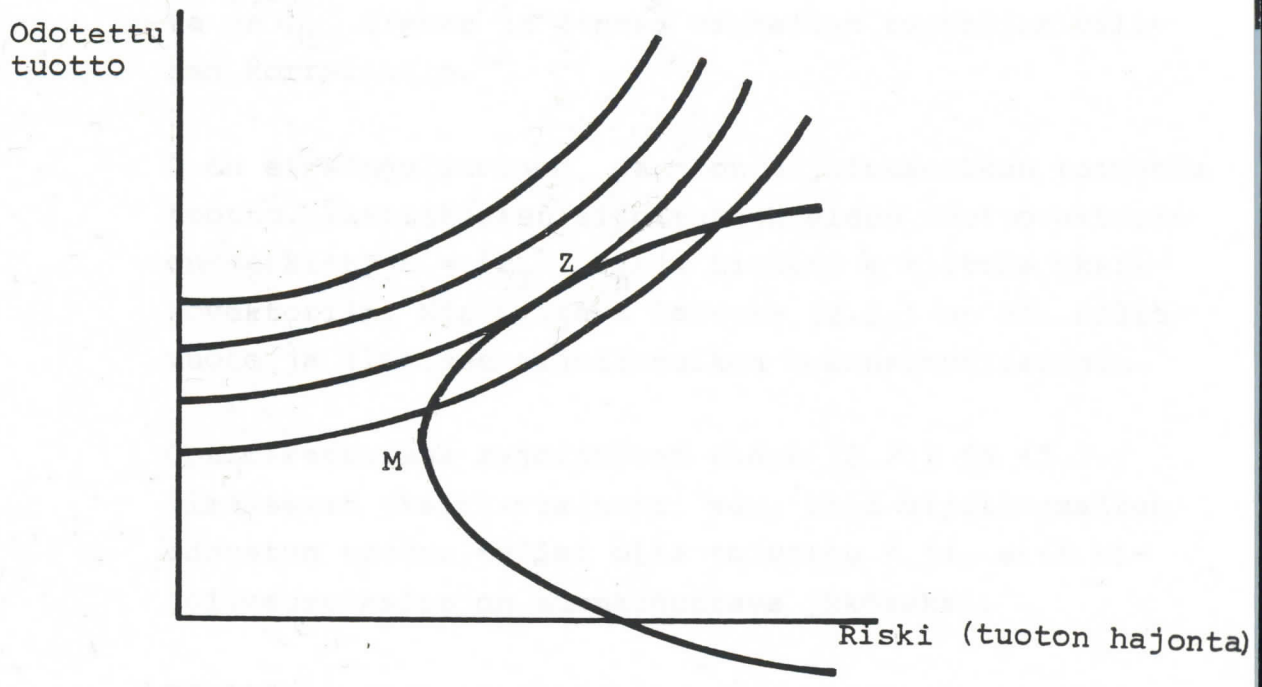
3 Yleensä sijoittaja ei kuitenkaan valitse minimivarianssiportfoliota vaan jonkin muun vaihtoehdon, jossa odotettu tuotto, mutta myös riski, on jonkin verran suurempi. Jos sijoittajan preferenssejä kuvaavat indifferenssikäyrät ovat sellaiset kuin kuvioon 1 piirretyt, hän valitsee tehokkaiden portfoli-

---

1) Ks. esim. Lehmussaari 1983.

oiden uralta pisteen Z. Tämä portfolio, samoin kuin kaikki muutkin tehokkaat portfoliot voidaan esittää minimivarianssiportfolion ja ns. spekulatiivisen portfolion painotettuna keskiarvona: eri pisteissä tehokkaiden portfolioiden uralla, näiden vaihtoehtojen painot vain ovat erilaiset.

KUVIO 1 Tehokkaiden portfolioiden ura



Tehokkaiden portfolioiden ura on siis kuvioon 1 piirretyn hyperbelin ylempi haara. Tämän hyperbelin yhtälö voidaan löytää ratkaisemalla rajoitettu minimointitehtävä, jossa portfolion varianssi minimoidaan pitäen samalla odotettu tuotto annetulla tasolla.

(2.1.) $\min_x x'\Omega x,$

ehdolla, että

(2.2.) $\pi = x'r$

(2.3.) $x'e = 1$,

jossa Ω viittaa sijoituskohteiden tuottojen kovarianssi-varianssimatriisiin, jonka alkiot ovat $v_{ij} = \delta_i \delta_j \rho_{ij}$, jossa δ_i on i:nnen vaateen tuoton keskihajonta ja ρ_{ij} i:nnen ja j:nnen vaateiden tuottojen välinen korrelaatio.[1)]

Ω on ei-singulaarinen ja π on sijoitussalkun toivottu tuotto. Yksittäisten sijoituskohteiden tuottovektoria on merkitty $r = (r_1 \ldots r_n)'$. Lisäksi e viittaa yksikkövektoriin. Minimoitava lauseke (2.1.) on ns. neliömuoto ja ilmaisee sijoitusalkun kokonaisvarianssin.

Optimiratkaisua rajoittavat ehdot (2.2.) ja (2.3.) ilmaisevat yksinkertaisesti sen, että sijoitussalkun odotetun tuoton tulisi olla toivottu π ja, että sijoitusosuuksien on summauduttava ykköseksi.

Edellä kuvattu optimointiongelma voidaan ratkaista nk. Lagrangen tekniikalla. Lagrangen funktio on muotoa[2)]:

(2.4.) $L(x,\lambda_1,\lambda_2) = x'\Omega x - \lambda_1(r'x-\pi) - \lambda_2(e'x-1)$

Varianssin minimi löydetään ratkaisemalla yhtälöryhmä

---

1) Sijoitusongelma voitaisiin määritellä myös siten, että x viittaa kokonaisvarallisuuden absoluuttiseen osaan. Tällöin ehto (2.3) korvautuisi ehdolla $W_o = x'e$, jossa W_o on investoijan alkuvarallisuus.

2) Ks. esim. Szegö (1980) s. 23-25.

$$(2.5.)\quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2x'\Omega - \lambda_1 r' - \lambda_2 e' = 0$$

$$(2.6.)\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -r'x + \pi = 0$$

$$(2.7.)\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -e'x + 1 = 0$$

Yhtälöryhmälle (2.5.)-(2.7.) on olemassa ratkaisu x, λ_1 ja λ_2 suhteen jos ja vain jos ryhmän kerroinmatriisin determinantti on erisuuri kuin nolla ts.

$$(2.8.)^{1)} \begin{vmatrix} 2\Omega & r & e \\ -r_1' & 0 & 0 \\ -e' & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vaatimus (2.8) on aina voimassa, jos voidaan olettaa, että kaikki vektorin r komponentit eivät ole yhtäsuuria ts. $r_i \neq r_j$ jollekin i, j = 1...n. Jäljempänä oletetaan ehdon (2.8) olevan aina voimassa.

Yhtälöryhmää (2.5.)-(2.7.) manipuloitaessa on järkevää ratkaista x' yhtälöstä (2.5.) ja kertoa näin saatu lauseke takaa r:llä, jolloin x':lle ja odotetulle tuotolle saadaan lausekkeet

$$(2.9.)\quad x' = \frac{1}{2}\lambda_1 r'\,\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\lambda_2 e'\Omega^{-1}$$

---

1) Yhtälö (2.5.) on transponoitu

$$(2.10.) \quad \pi = \frac{1}{2}\lambda_1 r' \, \Omega^{-1} r + \frac{1}{2} \lambda_2 e' \, \Omega^{-1} r$$

Vastaavasti, jos kerrotaan x' takaa e:llä ja otetaan huomioon (2.7.) saadaan:

$$(2.11.) \quad \frac{1}{2} \lambda_1 r' \, \Omega^{-1} e + \frac{1}{2} \lambda_2 e' \, \Omega^{-1} e = 1$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi sovitaan, että $a = r'\Omega^{-1}r$, $b = r' \, \Omega^{-1} e$ ja $c = e'\Omega^{-1}e$, jolloin (2.10.) ja (2.11.) voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$(2.12.) \quad \frac{1}{2} \lambda_1 a + \frac{1}{2} \lambda_2 b = \pi$$

$$(2.13.) \quad \frac{1}{2} \lambda_1 b + \frac{1}{2} \lambda_2 c = 1$$

Vastaavasti kuten (2.8.):ssa tulee yhtälöryhmän (2.12.)-(2.13.) kertoimista[1)] muodostetun determinantin olla eri suuri kuin nolla ts.

$$(2.14.) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$$

Ehto (2.14.) on aina voimassa vieläpä niin, että det (.) > 0. Jotta optimaalinen sijoituskombinaatio x saataisiin määritellyksi on yhtälöryhmä (2.12.)-(2.13.) ratkaistava vielä $\frac{1}{2} \lambda_1$ ja $\frac{1}{2} \lambda_2$ suhteen. Cramerin säännöstö seuraa, että

---

1) Tässä muuttujina ovat $\frac{1}{2} \lambda_1$ ja $\frac{1}{2} \lambda_2$

(2.15.) $\frac{1}{2}\lambda_1 = (\pi c-b)/(ac-b^2)$

(2.16.) $\frac{1}{2}\lambda_2 \; (a-\pi b)/(ac-b^2)$

Kun (2.15.) ja (2.16.) sijoitetaan yhtälöön (2.9.) ja transponoidaan saatu lauseke, voidaan optimaalinen sijoitussääntö x ilmaista toivotun tuoton funktiona

(2.17.) $x = \left[(c\Omega^{-1}r-b\Omega^{-1}e)\pi + a\Omega^{-1}e-b\Omega^{-1}r\right] /(ac-b^2)$

Aikaisemmin jo todettiin, että tehokkaiden portfolioiden uraa määritettäessä kannattaa aluksi laskea kaikkien sijoituskombinaatioiden muodostaman joukon reuna riski-tuotto-koordinaatistossa. Jos (2.17.) kerrotaan ensin edestä Ω:lla ja sitten x':lla saadaan

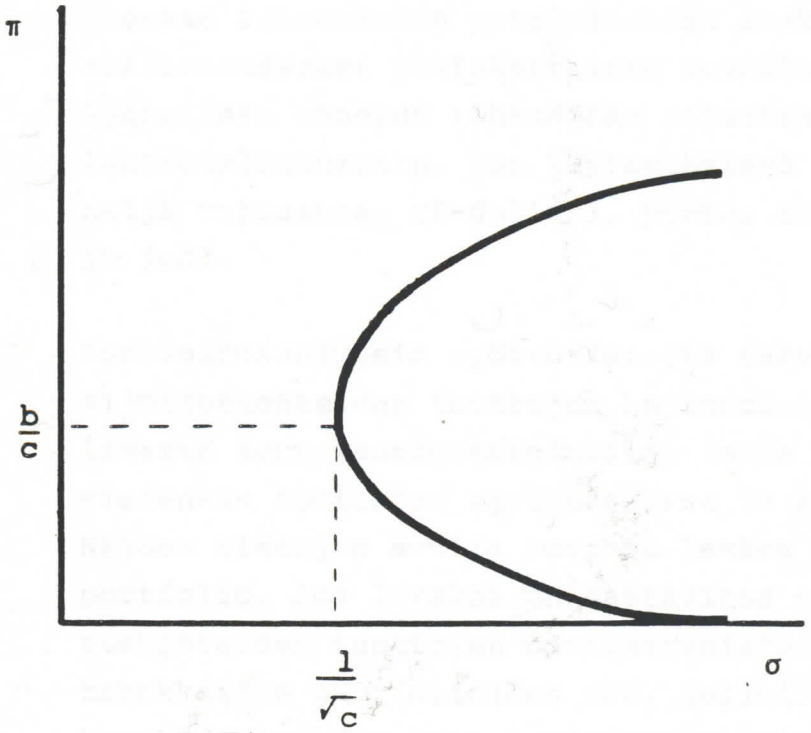
(2.18.) $x'\Omega x = (c\pi^2 - 2b\pi + a)/(ac-b^2)$,

joka ilmaisee portfolion varianssin portfolion odotetun tuoton funktiona. Käytännön sovellutuksissa vaihtoehtoisten portfolioiden riskiä mitataan usein portfolioiden keskihajonnalla. Keskihajontaratkaisu saadaan ottamalla yksinkertaisesti neliöjuuri lausekkeesta (2.18.) ts.

(2.19.) $\sigma = \left[\frac{c\pi^2 - 2b\pi + a}{ac - b^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

Kuviossa 2 on esitetty lausekkeen (2.19.) kuvaaja riski-tuotto-koordinaatistossa. Hyperbelin yläosa ($\pi > b/c$) kuvaa tehokkaita portfolioita.

KUVIO 2 Sijoituskombinaatiojoukon reuna ja minimivarianssi-portfolio



Kuvioon 2 on lisäksi merkitty minimivarianssiportfolion koordinaatit. Minimivarianssiportfolion sijoitusosuudet saadaan lausekkeesta (2.17.):

$$(2.20.) \quad x = \frac{\Omega^{-1}e}{c}$$

Yhtälöstä (2.20.) nähdään se intuitiivisesti luonteva tulos, että minimivarianssiportfolio ei riipu odotetun tuoton vektorista r.

3 KÄYTÄNNÖN ESIMERKKI PORTFOLIOANALYYSIN SUORITTAMISESTA "SALKKU" OHJELMALLA

Otetaan tehokkaiden portfolioiden laskemisen havainnollistamiseksi yksinkertainen sovellusesimerkki. Ajatellaan annetun rahamäärän sijoittamista 1 kk valuuttatalletuksiin, kun käytettävissä on vaikkapa neljä valuuttaa, US-dollari, punta, Sveitsin frangi ja jeni.

Portfolioanalyysin syöttötietoina tarvitaan arviot sijoituskohteiden tuottojen hajonnoista tuottojen välisestä korrelaatiokertoimista. (sama informaatio on tietenkin tuottojen variansseissa ja kovariansseissa) Näiden tietojen avulla voidaan laskea minimivarianssiportfolio. Jos lisäksi on saatavissa tiedot eri sijoituskohteiden tuottojen odotusarvoista, voidaan laskea tehokkaiden portfolioiden ura, jolloin muutkin tehokkaat vaihtoehdot kuin minimivarianssiportfolio tulevat kartoitettua.

Tässä esimerkissä laskettiin tarvittavat tilastolliset tunnusluvut mainittujen neljän valuutan vuonna 1983 toteutuneiden tuottojen perusteella: käytettävissä oli viikkosarjat 1 kk talletusten tuotoista, mukaanlukien valuuttakurssivoitot ja -tappiot. Laskelmat perustuvat seuraaviin, tuotto-odotuksia ja niihin liittyvää epävarmuutta kuvaaviin tunnuslukuihin:

valuutta	keskimääräinen tuotto, % p.a.	tuoton keskihajonta, %-yks.
USD	18.3	16.2
GBP	7.1	24.7
CHF	17.5	17.5
JPY	18.8	16.5

Valuuttojen (ts. valuuttatalletusten) tuottojen korrelaatiot vuodelta 1983 voidaan koota seuraavan matriisin muotoon:

	USD	GBP	CHF	JPY
USD	1	0.09	-0.49	-0.59
GBP	0.09	1	-0.35	-0.40
CHF	-0.49	-0.35	1	0.79
JPY	-0.59	-0.40	0.79	1

Tämän informaation varassa voidaan ryhtyä portfolioiden laskemiseen. Seuraavassa kuvataan työprosessin kulku sellaisena kuin se on toimittaessa DEC-20-tietokoneella. Käyttäjän ja koneen välinen keskustelu on esitetty kokonaisuudessaan. Käyttäjän antamat rivit, jotka lähetetään RETURN-näppäimellä, on erotettu nuolella (←).

1 Vaihe: Yhteydenotto ja ohjelman käynnistäminen

Yhteys DEC-20:een otetaan kuten normaalisti. Tämän jälkeen siirrytään BASIC-kielen käyttöön ja kutsutaan ohjelmaa "salkku". Se käynnistetään komennolla RUN:

```
@LOGIN LEHMUSSAARI (PASSWORD)  (ACCOUNT) ←
 Job 35 on TTY26 13-Jan-84 09:37:38
 You have a message
 End of COMAND.CMD.1
 End of LOGIN.CMD.1
@BASIC ←

READY, FOR HELP TYPE HELP.
OLD SALKKU ←

READY
RUN ←

SALKKU          09:37          13-JAN-84
```

2 Vaihe: Tehtävän parametrien määrittely

Ohjelma kysyy ensiksi valuuttojen (tai minkä tahansa muiden vaihtoehtoisten sijoituskohteiden) lukumäärää, ja sen jälkeen niiden nimiä, joita käytetään myöhemmässä keskustelussa ohjelman kanssa. Seuraavaksi "salkku" tiedustelee sijoituskohde kerrallaan kohteiden tuottojen hajontoja. Nämä on hyvä laskea vuositason prosenttisista tuotoista tulkinnan helpottamiseksi. Lopuksi ohjelma kysyy tuottojen välisiä korrelaatiokertoimia. Korrelaatiomatriisi käydään läpi ainoastaan diagonaalin alapuoliselta osalta, koska matriisi on symmetrinen. Läpikäynti tapahtuu riveittäin.

```
MONTAKO VALUUTTAA (2-10) ?
 ?4 ←
ANNA VALUUTAN NO. 1  NIMI!
 ?USD ←
ANNA VALUUTAN NO. 2  NIMI!
 ?GBP ←
ANNA VALUUTAN NO. 3  NIMI!
 ?CHF ←
ANNA VALUUTAN NO. 4  NIMI!
 ?JPY ←
SYOTAPA ALUKSI VALUUTTATUOTTOJEN KESKIHAJONNAT!

USD
 ?16.2 ←
GBP
 ?24.7 ←
CHF
 ?17.5 ←
JPY
 ?16.5 ←
ANNA SEURAAVAKSI VALUUTTATUOTTOJEN KORRELAATIOT!
USD VS. GBP
 ?0.09 ←
USD VS. CHF
 ?-0.49 ←
GBP VS. CHF
 ?-0.35 ←
USD VS. JPY
 ?-0.59 ←
GBP VS. JPY
 ?-0.40 ←
CHF VS. JPY
 ?0.79 ←
```

3 Vaihe: Minimivarianssiportfolion tulostus

Annettujen tietojen perusteella "salkku" laskee portfolio-osuudet, jotka minimoivat sijoittajan riskin. On mahdollista, että jokin sijoituskohde saa

negatiivisen portfolio-osuuden, jolloin riskin minimointi edellyttäisi negatiivista sijoitusta (velanottoa) tässä valuutassa. Mikäli alkuperäinen ongelma on velkaportfolion jakaminen, negatiivinen portfolio-osuus merkitsee vastaavasti sijoitusta tähän sijoituskohteeseen. Tähän mennessä tuottojen odotusarvoja ei vielä ole tarvittu. Nyt ohjelma kysyy, lasketaanko myös tehokkaiden portfolioiden ura. Käyttäjä, joka haluaa laskea muita tehokkaita portfolioita kuin minimivarianssiportfolion, tai haluaa ohjelman laskevan portfolioiden odotettuja tuottoja, vastaa kysymykseen KYLLÄ.

Käsillä olevassa esimerkkitapauksessa minimivarianssiportfolio on kaikkien sijoituskohteiden osalta samanmerkkinen. Varat olisi riskin minimoimiseksi jaettava suurimmaksi osaksi US-dollarin ja jenin kesken. Punnan osuus olisi jätettävä pieneksi ja Sveitsin frangin saama portfolio-osuus on merkityksettömän pieni:

```
RISKIN MINIMOIVAT PORTFOLIO-OSUUDET OVAT

USD              0.383137
GBP              0.156512
CHF              9.22722E-2
JPY              0.368079

TAMAN PORTFOLION VARIANSSI ON     35.3201
SEN TUOTON HAJONTA ON SIIS        5.94307

LASKETAANKO TEHOKKAIDEN PORTFOLIOIDEN URA? (KYLLA TAI EI)
 ?KYLLA ←
```

4 Vaihe: Odotettujen tuottojen syöttö ja tehokkaiden portfolioiden uran laskeminen

Mikäli käyttäjä vastaa edelliseen kysymykseen EI, antaa ohjelma vielä mahdollisuuden tarkistaa annettu kovarianssimatriisi. Kun tämä on suoritettu, ohjelma päättyy ja käyttäjä siirtyy takaisin BASIC-tasolle, jolta on mahdollisuus irrottautua katkaisemalla yhteys koneeseen komennolla BYE.

Jos käyttäjä vastaa KYLLÄ, kone kysyy eri sijoituskohteiden tuottojen odotusarvoja. Kun ne on annettu, tulostuu minimivarianssiportfolion tuoton odotusarvo. Tehokkaiden portfolioiden uran laskeminen jatkuu tästä siten, että kone kysyy tuottovaatimusta, jonka perusteella se laskee tätä tuottovaatimusta vastaavan sijoituskombinaation, sekä tähän liittyvän riskin. On hyvä muistaa, että jos eri sijoituskohteiden tuottojen odotusarvot vaikka vain vähän poikkeavat toisistaan, on mahdollista päästä mielivaltaisen korkeisiin odotettuihin tuottoihin ottamalla tarpeeksi velkaa matalatuottoisemmissa vaateissa (engl. termi: selling short) ja sijoittamalla korkeatuottoisempiin. Riski kuitenkin kasvaa tuoton kvadraattisena funktiona. Suurilla tuottovaatimuksilla on todennäköistä, että ainakin joku portfolio-osuuksista muodostuu negatiiviseksi.

Kysyessään sijoittajan tuottovaatimusta ohjelma ehdottaa, että tuottovaatimuksen pitäisi olla suurempi kuin minimivarianssiportfolion tuotto. Tämä liittyy siihen, että nettosijoittajan tapauksessa tehokkaiden

portfolioiden uran muodostaa riski-tuotto paraabelin ylempi haara. Jos kuitenkin kysymys on velan jako-ongelmasta, käyttäjän ei pidä välittää ohjelman ehdotuksesta vaan voidaan hyvin esittää "kustannusvaatimuksia", jotka ovat minimivarianssiportfolion odotettua tuottoa (kustannusta) alhaisempiakin.

Käyttäjä voi laskea tehokkaita portfolioita miten paljon tahansa. Haluamassaan vaiheessa ohjelman voi päättää vastaamalla kysymykseen "haluatko jatkaa" EI.

```
ANNA VALUUTTOJEN TUOTTOJEN ODOTUSARVOT!
USD
 ?18.3 ←
GBP
 ?7.1 ←
CHF
 ?17.5 ←
JPY
 ?18.8 ←
MINIMIVARIANSSIPORTFOLION ODOTETTU TUOTTO ON  16.6573

ESITA TUOTTOVAATIMUS (SUUREMPI KUIN  16.6573 )
 ?17 ←

TUOTTOVAATIMUSTASI VASTAA PORTFOLIO
USD              0.404234
GBP              0.128296
CHF              7.44793E-2
JPY              0.392991

SEN HAJONTA ON                  5.9966  JA ODOTETTU TUOTTO  17.

HALUATKO JATKAA? (KYLLA TAI EI)
 ?KYLLA ←
ESITA TUOTTOVAATIMUS (SUUREMPI KUIN  16.6573 )
 ?18 ←

TUOTTOVAATIMUSTASI VASTAA PORTFOLIO
USD              0.465794
GBP              4.59637E-2
CHF              2.25608E-2
JPY              0.465682

SEN HAJONTA ON                  6.71795  JA ODOTETTU TUOTTO  18.

HALUATKO JATKAA? (KYLLA TAI EI)
 ?KYLLA ←
```

```
ESITA TUOTTOVAATIMUS (SUUREMPI KUIN  16.6573 )
 ?25 ←

TUOTTOVAATIMUSTASI VASTAA PORTFOLIO
USD              0.896713
GBP             -0.530361
CHF             -0.340868
JPY              0.974516

SEN HAJONTA ON                  20.3487  JA ODOTETTU TUOTTO  25.
```

5 Vaihe: Ulos BASIC:ista ja yhteyden katkaiseminen

Vastattuaan koneen kysymykseen "EI", käyttäjä joutuu ulos ohjelmasta BASIC-tasolle, jolloin yhteyden koneeseen voi katkaista komennolla BYE. Jos halutaan laskea lisää portfolioita esimerkiksi jollakin toisella valuuttakombinaatiolla tai toisilla tuottojen odotusarvojen, varianssien tai korrelaatioiden arvioilla, voidaan ohjelma käynnistää BASIC-tasolla ollessa uudelleen komennolla RUN.

```
HALUATKO JATKAA? (KYLLA TAI EI)
 ?
 EI ←

TIME:  1.75 SECS.

READY
BYE ←
Killed Job 35, User LEHMUSSAARI, Account     , TTY 26,
  at 13-Jan-84 09:44:00,  Used 0:00:02 in 0:06:22
```

Havainnollistetaan vielä käsillä olleen ongelman luonnetta seuraavan taulukon avulla, jossa on esitetty portfolion riskipitoisuuden riippuvuus tuottovaatimuksesta ohjelman tulostamien tietojen valossa. Taulukon ylin rivi on minimivarianssiportfolio.

tuotto-vaatimus, %	tuoton hajonta	portfolio-osuudet USD	GBP	CHF	JPY
16.7	5.9	0.38	0.16	0.09	0.37
17.0	6.0	0.40	0.13	0.07	0.39
18.0	6.7	0.47	0.05	0.02	0.46
19.0	8.1	0.53	-0.04	-0.03	0.54
20.0	9.8	0.59	-0.12	-0.08	0.61
25.0	20.3	0.90	-0.53	-0.34	0.97

Erityisesti on huomattava, miten paljon portfolioiden riskiä voidaan pienentää diversifikaation avulla. Minimivarianssiportfolion hajonta on vain murto-osa minkään yksittäisen sijoituskohteen hajonnasta. Tähän on käsillä olevassa tapauksessa syynä se, että korrelaatiomatriisissa on suuria negatiivisia korrelaatioita eri sijoituskohteiden välillä, joten sopivasti sijoituksia jakamalla riski saadaan tehokkaasti vähenemään.

4 LOPPUVAROITUS

Vaikka portfolioanalyysiin liittyvä laskutyö onkin mekaanista, ei portfolioanalyysi itsessään sitä ole. Edellä kuvatussa esimerkissä on implisiittisesti ole-

tettu, että valuuttakursseja generoiva järjestelmä on stabiili. Käytännössä tämä olettamus on kuitenkin useimmiten väärä, eivätkä historiallisesta aineistosta lasketut hajonnat ja korrelaatiot välttämättä ole voimassa tulevaisuudessa. Tämän johdosta analyysin suorittajan on kulloisessakin tapauksessa muodostettava ongelman parametreista enemmän tai vähemmän subjektiivinen kuva.

KIRJALLISUUTTA:

BRANSON, W.H. (1979): Exchange Rate Dynamics and Monetary Policy, kirjassa Inflation and Employment in Open Economies, toim. Assar Lindbeck, North-Holland.

DORNBUSCH, R. (1980): Open Economy Macroeconomics, Basic Books.

KOURI, P.J.K. (1976): The Exchange Rate and the Balance of Payments in the Shortrun and in the Longrun. Scandinavian Journal of Economics no 78.

KOURI, P.J.K. (1977): International Investment and Interest Rate Linkages Under Flexible Exchange Rates, kirjassa the Political Economy of Monetary Reform ed. Aliber R.Z.

KOURI, P.J.K. ja MACEDO, J. (1978): Exchange Rates and the International Adjustment Process, Brookings Papers on Economic Activity, 1.

LEHMUSSAARI, O-P (1983): Epävarmuus ja valuuttavarannon sijoitusongelma, Suomen Pankki, Keskustelualoitteita VP 2/83.

MACEDO, J. (1982): Portfolio Diversifications Across Currencies, kirjassa The International Monetary System under Flexible Exchange Rates, ed. Cooper, R. ja Macedo, J., Ballinger.

MARKOWITZ, H.M. (1959): Portfolio Selection, John Wiley.

SZEGÖ, G.P. (1980): Portfolio Theory with Application to Bank Asset Management, Academic Press.

TOBIN, J. (1965): "The Theory of Portfolio Selection" kirjassa the Theory of Interest Rates ed. Hahn, F.H., Brechling F.P.Z., London.

LIITE: DEC BASIC OHJELMA "SALKKU" PORTFOLIOANALYYSIÄ VARTEN

Seuraavassa esitetään täydellisenä kirjoittajien konstruoima portfolioanalyysiohjelma. Ohjelman esittely selityksineen tapahtuu vaiheittain.

RIVIT 10-420: TEHTÄVÄN PARAMETRIEN LUKU

Sijoitusvaihtoehtojen lukumäärä talletetaan muuttujaan N, ja sijoitusvaihtoehtojen nimet alfanumeerisiksi ketjuiksi M$(I), I=1,...,N.

Ohjelma tiedustelee käyttäjältä tuottojen hajontoja ja korrelaatioita, joiden perusteella lasketaan varianssi-kovarianssimatriisi V.

```
10 REM ....SALKKU.... BY JUHA TARKKA
20 REM TAMA OHJELMA SUORITTAA PORTFOLIOANALYYSIA
30 REM KUN SIJOITUSKOHTEIDEN ODOTETUT TUOTOT,
40 REM JA TUOTTOJEN KOVARIANSSIT TUNNETAAN
50 PRINT "MONTAKO VALUUTTAA (2-10) ?"
60 INPUT N
70 FOR I=1 TO N
80 MAT V=ZER(N,N)
90 MAT E=CON(N)
100 MAT P=ZER(N)
110 MAT W=ZER(N,N)
120 PRINT "ANNA VALUUTAN NO."I" NIMI!"
130 INPUT M$(I)
140 NEXT I
150 IF N>1 THEN 180
160 PRINT "PORTFOLIOSSA VAIN VALUUTTAA "M$(1)
170 GO TO 720
180 PRINT "SYOTAPA ALUKSI VALUUTTATUOTTOJEN KESKIHAJONNAT!"
190 PRINT
200 FOR I=1 TO N
210 PRINT M$(I)
220 INPUT V(I,I)
230 IF V(I,I)>0 THEN 275
240 PRINT "VARIANSSIEN ON OLTAVA POSITIIVISIA LUKUJA, "
250 PRINT "SILLA EN OSAA KASITELLA RISKITTOMIEN VALUUTTOJEN ONGELMAA."
260 PRINT "YRITETAANPAS UUDESTAAN!"
270 GO TO 210
275 V(I,I)=V(I,I)**2
280 NEXT I
290 PRINT "ANNA SEURAAVAKSI VALUUTTATUOTTOJEN KORRELAATIOT!"
300 FOR I=1 TO N
310 FOR J=1 TO N
320 IF J>=I THEN 410
330 PRINT M$(J)" VS. "M$(I)
340 INPUT V(I,J)
350 V(I,J)=V(I,J)*((V(I,I)*V(J,J))**.5)
400 V(J,I)=V(I,J)
410 NEXT J
420 NEXT I
```

RIVIT 430-760: MINIMIVARIANSSIPORTFOLION LASKEMINEN

Käyttäen käsillä olevan artikkelin luvussa 2 esitettyjä matriisikaavoja ohjelma laskee minimivarianssiportfolion kokoonpanon riveillä 430-600.

Seuraavilla riveillä esitettyihin kysymyksiin saadut vastaukset ratkaisevat, jatketaanko ohjelman suoritusta tehokkaita portfolioita laskemalla vai lopetetaanko analyysi tähän.

Jatkoa varten on syytä huomata, että varianssi-kovarianssimatriisin käänteismatriisi on talletettu nimellä W ja minimivarianssiportfolion varianssin käänteisluku nimellä L.

```
430 MAT W=INV(V)
440 MAT H=W*E
450 L=0
460 FOR I=1 TO N
470 L=L+H(I)
480 NEXT I
490 PRINT
500 IF L>0 THEN 540
510 PRINT "KOVARIANSSIMATRIISI ON MAHDOTON"
520 PRINT "ANNA UUDET KOVARIANSSIT!"
530 GO TO 300
540 PRINT
550 PRINT "RISKIN MINIMOIVAT PORTFOLIO-OSUUDET OVAT"
560 PRINT
570 FOR I=1 TO N
580 X=H(I)/L
590 PRINT M$(I), X
600 NEXT I
610 PRINT
620 PRINT "TAMAN PORTFOLION VARIANSSI ON  "1/L
625 PRINT "SEN TUOTON HAJONTA ON SIIS     "((1/L)**.5)
630 PRINT
640 PRINT "LASKETAANKO TEHOKKAIDEN PORTFOLIOIDEN URAT (KYLLA TAI EI)"
650 INPUT Q$
660 IF Q$="KYLLA" THEN 770
670 PRINT "HALUATKO TARKISTAA ANTAMASI KOV. MATRIISINT (KYLLA TAI EI)"
680 INPUT B$
690 IF B$="KYLLA" THEN 710
700 GO TO 720
710 MAT PRINT V
720 PRINT "LASKETKO LISAA PORTFOLIOITAT (KYLLA TAI EI)"
730 INPUT A$
740 IF A$="KYLLA" THEN 50
750 PRINT "NAKEMIIN"
760 GO TO 1290
```

RIVIT 770-860: TUOTTO-ODOTUSTEN LUKU JA MINIMIVARIANSSIPORTFOLION ODOTETUN TUOTON LASKEMINEN

Sijoituskohteiden odotetut tuotot luetaan vektoriin P. Käyttäen edellä laskettua minimivarianssiportfolion koostumusta lasketaan sitten ko. portfolion odotettu tuotto (muuttujaan Y).

```
770 PRINT "ANNA VALUUTTOJEN TUOTTOJEN ODOTUSARVOT!"
780 FOR I=1 TO N
790 PRINT M$(I)
800 INPUT P(I)
810 NEXT I
820 Y=0
830 FOR I=1 TO N
840 Y=Y+P(I)*H(I)/L
850 NEXT I
860 PRINT "MINIMIVARIANSSIPORTFOLION ODOTETTU TUOTTO ON "Y
```

RIVIT 870-1290: TEHOKKAIDEN PORTFOLIOIDEN URAN LASKEMINEN

Tehokkaiden portfolioiden ura lasketaan käyttäen hyväksi esim. Szegön (1980, s. 25) esittämää tulosta, jonka mukaan minkä tahansa tehokkaan portfolion portfolio-osuuksien poikkeama minimivarianssi-portfolion portfolio-osuuksista on tuottovaatimuksen lineaarinen funktio:

$$x - \hat{x} = c\,(\pi - \hat{\pi})(\Omega^{-1}r - \hat{\pi}\Omega^{-1}e)/(ac-b^2),$$

jossa $\hat{x}$ ja $\hat{\pi}$ ovat minimivarianssiportfolion portfolio-osuusvektori ja sen tuoton odotusarvo. Ohjelma sijoittaa minimivarianssiportfolion osuusvektorin vektoriksi H2. Lausekkeen nimittäjä lasketaan minimi-varianssiportfolion tuoton ja varianssin avulla, käyttäen seuraavia lausekkeita:

$$\hat{\pi} = b\hat{\sigma}^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = 1/c.$$

Tehokkaiden portfolioiden uran laskun aluksi ohjelma laskee vakion a arvon (ohjelmassamuuttuja B5). Sen jälkeen suoritetaan riveillä 1000-1100 itse portfolio-optimointi. Lopuksi lasketaan vielä tehokkaan portfolion tuoton odotusarvo ja hajonta.

```
870 B5=0
880 PRINT
890 MAT B=ZER(N)
900 MAT B=W*P
910 FOR I=1 TO N
920 B5=B5+P(I)*B(I)
930 NEXT I
940 PRINT
950 S=Y
960 FOR I=1 TO N
970 IF P(I)<S THEN 990
980 S=P(I)
990 NEXT I
1000 PRINT "ESITA TUOTTOVAATIMUS (SUUREMPI KUIN 'Y')"
1010 INPUT Y1
1020 MAT H3=ZER(N)
1030 MAT H3=(Y)*H
1040 MAT H3=B-H3
1050 MAT H3=(L*(Y1-Y)/(B5*L-(L*Y)**2))*H3
1060 MAT H2=ZER(N)
1070 MAT H2=(1/L)*H
1080 MAT H3=H3+H2
1090 PRINT
1100 PRINT "TUOTTOVAATIMUSTASI VASTAA PORTFOLIO"
1110 FOR I=1 TO N
1120 PRINT M$(I), H3(I)
1130 NEXT I
1140 PRINT
1150 MAT H2=V*H3
1160 V2=0
1170 Y3=0
1180 FOR J=1 TO N
1190 V2=V2+H2(J)*H3(J)
1200 NEXT J
1210 FOR J=1 TO N
1220 Y3=Y3+H3(J)*P(J)
1230 NEXT J
1240 PRINT "SEN HAJONTA ON ",(V2)**.5" JA ODOTETTU TUOTTO "Y3
1250 PRINT
1260 PRINT "HALUATKO JATKAA? (KYLLA TAI EI)"
1270 INPUT A$
1280 IF A$="EI" THEN 1290
1285 GO TO 1000
1290 END
```