SUOMEN PANKIN KESKUSTELUALOITTEITA **3/91**

Mikko Niskanen

Suomen Pankin markkinaoperaatioiden osasto
23.01.1991

VELKAKIRJOJEN HINNOITTELU ARBITRAASIMALLISSA

ISBN 951-686-276-4
ISSN 0785-3572

Suomen Pankin monistuskeskus
Helsinki 1991

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksessa tarkastellaan velkakirjan hinnan määräytymistä modernista portfolioteoriasta peräisin olevassa arbitraasikehikossa. Erityisesti käsitellään Coxin, Ingersollin ja Rossin (CIR) intertemporaalista hinnoittelumallia ja sen korkorakennesovellusta. Malli tarjoaa yksilön preferensseistä johdetut mikroteoreettiset perusteet arbitraasimahdollisuudet eliminoivalle hinnoittelusäännölle.

Vaikka CIR-malli onkin mahdollistanut velkakirjojen ja muiden arvopaperien hintaan vaikuttavien tekijöiden syvällisen tarkastelun, soveltavassa työssä siihen liittyy monia ongelmia. Yhtäältä mallin ratkaiseminen korkoja ohjaavien muuttujien lisääntyessä voi olla mahdotonta, toisaalta empiiristen tulosten tuottaminen voi menetelmällisesti olla hankalaa. Siten CIR-mallin menestys ei empiirisissä tutkimuksissa tai rahoitusmarkkinoiden sovelluksissa ole ollut mallin teoreettisten innovaatioiden veroista.

Sisältö

1 JOHDANTO

Jos rahoitusteoriasta pitäisi etsiä yksi tyypillinen ominaispiirre, ehto arbitraasin[1] eliminoitumisesta on varmasti ensimmäisiä mieleen tulevia. Ehto on niin keskeinen, että ilman sitä ei esimerkiksi arvopaperien hinnoittelun voisi kuvitella olevan mahdollista. Jos arbitraasiin olisi tilaisuus, pyrkisi rationaalinen sijoittaja ottamaan siitä kaiken irti ja hankkimaan itselleen rajattoman omaisuuden.

Arbitraasin eliminoitumisehto on implisiittisesti kuulunut rahoitusteoriaan sen alusta lähtien. Modigliani ja Miller (1958), joiden esityksen myötä rahoitusteoria eriytyi taloustieteestä omaksi alahaarakseen, sovelsivat arbitraasiargumentteja staattisessa kehikossa osoittaessaan, että velkaisuuden aste ei vaikuta yrityksen arvoon.

Stephen Rossin (1976 ja 1977) arbitraasihinnoitteluteorian[2] myötä arbitraasin eliminoitumisehto tuli arvopaperien hinnoitteluteorioiden kulmakiveksi kuvaamaan markkinoiden tehokkuutta. Sitä ennen rahoitusteoreettisessa kirjallisuudessa markkinoita oli pidetty tehokkaasti toimivina, mikäli arvopaperien hintojen määräytymiseen vaikuttava informaatio heijastuu välittömästi itse hintoihin. Alkuperäiseen tehokkuusehtoon liittyi kuitenkin monia ongelmia. Teoreettisessa mielessä ehtoa ei koskaan pystytty formalisoimaan riittävän tarkasti, jotta se olisi empiirisesti yksiselitteinen. Kun markkinoiden informatiivista tehokkuutta testattiin, sitä testattiin suhteessa hinnoittelumalliin. Hinnoittelumallin

---

1 Arbitraasimahdollisuus on sijoitusstrategia, jonka avulla on mahdollista tehdä riskitöntä voittoa ilman alkupääomaa. 'Tyhjästä on paha nyhjästä' on sananlasku, joka kuvaa osuvasti arbitraasin eliminoitumisehtoa.

2 Engl. arbitrage pricing theory (APT).

(CAPM:n[3]) perusoletuksena taas oli tehokas markkinaindeksi, joten ristiriitaa oli vaikea välttää[4].

Arbitraasihinnoitteluteoriassa sovelletaan arbitraasin eliminoitumisesta seuraavaa ehtoa, jonka mukaan äärellisessä tila-avaruudessa kaikki arvopaperit voidaan (ainakin approksimatiivisesti) hinnoitella ns. primitiivisten vaateiden lineaarisena kombinaationa[5]. Ross (1976) sovelsi lineaarisuusehtoa staattiseen hinnoittelumalliinsa, jossa hän oletti arvopaperien tuottojen määräytyvän seuraavan yhtälön mukaisesti:

$$R_i = E(R_i) + D_{i1} f_1 + D_{i2} f_2 + \ldots + D_{ik} f_k + \epsilon_i, \qquad (1.1)$$

missä

R_i = arvopaperin toteutunut, *ex post* tuotto,
$E(R_i)$ = odotettu, *ex ante* tuotto,
f_j = stokastisen muuttujan aiheuttama shokki (positiivinen tai negatiivinen, $E(f_j) = 0$, $j = 1,..,k$),
D_{ij} = arvopaperin herkkyys stokastiselle shokille,
ϵ_i = muuttujista riippumaton virhetermi.

Arvopaperin tuottoon vaikuttaa siis äärellinen määrä (k kpl) riskin lähteitä, joiden vuoksi tuotto voi olla odotettua suurempi tai pienempi. Riskin lähteet voivat olla millaisia stokastisia prosesseja tahansa (esim. säätilan muutoksia, osakkeiden hintakehitys tai korkokehitys). Ross ei analyysissaan määritellyt eksplisiittisesti riskin lähteitä.

Arbitraasihinnoitteluteoriassa oletetaan sijoittajien olevan riskiaversiivisia. Koska he täydellisen ja symmetri-

---

3 Capital asset pricing model.

4 Kyseinen Rollin kritiikkinä (Roll, 1977) tunnettu ongelma on tuttu monista rahoitusteorian oppikirjoista (ks. esim. Copeland ja Weston, 1988).

5 Arbitraasiehdon implikaatioista, ks. Dybvig ja Ross (1988).

sen informaation vuoksi tuntevat mahdolliset riskin lähteet, he vaativat kompensaation kantamilleen riskeille. Ongelmana on, miten markkinat hinnoittelevat epävarmuutta aiheuttavien stokastisten prosessien riskitermit. Ross löysi vastauksen edellä mainitusta lineaarisesta hinnoittelusäännöstä. Arbitraasin eliminoituminen edellyttää, että markkinat löytävät yhden hinnan, ns. riskin markkinahinnan kullekin epävarmuuden lähteelle. Kun riskin markkinahinta on määritelty, voidaan vaadittava lisätuotto laskea painottamalla kutakin riskin markkinahintaa samalla herkkyydellä, jolla kyseinen riski vaikuttaa toteutuvaan tuottoon. Siten voidaan kirjoittaa

$$E(R_i) = r_f + D_{i1}\phi_1 + D_{i2}\phi_2 + .. + D_{ik}\phi_k + \epsilon_i, \qquad (1.2)$$

missä

r_f = riskitön korko,
ϕ_j = yhtälön (1.1) stokastisen muuttujan f_j riskin markkinahinta ($j = 1,..,k$).

Arvopaperin odotetuksi tuotoksi syntyy siis riskittömän koron ja riskipreemioiden lineaarikombinaatio. Mikäli sijoittajat ovat riskineutraaleja, he suhtautuisivat epävarmuuteen kuin *fair game*en eivätkä vaatisi lisäpreemioita. Moderneissa hinnoitteluteorioissa, kuten APT:ssa, sijoittajien oletetaan kuitenkin olevan riskiaversiivisia.

Myös velkakirjojen hinnoitteluteoriat perustuvat arbitraasihinnoittelun pohjalle rakennetuille malleille. Vaikka APT kulkeekin hinnoitteluteorian nimellä, sen pohjalta on tähän mennessä esitetyillä tiedoilla vaikea määritellä hintaa esimerkiksi velkakirjalle. Vaikka sijoittajien heterogeenisuudesta, irrationaalisuudesta tai asymmetrisesta informaatiosta syntyvät vaikutukset jätettäisiinkin analyysin ulkopuolelle, tarvitaan vielä paljon lisätietoa velkakirjan hinnan määrittelemiseksi.

Ensimmäiseksi tarvitsemme tietoa hintaan vaikuttavista riskitekijöistä eli APT:n stokastisista muuttujista. Luonnollisesti velkakirjan hintaan vaikuttaa jäljellä oleva elinikä, mutta koska ajan kulkuun ei liity mitään satunnaisuutta, se voidaan jättää riskitekijöiden ulkopuolelle. Riskitekijöiksi valitaan ainoastaan muuttujia, joihin liittyy satunnaismuutosten ominaisuus.

Jos myös luotto- ja likvidiysriskien vaikutukset jätetään analyysin ulkopuolelle, korkorakenteen stokastiset muutokset ovat merkittävin velkakirjan hintaan vaikuttava epävarmuuden lähde[6]. Muutokset voivat olla joko koko korkorakenteen käsittäviä tai vain osittaisia, kattaen esimerkiksi pelkästään lyhyet maturiteetit. Historian aikana korkorakenteella on todettu olleen sekä nousevia, laskevia että kuperaisia muotoja.

Mieleen tulee helposti kysymys, miksi juuri korkorakenteessa tapahtuvat muutokset aiheuttavat epävarmuutta eikä pelkästään yksittäinen korko, kuten yhden päivän rahamarkkinakorko. Vastaus on yksinkertainen. Eripituisten korkojen olemassaolo tekee spekulaation mahdolliseksi. Päästäkseen tavoitteeseensa sijoittaja voi valita useita erilaisia strategioita, kuten sijoittamisen pitkäikäiseen velkakirjaan tai operoimisen pelkästään lyhyen rahan markkinoilla. Eri strategioiden tuotto määräytyy sen mukaan, miten erilaiset riskitekijät, kuten inflaatio, vaikuttavat eripituisiin korkoihin. Epävarmuus tai riski syntyy siitä, että aina on olemassa parempia ja huonompia strategioita. Mikäli markkinat toimivat arbitraasihinnoitteluteorian mukaisesti, jatkuvasti muita parempaa strategiaa ei kuitenkaan ole olemassa.

Korkorakennetutkimuksella on pitkä historia taloustieteessä[7]. Erilaisten hypoteesien avulla on pyritty selittämään, miten korkorakenne määräytyy ja millaisia rajoituksia sen muodolla on. Teoriavaihtoehtojen suuri enemmistö nojaa

---

6 Korkorakenne, kuten muutkin käsitteet, määritellään kappaleessa 1.2 .

7 Ks. katsausartikkelit Melino (1988) ja Shiller ja McCulloch (1987) sekä Murto (1989) ja Virén (1988).

odotushypoteesiin[8], jonka mukaan nykyisen korkorakenteen implisiittisesti määräämät termiinikorot yhdessä mahdollisten riskipreemioiden kanssa kuvaavat korko-odotuksia. Mikäli odotukset ovat rationaalisia, kuten tehokkailla markkinoilla uskotaan olevan, korkorakenteella on myös ennustevoimaa tulevasta korkokehityksestä.

Korkorakenteen määräytymistä selittämään tehdyt hypoteesit ovat kuitenkin useimmiten laadittu empiiristä testausta silmälläpitäen. Koska taloustieteessä on vasta muutamien viime vuosikymmenten aikana löydetty menetelmät dynaamisten, epävarmuuden huomioonottavien mallien rakentamiseen, korkorakennetutkimuksen teoreettiset puutteet ovat varsin ymmärrettäviä. Rahoitusteoriassa kehitettyjen hinnoittelumallien yhtenä ansiona onkin, että ne tarjoavat kehikon korkorakenteen määräytymisen analyyttiselle tarkastelulle.

1.1 Tavoitteet, rajaukset ja esityksen kulku

Tutkielmassani tarkastelen arbitraasihinnoitteluteorian pohjalta modernin portfolioteorian menetelmillä rakennettuja velkakirjojen hinnoittelumalleja. Velkakirjan hinnoittelumallin tavoite ei sinänsä ole hinnoitella kaikkein likvideimpiä velkakirjoja[9], vaan käyttää niitä lähtökohtana muun dynamiikan ymmärtämiseen. Jotta arbitraasiehto käytännössä toteutuisi, meidän on uskottava, että markkinoiden likvideimmät velkakirjat ovat tehokkaasti hinnoiteltuja. Käyttäessämme hintanoteerauksia lähtötietoina saamme hinnoittelumallin avulla käsityksen velkakirjan hintaa ohjaavasta prosessista sekä siitä, miten eri riskin lähteet vaikuttavat velkakirjan tuottoon.

Kun pystymme hahmottamaan velkakirjamarkkinoiden toimintaa mikroteoreettisen mallin avulla, moni perinteisesti toisel-

---

8 Perinteisistä korkorakennehypoteeseista tarkemmin kappaleessa 1.3 .

9 Likvidiksi kutsutaan sellaista velkakirjaa, jolla on syvät jälkimarkkinat. Toisin sanoen sillä käydään runsaasti kauppaa ja sille löytyy aina tarvittaessa ostaja.

la tavalla nähty asia on nähtävissä uudessa valossa. Velkakirjojen liikkeellelaskijalle hinnoittelumalli tarjoaa mahdollisuuden uusien ja epälikvidien emissioiden hinnoitteluun. Sijoittajan näkökulmasta avuja on muitakin. Hinnoittelumallin avulla vältytään monilta perinteiseen riskinhallintaan ja duraatioanalyysiin liittyvältä ongelmalta. Malli tarjoaa myös pohjan viime aikoina räjähdysmäisesti lisääntyneiden johdannaisinstrumenttien hinnoitteluun sekä riskinhallintaan.

Johdannaisinstrumentteja käytetään kaupankäyntiin epävarmuuden kustannuksella. Niiden avulla voidaan sekä spekuloida tulevilla tapahtumilla että suojautua niitä vastaan. Aikaan ja epävarmuuteen liittyvän luonteensa vuoksi johdannaisinstrumenttien hinnoittelu perustuu erityisesti kohde-etuuden hinnan dynamiikalle. Niin myös korkorakennesidonnaisten instrumenttien, kuten velkakirjoille kirjoitettujen futuurien ja optioiden sekä vaihtovelkakirjojen tapauksessa.

Huolimatta siitä, että velkakirjojen hinnoittelumallien merkitys on hyvin suuri johdannaisinstrumenttien hinnoittelussa, rajaan johdannaisinstrumentit tutkielmani ulkopuolelle. Perustelen rajaustani sillä, että yksistään velkakirjojen hintojen tarkastelu riittää koko esityksen johtolangaksi. Johdannaisinstrumentit kuuluvat erilliseen laajaan ongelmakenttään, jotka vaativat oman analyysinsa, mutta toisessa yhteydessä.

Keskityn työssäni käsittelemään pelkästään korkorakenteen määräytymistä ja sen vaikutusta velkakirjojen hinnoitteluun. Muita asioita, jotka vaativat erillisen tarkastelun, ovat mm. talouspoliittisten toimenpiteiden (verot, rahapolitiikka) vaikutukset korkorakenteeseen sekä yksityisten liikkeellelaskemiin velkakirjoihin liittyvät luottoriskit.

Aloitan velkakirjojen hinnoittelun tarkastelemisen luvussa 2 Blackin ja Scholesin (1973) optioiden hinnoittelumallin esittelyllä. Black ja Scholes olivat ensimmäisiä, jotka liittivät arbitraasin eliminoitumisehdon dynaamiseen kehikkoon. Heidän mallissaan optioiden hinnoittelu perustui ehtoon, että ei ole olemassa arbitraasin mahdollistavaa sijoitusstrategiaa.

Korostan, että tarkastelen Blackin ja Scholesin mallia ainoastaan, koska kaikki sen jälkeen esitettävät velkakirjojen hinnoittelumallit perustuvat samanlaiselle intuitiolle. Formaalia esitystapaa perustelen sillä, että haluan osoittaa velkakirjojen hinnoittelumallien lähtökohtana olleen saman Iton differentiaalilaskentaan perustuvan menetelmän, jota Black ja Scholes olivat käyttäneet aikaisemmin. Optioiden hinnoittelun kannalta malli ei ole kiinnostuksen kohteena.

Blackin ja Scholesin malli johdettiin hinnoittelemaan osakeoptioita. Koska mallissa sijoittaja voi halutessaan suojautua kaikelta epävarmuudelta, sijoitusstrategian on silloin annettava ainoastaan riskittömän koron suuruinen tuotto. Siten malli on intuitioltaan Rossin (1976) arbitraasihinnoittelun kanssa hyvin samanlainen. Kun osakkeesta riippuvaisen option sijasta ajatellaan velkakirjaa, joka on koroista riippuvainen instrumentti ja sovelletaan Blackin ja Scholesin ajattelua, ollaan lähellä velkakirjojen hinnoittelumalleja. Velkakirjojen hinnoittelu perustuu alunperin Coxin ja Rossin (1976) esittämälle *ikään kuin* riskineutraalille hinnoittelulle, missä epävarmuutta aiheuttavan stokastisen prosessin odotusarvoa sopeutetaan siten, että preferenssejä ei tarvitse liittää analyysiin. Sopeutus tehdään vähentämällä odotusarvosta riskipreemio, joka taas on prosessin varianssin funktio[10].

Luvussa 3 tarkastelen velkakirjojen hinnoittelua tasapainoanalyysin lähtökohdista. Analyysissa sovelletaan intertemporaalista hyödyn maksimointia ja johdetaan korot mää-

---

[10] Harrison ja Kreps (1979) ovat esitelleet *ikään kuin* riskineutraalin hinnoittelumenetelmän formaalissa muodossa, mutta aiheen keskeisyydestä huolimatta olen rajannut sen kahdesta syystä tutkielman ulkopuolelle: 1) esityksessä pitäisi käyttää erittäin vaativia matemaattisia menetelmiä ja 2) velkakirjojen hinnoittelun kannalta asia ei sittenkään ole riittävän tärkeä.

räävä yhtälö sekä kysyntä- että tarjontapuolelta. Tarkoitukseni on osoittaa, että tasapainoanalyysi voi olla konsistentti arbitraasimallin kanssa. Tutkielman yhtenä päätavoitteena on esitellä Coxin, Ingersollin ja Rossin (CIR) (1985a) hinnoittelumalli, jossa arbitraasi- ja tasapainolähestymistavat yhdistetään. Samalla määritellään arbitraasimalleissa esitellyille riskipreemioille eksplisiittinen sisältö.

Kun luvuissa 2 ja 3 on esitelty teoreettinen kehikko yleisessä muodossa, seuraavissa luvuissa keskitytään käytännöllisempiin sovelluksiin. Luvussa 4 jatketaan CIR:n yleisen mallin pohjalta johdetun yhden muuttujan velkakirjojen hinnoittelumallin (Cox, Ingersoll ja Ross, 1985b) esittelyllä. Mallin tekee merkitykselliseksi se, että se on empiirisesti testattavissa. Vaikka tulokset eivät ole olleetkaan CIR:n esittämän erikoistapauksen kannalta myönteisiä, mallin ansiona voidaan pitää sen käynnistämää ja 1980-luvun loppupuolella kasvanutta uutta tutkimussuuntausta rahoitusteoriassa.

Luvussa 5 tarkastellaan hinnoittelumallin implikaatioita velkakirjojen riskinhallintaan. Kappaleessa 5.2 pyritään vastaamaan Faman (1988) esittämään kysymykseen, tarjoaako CIR-malli teoreettisen kehikon viimeaikaisissa empiirisissä tutkimuksissa havaituille taloudellisten suhdanteiden mukana vaihteleville riskipreemioille. Kappaleessa todetaan, että pystyäkseen selittämään vaihteluita hyötyfunktion parametrisessa muodossa on luovuttava kiinteästä suhteellisesta riskiaversiivisuudesta.

Tutkielmassani totean, että arbitraasimalli mikroperusteista johdetussa muodossaan tarjoaa hyvän teoreettisen perustan arvopaperien hinnoittelulle. Koska Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a) analyysi perustuu edustavan sijoittajan ja yhden hyödykkeen mallille, sitä ei kuitenkaan voi käyttää heterogeenisuudesta aiheutuvien ominaisuuksien, irrationaalisten ilmiöiden, asymmetrisen informaation tai suhteellisen hintaepävarmuuden tarkasteluun.

Sitä vastoin käytännön sovellusten kannalta arbitraasimalli ei ole menestynyt yhtä hyvin[11]. Empiiristen testien avulla on voitu osoittaa tarvittavan useampia kuin yksi muuttuja selittämään korkorakenteen liikkeitä. Riskinhallinnassa käytettäväksi malli on teknisesti liian raskas ja vaatii paljon informaatiota antaakseen tarkkoja tuloksia.

1.2 Käsitteitä

Monien maiden rahoitusmarkkinoilla velkakirjojen julkiset noteeraukset tehdään hinnan sijasta sisäisenä korkokantana[12]. Sisäinen korkokanta kuvaa keskimääräistä annualisoitua tuottoa, joten eri pituiset velkakirjat ovat hintanoteerausta paremmin keskenään vertailtavissa. Velkakirjan hinta voidaan laskea sisäisestä korosta markkinoilla sovittujen laskusääntöjen avulla[13].

Sisäinen korkokanta on kuitenkin pelkästään keskimääräinen arvo. Kuponkeja sisältävän velkakirjan tapauksessa kaikki maksuvirrat, ajankohdasta riippumatta, diskontataan sisäisellä korolla. Esimerkiksi kymmenenvuotiaan kuponkivelkakirjan vuotuiset kuponkivirrat diskontataan samalla korolla. Ristiriita syntyy, jos yksivuotiaan nollakuponkilainan ainoata maksuvirtaa diskontattaessa käytetään eri korkoa kuin kuponkivelkakirjan vuoden päästä irtoavan kupongin diskonttauksessa.

Korkorakenne kuvaa eripituisten nollakuponkilainojen diskonttauksessa käytettäviä sisäisiä korkoja. Nollakuponkilainojen tapauksessa kuponkivaikutukset eivät tee diskonttokorosta harhaista. Velkakirjan hinta voidaan määritellä mahdollisimman tarkasti diskonttaamalla kaikki maksuvirrat

---

[11] Suuressa osassa empiirisiä töitä ollaan keskitytty CIR:n (1985b) yhden muuttujan mallin testaamiseen. Siten CIR on saanut kantaa suuren osan siitäkin kritiikistä, mikä koskettaisi arbitraasimalleja yleensä.

[12] Engl. yield to maturity (YTM).

[13] Sisäisestä korkokannasta ja muista korkokäsitteistä tarkemmin, ks. Ilmanen (1989, s. 12-16).

maturiteettinsa mukaisella korolla ja summaamalla ne yhteen.

Kuponkivelkakirjoja voidaan tarkastella eripituisten nollakuponkilainojen lineaarikombinaatioina. Koska pääosa markkinoilla käytettävistä velkakirjoista, erityisesti yli vuoden mittaiset, ovat kuponkivelkakirjoja, liittyy korkorakenteen estimointiin lukuisia empiirisiä ongelmia[14]. Se on kuitenkin erillinen kysymys, johon ei puututa tämän esityksen yhteydessä.

Jatkossa tarkastelu tehdään jatkuva-aikaisessa kehikossa. Velkakirjan[15] hinnan ja sisäisen korkokannan välillä on koronlaskentakaavalle perustuva matemaattinen yhteys:

$$P(t,T) \equiv \exp[-R(t,T)(T - t)], \tag{1.3}$$

missä

$P(t,T)$ = hetkenä T erääntyvän velkakirjan hinta hetkellä t,

$R(t,T)$ = sisäinen korkokanta (T - t) -pituiselle velkakirjalle.

Lyhyintä mahdollista korkoa, $r(t)$, kutsutaan välittömäksi nykykorkoksi. Diskreetissä mallissa lyhyin korko olisi yhden periodin mittainen. Periodien pituuden lähestyessä jatkuva-aikaisessa maailmassa nollaa, lyhyimmän koron maturiteetistakin tulee äärimmäisen pieni.

Nykykorkojen lisäksi määritellään termiinikoron käsite. Termiinikorot ovat nykyiseen korkorakenteeseen implisiittisesti sisältyviä tulevia korkoja. Hetken t korkorakenteesta määräytyvä välitön termiinikorko, $f(t,T)$, hetkelle T määritellään seuraavasti:

---

[14] Ks. esim. Kärjen ja Aubryn (1990) katsaus estimointiin liittyvistä ongelmista.

[15] Käytän jatkossa termin 'nollakuponkilaina' sijaan termiä 'velkakirja' yksinkertaisuuden vuoksi. Mikäli kysymyksessä on kuponkivelkakirja, mainitsen siitä erikseen.

$$f(t,T) \equiv \frac{-\partial P(t,T)}{\partial T} \cdot \frac{1}{P(t,T)}. \qquad (1.4)$$

Eri pituisia nykykorkoja voidaan pitää eri pituisten termiinikorkojen erikoistapauksena. Siten voidaan määritellä eri käsitteiden välinen yhteys:

$$f(t,t) \equiv r(t) = \lim_{t \to T} R(t,T). \qquad (1.5)$$

Soveltamalla yhtälöä (1.5) hinnan määrittelyyn (1.3) voidaan se esittää toisessa muodossa

$$P(t,T) = \exp[-\int_t^T r(s)ds]. \qquad (1.6)$$

1.3 Perinteiset korkorakennehypoteesit

Perinteinen harhattomien odotusten hypoteesi (esim. Fisher (1930) ja Lutz (1940)) perustui ajatukselle nykyisten termiinikorkojen ja odotettujen nykykorkojen yhtäsuuruudesta:

$$E_t[r(T)] = f(t,T). \qquad (1.7)$$

Hypoteesin mukaan termiinikorot sisältävät siten kaiken mahdollisen informaation sijoittajien odotuksista. Mikäli odotukset olisivat rationaalisia, termiinikorkojen avulla voitaisiin tehdä tarkkoja ennusteita tulevasta korkokehityksestä. Kuitenkin jo varhaisessa empiirisessä kirjallisuudessa[16] todettiin, että termiinikorkojen ennustamiskyky on hyvin vaillinainen. Korkorakenteesta implisiittisesti määräytyvien termiinikorkojen havaittiin systemaattisesti olevan tulevia nykykorkoja suurempia. Termiinikorkojen ja odotettujen nykykorkojen välinen erotus määriteltiin riskipreemioksi, jonka suuruuden havaittiin korreloivan positiivisesti korkotason kanssa.

Cox, Ingersoll ja Ross (1981) ovat löytäneet empiirisestä korkorakennekirjallisuudesta kaksi muutakin odotushypo-

---

16 Mm. Kessel (1965).

teesin muotoa. Molemmat liittyvät lyhyiden korkojen ja eripituisten velkakirjojen odotettujen tuottojen tarkasteluun. Hypoteesien mukaan velkakirjan odotettu tuotto koostuu riskittömästä korosta sekä mahdollisesta riskipreemiosta. Jatkuva-aikaisissa malleissa voidaan kaikkein riskittömimpänä pitää välitöntä nykykorkoa, joten hypoteesi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha(r,t,T) = r(t) + \text{preemio}, \tag{1.8}$$

missä

$\alpha(r,t,T)$ = $(T - t)$ -mittaisen velkakirjan odotettu tuotto.

Odotushypoteesin eri alalajit, kuten Hicksin (1939) likvidiyspreemioteoria tai Modiglianin ja Sutchin (1966) preferred habitat -teoria, ovat antaneet yhtälön (1.8) preemiolle erilaisia funktionaalisia muotoja. Hicksin mukaan sijoittajilla on luontainen halu pysyä mahdollisimman likvideinä, jonka vuoksi he haluavat ylimääräisen preemion pitkäaikaisiin velkakirjoihin tehdyistä sijoituksista. Modiglianin ja Sutchin mielestä sijoituksilla pyritään turvaamaan tulevaa kulutusta. Mikäli sijoittaja esimerkiksi haluaa rahoittaa seitsemän vuoden kuluttua lapsensa koulunkäynnin nykyisistä varoistaan, turvallisinta on sijoittaa seitsemän vuoden mittaiseen velkakirjaan. Silloin tiedetään varmasti saatavan nimellispääoman suuruinen rahavirta oikeaan aikaan, eikä altistuta hinta- tai jälleensijoitusriskeille[17]. Jotta sijoittaja saataisiin houkuteltua muihin maturiteetteihin, hänelle on maksettava otetun riskin kompensoiva lisäpreemio.

---

[17] Hinta- ja jälleensijoitusriskin käsitteet liittyvät sijoitushorisonttiin. Jos velkakirja erääntyy sijoitushorisontin takarajan jälkeen, on sijoittajan myytävä se jälkimarkkinoilla. Koska sen arvosta myyntihetkellä ei ole varmaa tietoa, altistuu hän hintariskille. Vastaavasti, jos velkakirja erääntyy ennen sijoittajan tarvetta käyttää varansa, on tehtävä uusi sijoitus ja altistutaan jälleensijoitusriskille.

Likvidiyspreemio- tai preferred habitat -teorioiden preemioiden funktionaalisen muodon testaaminen ei siten ole ollut korkorakenteen empiirisissä testeissä keskeisellä sijalla. Viimeisen vuosikymmenen aikana ei tosin ole löydetty tukea hypoteesille ajan suhteen kiinteästä riskipreemiosta[18]. Shiller (1979) osoitti, että odotushypoteesi ei pysty selittämään kuin murto-osan pitkien korkojen varianssista. Suurin osa pitkien korkojen vaihtelusta on tulkittu seuraukseksi rationaalisten sijoittajien vaatimien riskipreemioiden vaihteluista. Vaihtelu ei kuitenkaan välttämättä aiheuta ristiriitaa rationaalisten odotusten hypoteesin kanssa, sillä muutoksilla sijoittajien preferensseissä sekä joillakin uutisilla voi olla suoria vaikutuksia pitkiin korkoihin.

Muutokset sijoittajien preferensseissä voivat olla seurausta muutoksista tulevaan kulutukseen kohdistuvissa odotuksissa. Esimerkiksi Fama ja French (1989) sekä Ferson ja Harvey (1989) ovat havainneet, että taloudellisilla suhdanteilla ja riskipreemioilla on keskinäinen yhteys. Lamakauden alla sijoittajat vaativat kantamastaan epävarmuudesta suuremman kompensaation kuin voimakkaan kasvun aikana. Siten kasvuodotuksiin vaikuttavilla uutisilla sekä poliittisilla toimenpiteillä voi olla riskipreemioiden muutosten välityksellä suoria vaikutuksia pitkien korkojen vaihteluun.

Korkorakennekirjallisuudessa on vähemmälle huomiolle jääneet velkakirjojen kysyntä- ja tarjontavaikutuksia korostavat hypoteesit. Kuitenkin jo Hicksin (1939) likvidiyspreemioiden voi katsoa olevan kyseisten vaikutusten seurausta. Sijoittajat pyrkivät olemaan mahdollisimman likvidejä, mutta velanottajilla on halu pitempiaikaiseen lainaukseen. Siten tarvitaan spekulaattoreita, jotka lisäpreemiota vastaan tasaavat lainamarkkinoiden kysynnän ja tarjonnan.

---

[18] Ajan suhteen kiinteän riskipreemion oletusta on kutsuttu myös rationaalisten odotusten sekä tehokkaiden markkinoiden hypoteeseiksi (Melino, 1988).

Culbertsonin (1957) markkinoiden segmentoitumista korostavassa teoriassa arbitraasi eri maturiteettien välillä on mm. transaktiokustannusten ja institutionaalisten esteiden vuoksi rajoitettua. Siten kussakin maturiteetissa rahoitusvirrat ja arvopapereiden tarjonta vaikuttavat olennaisesti tuottojen määräytymiseen. Vastaavasti preferred habitatmallissa oletettiin sijoittajien olevan heterogeenisiä, joten yksilökohtaiset preferenssit määrittelevät aggregaattitasolla muodostuvat preemiot.

Edellä lueteltuja kysyntä- ja tarjontatekijöihin perustuvia malleja on pyritty myöhemmin kehittämään rahoitusvirtamallien antamissa puitteissa. Friedmanin (1977) ja Roleyn (1981) malleissa on edelleen korostettu sijoittajien heterogeenisiä tarpeita ja transaktiokustannuksia. Melinon (1988) mukaan rahoitusvirtamallien kritiikissä ollaan erityisesti epäilty mallien olevan liian monimutkaisia empiiriseen työhön.

1.4 Intertemporaaliset mallit

Korkorakenteen määräytymiseen vaikuttavia intertemporaalisia tekijöitä on korostettu Stiglitzin (1970) työstä lähtien. Hänen mukaansa sijoittajat pitävät hallussaan arvopapereita tasoittaakseen ja lisätäkseen tulevaa kulutustaan. Näkemys on myöhemmissä malleissa muotoutunut tavoitefunktioksi, jossa sijoittaja maksimoi koko elinkaarensa odotetusta kulutuksesta saatavaa hyötyä. Konkaavien hyötyfunktioiden (riskiaversiivisuuden) tapauksessa optimaalisimpaan tulokseen päästään jakamalla kulutus mahdollisimman tasaisesti yli elinkaaren[19]. Siten intertemporaalisia malleja voi pitää konsistenttina myös kulutuksen elinkaarihypoteesin kanssa.

Luvuissa 2 ja 3 esiteltävät hinnoittelumallit voidaan erotella toisistaan sen mukaan, tarvitaanko analyysissa oletuksia sijoittajien preferensseistä. Luvun 2 arbitraasi-

---

[19] Myös oletus aika-additiivisista preferensseistä liittyy olennaisesti intertemporaalisten mallien valtavirtaan.

malleissa preferenssit jäävät ulkopuolelle. Arbitraasin eliminointiehdon vallitessa kaikkien arvopaperien hinnat ovat keskenään sopusoinnussa siten, että arbitraasimahdollisuuksia ei pääse syntymään. Samalla riskiaversiivisten sijoittajien tuotto-odotuksia sopeutetaan niin, että analyysi voidaan suorittaa *ikään kuin* riskineutraalissa muodossa.

Kun korkorakenteen määräytyminen on arbitraasimalleissa riippuvainen eksogeenisista muuttujista, on muuttujat tasapainomalleissa pyritty endogenisoimaan. Riskittömän koron määräytyminen seuraa mahdollisuudesta riskittömään anto- ja ottolainaukseen. Koron suuruuteen vaikuttavat sekä sijoittajien riskiprofiilit että vaihtoehtoisten sijoituskohteiden tuotto-odotukset. Portfolioteoreettisessa kehikossa riskitöntä korkoa voidaan pitää riskittömän sijoituskohteen tuottovaatimuksena.

Ns. edustavan sijoittajan malleissa mahdollisuus riskittömään lainaukseen ei kuitenkaan paranna talouden tilaa, vaan johdettavat tasapainokorot määrittelevät ainoastaan vaihtoehtoisen tien optimaaliseen ratkaisuun. Koska jatkossa käsiteltävät mallit ovat juuri edustavan sijoittajan malleja, heterogeenisuudesta syntyviä vaikutuksia ei liitetä analyysiin. Siten esiteltävät teoreettiset mallit eivät tarjoa teoreettista kehikkoa esimerkiksi edellisessä kappaleessa esitetyille rahoitusvirtamalleille.

Luvussa 3 johdettavassa intertemporaalisessa kehikossa osoitetaan korkojen määräytymiseen vaikuttavien tekijöiden analysoinnin olevan mahdollista sekä kysyntä- että tarjontapuolelta. Breeden (1986) on intertemporaalisen capital asset pricing -mallin sovelluksen valossa tarkastellut molempia vaihtoehtoja. Kysyntäpuolella korkojen määräytymiseen vaikuttaa sijoittajien halu tasoittaa elinkaarensa kulutusta. Sijoittaja säästää varallisuuttaan, mikäli sillä saatava hyödyn lisäys on vähintään yhtä suuri kuin nykyisestä kuluttamatta jättämisestä aiheutunut hyödyn menetys. Ehdon mukaan riskittömästä sijoituksesta saatava rajahyöty on riskiaversion tapauksessa suurempi alhaisemmalla kokonaiskulutuksen tasolla. Siten voidaan sanoa, että laman aikana erääntyvää velkakirjaa arvostetaan enemmän (vaaditaan alhaisempi tuotto) kuin korkeasuhdanteessa erääntyvää. Mitä suurempi volatiliteetti kulutuksen kasvulla odotetaan olevan, sitä enemmän varmasti saatavaa rahavirtaa arvostetaan.

Tarjontapuolella korkojen määräytyminen riippuu positiivisesti tuottavuuden kasvusta. Mitä suurempi tuotanto, sitä enemmän pääomaa kannattaa rahoittaa riskittömällä korolla. Vastaavasti, mitä enemmän epävarmuutta tuotantoon liittyy, sitä alhaisemmaksi tasapainokorko muodostuu.

Korkojen määräytymisen tarkastelu kysyntä- tai tarjontapuolelta ovat luonnollisesti saman asian kääntöpuolia. Luvussa 3 johdetaan samasta sijoittajan tavoitefunktiosta tasapainoehdot molempia teitä. Tarkastelussa käytetään jatkuva-aikaisia menetelmiä, jotka ovat viime vuosien rahoitusteoreettisessa kirjallisuudessa vallanneet alaa[20]. Jatkossa tarkemmin esiteltävän Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985b) jatkuva-aikaisen tuotantotalouden korkorakennemallin on Tong-sheng Sun (1987) johtanut sekä kysyntäpuolelta (vaihtotaloudessa) että diskreettiaikaisilla menetelmillä.

Seuraavissa luvuissa stokastisten menetelmien käyttö on varsin laajaa. Laajemmat esitykset sovellettavista stokastisista prosesseista sekä differentiaalilaskennasta löytyvät muun muassa Chown (1979) sekä Malliaris ja Brockin (1982) esityksistä. Myös Stokeyn ja Lucasin (1989) teosta rekursiivisista menetelmistä on käytetty lähteenä, tosin ainoastaan niissä puitteissa missä soveltaminen stokastiseen differentiaalilaskentaan on mahdollista[21].

---

[20] Jatkuva-aikaisten mallien eduista ja eroista diskreettiaikaisiin, ks. Merton (1975, 1982).

[21] Jatkuva-aikaisten, rekursiivisten sekä state-preference-teorian menetelmien eroista korkorakenne- ja rahoitusteoreettisessa kirjallisuudessa, ks. LeRoy (1982a).

2 ARBITRAASILÄHESTYMISTAPA

Ehto arbitraasimahdollisuuksien eliminoitumisesta on Blackin ja Scholesin (1973) optioden hinnoittelumallin jälkeen noussut rahoitusteoreettisessa kirjallisuudessa keskeiseen asemaan. Ehdon mukaan arvopapereiden teoreettisia arvoja laskettaessa ei arbitraasimahdollisuuksia saa syntyä. Arbitraasiksi kutsutaan mahdollisuutta tehdä riskittömästi voittoa ilman alkuvarallisuutta ostamalla ja myymällä arvopapereita.

Blackin ja Scholesin malliin arbitraasin eliminoitumisehto sisältyy implisiittisesti. Koska option ominaispiirteet säilyttävä instrumentti voidaan luoda synteettisesti osakkeen ja riskittömän lainauksen avulla, arbitraasilta välttyminen edellyttää option ja synteettisen instrumentin hintojen yhtäläisyyttä.

Arbitraasin optiokaupassa eliminoiva hinnoitteluyhtälö perustuu oletukselle, että kaikki epävarmuus on peräisin osakkeen odottamattomista hinnanmuutoksista. Tunnettaessa muutosten varianssi voidaan portfolioon valita osakkeita ja optioita sellaisessa suhteessa, että odottamattomien muutosten vaikutukset kumoavat toisensa. Koska portfolioon ei enää sisälly riskiä, tuotonkin on oltava riskittömän koron suuruinen.

Mikäli arvopaperin hinta riippuu jostakin muusta muuttujasta kuin toisesta hinnasta, eivät riskit enää ole yhteismitallisia. Ajatellaan esimerkiksi arvopaperia, jonka hinta on säätilan funktio. Säätilan muutoksiin, samoin kuin arvopaperin hinnan muutoksiin liittyy epävarmuutta. Kuitenkaan portfolioon ei voi valita 'säätilaa', joten säätilajohdannaisen arvopaperinkaan arvoa ei voi määritellä Blackin ja Scholesin hinnoitteluyhtälön avulla.

Muiden kuin hintajohdannaisten arvopaperien hinnoitteluun voidaan kuitenkin soveltaa riskin markkinahinnan käsitettä. Se on peräisin Stephen Rossin (1976 ja 1977) arbitraasihinnoitteluteoriasta (APT) ja perustuu ajatukseen, että kaikelle epävarmuudelle on määrättävissä rahallinen arvo. Riskin markkinahinta on riskittömän koron lisäksi vaadittava tuotto, jonka sijoittaja haluaa kompensoidakseen arvopaperiin sisältyvän epävarmuuden. Epävarmuus voi olla peräisin monesta lähteestä, jolloin kullekin lähteelle on määriteltävissä oma riskin markkinahinta.

Velkakirjat ovat yksi esimerkki arvopapereista, joita ei voi hinnoitella Blackin ja Scholesin hinnoittelumallin avulla. Kuten luvussa 1 määriteltiin, perustuu velkakirjan hinta korkorakenteeseen. Siten epävarmuus ei ole peräisin hinnan, vaan koron muutoksista. Hintaan ei myöskään vaikuta yksi korko, vaan kokonainen korkorakenne.

Velkakirjojen hinnoitteluun voidaan kuitenkin soveltaa riskin markkinahinnan käsitettä. Epävarmuus aiheutuu korkorakenteen odottamattomista muutoksista, joiden voidaan olettaa olevan peräisin äärellisestä määrästä erilaisia shokkeja. Mikäli kutakin mahdollista shokkia vastaan voidaan määritellä vaadittava lisätuotto, velkakirjojen hinnoitelukin on mahdollista.

Blackin ja Scholesin (1973) mallissa osakkeiden hinnanmuutoksia on kuvattu geometrisen Brownin liikkeen avulla. Geometrisuus estää hintoja menemästä negatiivisiksi. Nimellisten korkojen prosessia mallitettaessa vastaava oletus on realistinen. Muita mallitettaessa huomioon otettavia ominaisuuksia ovat korkojen taipumus palata kohti pitkän aikavälin keskiarvotasoa ja pitkien korkojen lyhyitä pienempi volatiliteetti.

Korkorakenteen dynamiikkaa mallitettaessa voitaisiin periaatteessa käyttää suurtakin määrää muuttujia. Muuttujien sisältö voidaan määritellä eksplisiittisesti tai jättää määrittelemättä. Perinteiset arbitraasimallit ovat yleensä olleet yhden tai kahden faktorin malleja, sillä muuttujien lukumäärän kasvaessa ratkaisun löytäminen tulee ongelmalliseksi.

Ennen arbitraasihinnoittelun yleisen muodon ratkaisun johtamista esitellään Blackin ja Scholesin (1973) malli kursorisesti. Yleisen muodon esittelyn jälkeen tarkastellaan joitakin erikoistapauksia. Useimmissa niistä on muuttujina käytetty lyhyitä ja pitkiä nykykorkoja, historiallisia keskiarvoja sekä eri pituisten korkojen välisiä spreadeja.

2.1 Blackin ja Scholesin optioiden hinnoittelumalli

Blackin ja Scholesin (1973) eurooppalaisten osakeoptioiden hinnoittelumallissa luodaan osakkeen ja option avulla portfolio, joka antaa äärimmäisen lyhyenä hetkenä tietyn varman tuoton. Osakkeen ja osakeoption hinnan muutokset korreloivat täydellisesti keskenään, koska kaikki epävarmuus aiheutuu osakkeen hintakehitystä kuvaavasta stokastisesta prosessista. Osakkeen hinnan muutosta kuvataan geometrisenä diffuusioprosessina

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{2.1}$$

missä

S = osakkeen hinta,
μ = osakkeen hinnan odotettu muutosaste,
σ = osakkeen hinnan muutoksen keskihajonta,
dz = Wiener-prosessi, missä
$E(dz) = 0$,
$E(dz^2) = dt$.

Osakkeen hinnan oletetaan olevan ainoa option hintaan vaikuttava stokastinen muuttuja. Iton lemman[22] avulla voidaan osoittaa option hinnan muutoksen seuraavan Ito-prosessia

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial S}\mu S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial F}{\partial S}\sigma S dz, \tag{2.2}$$

---

22 Ks. Malliaris ja Brock (1982, s. 80-85)

missä

F = option hinta.

Rahoitetaan portfolio myymällä yksi kappale optioita, minkä jälkeen ostetaan $(\partial F/\partial S)$ kappaletta osakkeita. Portfolion arvo on tällöin

$$V = -F + \frac{\partial F}{\partial S}S$$

ja portfolion arvon muutos

$$dV = -dF + \frac{\partial F}{\partial S}dS \tag{2.3}$$

Sijoittamalla yhtälöiden (2.1) ja (2.2) oikeat puolet yhtälöön (2.3) saadaan

$$dV = (-\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt. \tag{2.4}$$

Koska epävarmuutta aiheuttava komponentti on eliminoitunut yhtälöstä (2.4), portfolion tuoton pitää arbitraasimahdollisuuksien välttämiseksi olla riskittömän tuoton suuruinen. Voidaan siis kirjoittaa yhtäsuuruusehto

$$(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt = rVdt$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rF = 0, \tag{2.5}$$

missä

r = riskitön korko,
σ^2 = osakeprosessin varianssi.

Yhtälöä (2.5) kutsutaan Black-Scholes-differentiaaliyhtälöksi. Sitä on kutsuttu myös riskineutraaliksi hinnoitteluyhtälöksi, koska kaikki muuttujat (S_0, t, σ, r) ovat sijoittajan preferensseistä riippumattomia. Osakkeen odotettua tuottoa kuvaava parametri μ, missä preferenssit ovat edustettuina, on eliminoitunut yhtälöstä.

Koska velkakirjojen hinnoittelussa epävarmuus on peräisin korkojen stokastisista muutoksista, ei edellä esitetyn kaltaiseen täydelliseen suojautumiseen ole mahdollisuutta[23]. Jos epävarmuutta aiheuttava muuttuja on jokin muu kuin hintaprosessi, hinnoittelussa on sovellettava alunperin Coxin ja Rossin (1976) esittämää *ikään kuin* riskineutraalia hinnoittelua. Menetelmää käytetään seuraavassa kappaleessa esiteltävässä yleisen muodon hinnoitteluyhtälössä. Kappaleessa 2.3 käsitellään korkojohdannaisten instrumenttien hinnoittelua.

2.2 Arbitraasimallin yleinen muoto

Oletetaan, että arvopaperin[24] hintaan vaikuttaa äärellinen määrä maailmantilaa ohjaavia tekijöitä. Kaikki arvopaperin pääomatuotot ovat siten seurausta kyseisten tilamuuttujien kehityksestä. Oletetaan lisäksi, että osinkotuottoja ei makseta. Cox, Ingersoll ja Ross (1981) ovat johtaneet Black Scholes-yhtälön yleisen muodon kyseisille arvopapereille. Hull (1989, liite 7C) esittää yhtälön pelkistetymmässä muodossa.

Hinnoitteluyhtälöä johdettaessa pätevät samat ehdot kuin Blackin ja Scholesin (1973) mallissa:

---

[23] Suojaus voidaan tehdä hankkimalla lyhyt ja pitkä positio identtisissä instrumenteissa. Epävarmuuden hinnoittelun kannalta ongelma ei silloin kuitenkaan ole mielekäs.

[24] Arvopaperi voi olla osake, velkakirja tai johdannaisinstrumentti (esim. optio tai futuuri). Toistaiseksi oletetaan ainoastaan, että sen hinta määräytyy erikseen määrittelemättömien muuttujien funktiona. Myöhemmässä vaiheessa hinnoitteluyhtälölle voidaan asettaa rajoitukset, joiden seurauksena arvopaperin todellinen luonne voidaan määrätä.

1) arvopaperin lyhytmyynti[25] ja siitä saatavien tulojen täysivaltainen käyttö on sallittua,
2) ei transaktiokustannuksia ja veroja,
3) ei arbitraasimahdollisuuksia ja
4) mahdollisuus jatkuvaan kaupankäyntiin.

Merkitään tilamuuttujia Y_i:llä $(1 \leq i \leq n)$, ja oletetaan niiden muutoksen seuraavan diffuusioprosessia

$$dY_i = \mu_i(Y,t)dt + g_i(Y,t)dz_i, \tag{2.6}$$

missä

$\mu_i(Y,t)$ = tilamuuttujan arvon odotettu muutos (vektorin $\{Y\}$ ja ajan t funktio),

$g_i(Y,t)$ = muutoksen odottamattoman komponentin keskihajonta.

Muuttujalla Y_i on nyt sama rooli kuin johdannossa esitetyn yhtälön (1.1) epävarmuutta aiheuttavilla komponenteilla f_j. Tarkemmin sanottuna odottamattomat muutokset ovat peräisin yhtälön (2.6) jälkimmäisestä eli stokastisesta komponentista.

Arvopaperin hinnan muutos seuraa määritelmällisesti geometristä Ito-prosessia

$$\frac{dP^j(Y,t,T)}{P^j(Y,t,T)} = \alpha_j(Y,t,T)dt + \sum_i \delta_{ij}(Y,t,T)dz_i, \tag{2.7}$$

missä

$\alpha_j(Y,t,T)$ = arvopaperin j hinnan odotettu suhteellinen muutos hetkellä t (mahdollisen eräpäivän ollessa T,

25 Arvopaperikaupassa lyhytmyynnillä (engl. short selling) tarkoitetaan sellaisten arvopaperien myymistä, joita ei myyntihetkellä omisteta.

$\delta_{ij}(Y,t,T)$ = hinnan suhteellisen muutoksen odottamaton komponentti (arvopaperin hinnan herkkyys tilamuuttujien odottamattomille shokeille).

Iton lemmaa soveltamalla voidaan arvopaperin hinnan muutos esittää tilamuuttujien prosessien funktiona

$$\alpha_j P^j = \frac{\partial P^j}{\partial t} + \sum \frac{\partial P^j}{\partial Y_i}\mu_i(Y,t) + \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_k \rho_{ik} g_i(Y,t) g_k(Y,t)\frac{\partial^2 P}{\partial Y_i \partial Y_k}$$

$$\delta_{ij} P^j = \frac{\partial P^j}{\partial Y_i} g_i(Y,t). \qquad (2.8.1\text{-}2)$$

missä

ρ_{ik} = eri tilamuuttujien välinen korrelaatiokerroin.

Vastaavasti kuin Blackin ja Scholesin mallissa valitaan portfolion painot siten, että stokastisten komponenttien vaikutus tuottoon eliminoituu. Silloin

$$\sum_j k_j \delta_{ij} P^j = 0 \qquad \forall i, \qquad (2.9)$$

missä

k_j = arvopaperin j määrä portfoliossa.

Portfolion arvon muutos on riskin eliminoiduttua

$$dV = \sum_j k_j \alpha_j P^j dt = r\sum_j k_j P^j dt,$$

missä

r = riskitön tuotto.

Arbitraasin eliminoitumisehdon ollessa voimassa portfolion arvon muutoksen pitää olla yhtä suuri riskittömän koron kanssa. Siten voidaan kirjoittaa

$$\sum_j k_j P^j (\alpha_j - r) = 0. \tag{2.10}$$

Yhtälöiden (2.9) ja (2.10) ollessa voimassa on niiden välillä oltava lineaarinen yhteys[26]:

$$P^j (\alpha_j - r) = \sum_i \hat{\lambda}_i \delta_{ij} P^j$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j - r = \sum_i \hat{\lambda}_i \delta_{ij} \qquad \forall j. \tag{2.11}$$

Yhtälö (2.11) määrittelee riskin markkinahinnan esitetyn arbitraasiehdon seurauksena. Kunkin riskin lähteen ja tuoton välillä on lineaarinen yhteys, joka on arbitraasimahdollisuuksien välttämiseksi sama kaikilla arvopapereilla. Mikäli ainoastaan yksi tilamuuttuja Y_i vaikuttaisi arvopaperin hintaan, prosessin stokastisen komponentin aiheuttaman riskin markkinahinta olisi

$$\frac{\mu_i - r}{g_i} = \hat{\lambda}_i .$$

Vastaava määritelmä pätee kaikille riskin lähteille.

Sijoittamalla (2.8):n alarivi yhtälöön (2.11) voidaan arvopaperin odotettu tuotto esittää yleisessä muodossa riskittömän koron ja kunkin tilamuutujan aiheuttaman epävarmuuden kompensaationa vaadittavan riskipreemion yhdistelmänä

$$\alpha_j (Y,t,T) = r(Y,t) + \sum_i \lambda_i (Y,t) \frac{\partial P^j}{\partial Y_i} \cdot \frac{1}{P}, \tag{2.12}$$

missä

$$\lambda_i (Y,t) = \hat{\lambda}_i g_i (Y,t).$$

Yhtälön (2.12) mukaan velkakirjan hinta ei enää riipu maturiteetista. Mikäli tiedettäisiin, että epävarmuuden kompensaationa vaadittavan preemion suuruus on maturiteetin funktio, arbitraasi olisi mahdollista. Koska aikaan ei liity epävarmuutta sijoittajan kannattaisi silloin 'myydä'

---

26 Ross (1976).

kalleimman maturiteetin riskiä ja vastaavasti 'ostaa' halvinta.

Riskipreemio $\lambda_i(Y,t)$ määrittelee ylimääräisen tuoton, minkä sijoittaja vaatisi kompensaationa tilamuuttuja Y_i:n stokastisesta riskistä, mikäli Y_i olisi arvopaperin hintaprosessi. Todellisuudessa hintaprosessi on kuitenkin dP, joka on Ito-prosessi muuttujan Y_i suhteen. Siten tilamuuttujan stokastiset shokit vaikuttavat välillisesti myös hintaprosessiin. Hinnan ensimmäinen derivaatta tilaprosessin suhteen, $\partial P/\partial Y$, kuvastaa hinnan herkkyyttä Y:lle. Skaalaamalla riskikohtainen preemio λ_i arvopaperikohtaisella herkkyydellä riskiä kohtaan voidaan määritellä vaadittava lisätuotto kompensaationa tilamuuttujan aiheuttamalle epävarmuudelle.

Sijoittamalla (2.12) Iton lemmasta johdetun yhtälön (2.8) yläriville voidaan muodostaa yleinen arvopapereiden hinnoittelussa käytettävä osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial P^j}{\partial t} + \sum_i [\mu_i(Y,t) - \lambda_i(Y,t)]\frac{\partial P^j}{\partial Y_i} \tag{2.13}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_i\sum_k \rho_{ik} g_i(Y,t) g_k(Y,t)\frac{\partial^2 P^j}{\partial Y_i \partial Y_k} - rP = 0.$$

Yhtälöä (2.13) voidaan käyttää arvopaperien hinnoittelussa, kun määritellään arvopaperin tulevia maksuvirtoja rajoittavat ehdot. Esimerkiksi seuraavassa kappaleessa käsiteltävien riskittömien velkakirjojen tapauksessa hinnoitteluyhtälöä rajoittaa ehto velkakirjan hinnasta erääntymishetkellä, $P(Y,t,T) = 1$, kaikissa mahdollisissa maailmantiloissa.

Yhteys Black Scholes-yhtälöön on suoraviivaisesti johdettavissa hinnoitteluyhtälön yleisestä muodosta. Oletetaan osakkeiden hintaprosessi (2.1) ainoaksi tilamuuttujaksi. Yhtälö (2.13) redusoituu silloin seuraavaan muotoon:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + S\frac{\partial P}{\partial S}(\mu - \lambda\sigma) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - rP = 0.$$

Yhtälöstä (2.11) johdetun riskin markkinahinnan käsitteen avulla todetaan, että $\mu - \lambda\sigma = r$. Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön päädytään Blackin ja Scholesin ratkaisuun (2.5).

Kuten kappaleessa 2.1 todettiin, Black Scholes-yhtälö on sijoittajien preferensseistä riippumaton. Vastaava ei päde yhtälöön (2.13), sillä parametrien μ ja λ arvot ovat sijoittajien preferensseistä riippuvaisia. Mitä riskiaversiivisempi sijoittaja, sitä enemmän hän vaatii lisätuottoa kompensaatioksi otetusta riskistä. Siten riskiaversion tapauksessa riskin markkinahinta on suurempi kuin riskineutraalisuuden vallitessa (jolloin $\lambda = 0$).

Koska otetusta riskistä vaadittava lisätuotto on suurempi riskiaversiivisessa maailmassa, ei arvopaperin hintakaan voi olla yhtäläinen riskineutraalin hinnoittelun kanssa. Yhtälö (2.13) perustuu sen vuoksi oletukseen, että ollaan *ikään kuin* riskineutraalissa maailmassa. Vähentämällä tilamuuttujan odotetusta muutoksesta μ riskin markkinahinta ja pitämällä volatiliteetti ja muuttujien väliset korrelaatiot ennallaan, voidaan siten määritellä arvopaperille riskisopeutettu hinta.

Tarkastellaan esimerkkinä korkoinstrumenttien hinnoittelua. Mikäli hinnoiteltava arvopaperi on nollakuponkilaina, jonka hinta on riippuvainen pelkästään stokastisesti muuttuvasta lyhyestä korosta, on mahdollista soveltaa hinnoitteluyhtälöä (2.13). Koron ollessa ainoa muuttuja sen odotettua muutosta riskisopeutetaan vastaavasti kuin tilamuuttujia yleisessä muodossa. Kuitenkin on huomattava, että korkoriskin markkinahinta, λ_r, on negatiivinen[27]. Siten velkakirjan riskisopeutettu hinta määräytyy yhtälöstä

---

27 Velkakirjan hinta reagoi käänteisesti koron muutoksiin, joten korkoprosessia riskisopeutetaan kasvattamalla koron odotettua muutosta.

$$P(r,t,T) = e^{-r(T-t)}\hat{E}[P(r,T,T)], \qquad (2.14)$$

missä

$\hat{E}$ = velkakirjan hinnan odotusarvo riskisopeutetussa maailmassa.

Koska riskipreemio λ määräytyy preferenssien seurauksena, sille on hankala määritellä eksplisiittistä muotoa. Seuraavassa kappaleessa esitellään tunnetuimpien korkorakenteen arbitraasimallien yhteydessä joitakin eri vaihtoehtoja. Yksinkertaisinta on olettaa riskipreemio eksogeeniseksi, mutta kuten Cox, Ingersoll ja Ross (1985b) ovat todenneet, ratkaisu voi silloin olla ristiriidassa arbitraasioletusten kanssa.

2.3 Hinnoitteluyhtälö korkorakennemalleissa

Hinnoitteluyhtälön (2.13) korkorakennesovellutukset ovat yleensä yhden ja kahden muuttujan malleja. Yhden muuttujan malleissa pitkät korot ovat joko lineaarisesti[28] tai epälineaarisesti[29] yhteydessä lyhyisiin korkoihin. Koska kaikkien velkakirjojen hinnat ovat riippuvaisia yhdestä ja samasta muuttujasta, hintojen muutokset ovat silloin keskenään täydellisesti korreloituneita. Lisäksi pitkät korot lähestyvät yhden muuttujan malleissa asymptoottisesti tiettyä kiinteätä tasoa.

Kahden muuttujan malleissa toisena muuttujana on joko erikseen määritelty pitkä korko tai lyhyen ja pitkän koron välinen erotus (spread)[30] tai inflaatioaste[31]. Kahden muuttujan malleissa ollaan pyritty ehkäisemään hintojen täydel-

---

[28] Vasicek (1977), Cox, Ingersoll ja Ross (1985b).

[29] Dothan (1978), Longstaff (1989).

[30] Brennan ja Schwartz (1979), Schaefer ja Schwartz (1984).

[31] Richard (1978).

linen korrelaatio sekä lisäämään pitkien korkojen vaihteluja.

Parametrisoimaton muoto

Tarkastellaan seuraavaksi joitakin yhden muuttujan malleja. Lyhyen koron dynamiikkaa voidaan kuvata parametrisoimattomassa muodossa yhtälöllä

$$dr = b(r,t)dt + a(r,t)dz, \tag{2.15}$$

missä

$b(r,t)$ = lyhyen koron odotettu muutos,
$a(r,t)$ = muutoksen odottamattoman komponentin keskihajonta.

Kun välittömän nykykoron liikkeet ovat ainoa korkorakennetta ohjaava muuttuja, voidaan yhtälöä (2.12) soveltamalla määritellä minkä tahansa velkakirjan välittömästi toteutuva odotettu tuotto

$$\alpha(r,t,T) = r(t) + \lambda(r,t)\frac{\partial P}{\partial r}\cdot\frac{1}{P}, \tag{2.16}$$

missä

$$\lambda(r,t) = \hat{\lambda}*a(r,t).$$

Sijoittamalla (2.16) yhtälöstä (2.8) muokattuun yhden muuttujan versioon, velkakirjojen riskisopeutetuksi hinnoitteluyhtälöksi tulee

$$\frac{\partial P}{\partial t} + [b(r,t) - \lambda(r,t)]\frac{\partial P}{\partial r} + \tfrac{1}{2}a^2(r,t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \tag{2.17}$$

mitä rajoittaa velkakirjan hinta erääntymishetkellä, $P(r,T,T) = 1$.

Velkakirjan hinnoittelussa voidaan siten käyttää muuttujana välittömän nykykoron riskisopeutettua prosessia

$$dr = [b(r,t) - \lambda(r,t)]dt + a(r,t)dz,$$

jolloin hinta määräytyy (2.14):n tavoin yhtälöstä

$$P(r,t,T) = \hat{E}_t\{\exp[-\int_t^T \bar{r}(s)ds]\}, \quad (2.18)$$

missä $\bar{r}$ viittaa välittömän nykykoron riskisopeutettuun prosessiin[32]. Yhtälössä (2.18) sovelletaan velkakirjan hinnan määritelmää (1.6), missä diskonttokorkona käytetään riskisopeutettua välitöntä nykykorkoa.

Parametrisoitu muoto

Jotta velkakirjojen hinnoitteluyhtälö olisi empiirisesti mielekäs, nykykoron prosessille sekä riskipreemiolle on annettava parametriset arvot. Useimmissa arbitraasimalleissa[33] yhtälön (2.15) odotettua muutosta kuvataan korkojen taipumuksella palata kohti pitkän aikavälin keskiarvotasoa (*mean reversion*). Keskiarvotasona käytetään erikseen määrättyä historiallista liikkuvaa keskiarvoa. Parametri b(r,t) voidaan siten esittää seuraavassa muodossa

$$b(r,t) = \kappa(\theta - r),$$

missä

κ = sopeutumiskerroin, joka kuvaa koron taipumusta palata keskiarvotasolleen,
θ = koron liikkuva historiallinen keskiarvo.

Cox, Ingersoll ja Ross (1981) viittaavat mean reversion-taipumusta perustellessaan useisiin eri lähteisiin, joista John Maynard Keynes lienee tunnetuin. Empiirisissä testeissä mm. Kessel (1965) on havainnut lyhyissä koroissa nega-

---

32 Ratkaisusta tarkemmin Malliaris ja Brock (1982, s. 235-6).

33 Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox, Ingersoll ja Ross (1985b). Ks. perusteluista Cox, Ingersoll ja Ross (1981, s. 790-1).

tiivista autokorrelaatiota pitemmällä aikavälillä. Viime vuosina myös osakkeiden hinnoilla on todettu olevan lievä mean reversion -taipumus[34].

Jotta hinnoitteluyhtälö olisi arbitraasihinnoitteluteorian kanssa konsistentti, välittömän nykykoron ja velkakirjan tuoton välillä tulee olla yhtälön (2.16) kaltainen lineaarinen yhteys. Mikäli yhtälö vastaa perinteistä rationaalisten odotusten hypoteesia, riskipreemio $\lambda(r,t)$ on ajan suhteen kiinteä. Coxin, Ingersollin ja Rossin (1981, 1985b) mukaan lineaarisuusehto on 'mean reversionin' tapauksessa voimassa ainoastaan, jos välittömän nykykoron ja sen varianssin, $a^2(r,t)$, välillä on myöskin lineaarinen yhteys. Voidaan siten merkitä

$$a^2(r,t) = x + yr$$

ehdoksi koron ja sen varianssin välille (missä x ja y vakioita). Vasicek (1977) tutki erikoistapausta, missä varianssi on kiinteä ($y = 0$). Yhtälöstä (2.16) nähdään, että myös riskipreemio on silloin kiinteä. Jotta arbitraasimahdollisuuksia ei syntyisi, joutui Vasicek olettamaan, että $\lambda = 0$. Cox, Ingersoll ja Ross (1985b, ss. 397-8) toteavat, että ainoa keino välttää riskipreemion muodosta tehdyistä oletuksista aiheutuvat ristiriidat, on määritellä preemio endogeenisesti.

Luvussa 4 esiteltävän Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985b) yleisestä tasapainosta johdetussa yhden muuttujan korkorakennemallissa lyhyiden ja pitkien korkojen lineaarisuus otetaan huomioon määrittelemällä välittömän nykykoron stokastiseksi prosessiksi

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz, \tag{2.19}$$

missä

$\sigma^2 r$ = välittömän nykykoron varianssi.

---

[34] Ks. Fama ja French (1988) sekä Poterba ja Summers (1988).

Yhtälössä (2.19) välittömän nykykoron volatiliteetti on positiivisesti riippuvainen koron tasosta. Siten prosessi on konsistentti tehtyjen empiiristen havaintojen kanssa (Shiller, 1979). Lisäksi yhtälöstä eliminoituu negatiivisten korkojen mahdollisuus[35]. Vasicekin (1977) kiinteän varianssin prosessilla ei kyseistä ominaisuutta ollut.

Ottamalla lineaarisuusominaisuuden huomioon malli on edelleen konsistentti perinteisten korkorakennetta koskevien hypoteesien kanssa. Cox, Ingersoll ja Ross (1981) osoittavat myös, että lineaarisuusehtojen vallitessa osittaisdifferentiaaliyhtälö (2.17) on mahdollista hajoittaa useammaksi kokonaisdifferentiaaliyhtälöksi. Silloin hinnoitteluongelma on helpompi ratkaista sekä analyyttisesti että numeerisilla menetelmillä.

Kuten luvussa 4 todetaan, Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a) korkoprosessin muoto rajoittaa olennaisesti korkorakenteen mahdollisia muotoja. Longstaff (1989) yleisti CIR:n mallia hyväksymällä epälineaarisen yhteyden velkakirjan odotetun tuoton ja välittömän nykykoron välille. Hinnoitteluyhtälö on silloin vaikeammin ratkaistavissa, mutta tarjoaa runsaamman valikoiman erilaisia korkorakenteen muotoja.

---

35 Aiheesta enemmän luvussa 4.

3 TASAPAINOLÄHESTYMISTAPA

Edellisessä luvussa esitettiin korkorakenteen muotoutumista säätelevät arbitraasiehdot. Eri pituisten velkakirjojen odotettujen tuottojen pitää olla toisistaan riippuvaisia siten, että tehokkailla markkinoilla ei voi luoda riskittömiä arbitraasivoittoja. Seuraavaksi tarkastellaan tasapainolähestymistavan avulla sijoittajien preferensseistä aiheutuvia lisärajoitteita arbitraasiyhtälölle.

Kuten luvun 2 alussa todettiin, monissa korkorakenteen arbitraasimalleissa korkorakenteen määräytymistä ohjaavat muuttujat oletetaan eksogeenisiksi (esim. Vasicek, 1977 sekä Brennan ja Schwartz, 1979). Siten vältytään monimutkaiselta mallittamiselta ja voidaan soveltaa Black-Scholes-yhtälön intuitiota suoraviivaisesti.

Kuitenkin velkakirjojen hinnoitteluyhtälö (2.13) eroaa olennaisesti Black-Scholes-yhtälöstä (2.5). Black-Scholes-yhtälössä option ominaisuudet pystyttiin luomaan synteettisesti osakkeen ja velkakirjan avulla. Tekemällä optiolle lyhyt positio ja ostamalla osakkeen ja velkakirjan yhdistelmää voitiin siten luoda riskitön portfolio. Koska kyseinen portfolio on itsensä rahoittava ja riskitön, arbitraasin välttämiseksi sen ei pitäisi tuottaa mitään.

Sijoittajien preferenssien vaikutus eliminoitiin Black-Scholes-yhtälöstä olettamalla, että sekä option että osakkeen riski on peräisin osakkeen hintaprosessista. Siten ottamalla vastakkaiset positiot riski voitiin eliminoida täydellisesti. Velkakirjojen tapauksessa vastaavaa 'temppua' ei voi tehdä, sillä velkakirjan hinta on koroista riippuvainen. Koska riskipreemio ja koron odotettu muutos jäävät hinnoitteluyhtälöön, vaaditaan niiden funktionaalisen muodon määrittelemiseksi käsitys sijoittajien preferensseistä. Seuraavissa kappaleissa pyritään esittämään, miten arvopaperien, kuten velkakirjojen, hinnat määräytyvät edustavan sijoittajan malleissa sekä miten hinnan määräytyminen olisi konsistenttia edellä esitettyjen arbitraasiehtojen kanssa.

Arvopaperin hinnan määräytymisen tarkastelu tasapainokehikossa on syytä aloittaa tuoton lähteistä. Perinteisen hinnoitteluproblematiikan mukaan arvopaperin hinnan pitäisi vastata sen tulevien kassavirtojen diskontattujen nykyarvojen summaa. Osakkeiden tapauksessa kassavirtoja syntyy osinkoina ja velkakirjojen tapauksessa kuponkivirtoina ja nimellispääoman takaisinmaksuna. Hankkimaansa pääomaa yritykset käyttävät reaali-investointeihinsa. Reaali-investointien tuotosta riippuu, kuinka paljon yritykset voivat maksaa osinkoina omistajilleen. Siten osakkeen hintaa voidaan pitää talouden tilan funktiona. Taloudellista tilaa voidaan selittää pääoman tuottavuudella tai jopa tuottavuuden synnyttävällä teknologisella kehityksellä.

Myös velkakirjan arvo on sen tulevien kassavirtojen diskontattu nykyarvo. Diskonttauksessa käytetään velan maturiteetin mukaista käypää korkoa. Velka voidaan jakaa riskipitoiseen ja riskittömään. Riskittömänä korkoa voidaan pitää, kun sen takaisinmaksuun ei liity epävarmuutta. Riskipitoisen velan tapauksessa lainanantaja vaatii lisäpreemion kompensoidakseen mahdollisen takaisinmaksuun liittyvän riskin. Jatkossa käsitellään ainoastaan riskittömän koron määräytymistä.

Riskittömän koron määräytymiseen vaikuttaa velan kysyntä ja tarjonta markkinoilla. Markkinatasapainossa nettolainanannon on Arrow-Debreu-taloudessa oltava nolla. Kuten osakkeidenkin tapauksessa, velkakirjan hinta on talouden tilan funktio. Hinnan määräytymiseen käytettävään korkoon vaikuttavia tekijöitä ovat kiinteän pääoman tuottavuus, kokonaisvarallisuus, varallisuuden jakautuminen sekä eri sijoitusvaihtoehtojen väliset suhteet. Myös inflaatio sekä talouspolitiikka vaikuttavat velan arvoon.

Seuraavissa kappaleissa tarkastellaan kolmea yritystä korkojen määräytymisen mallittamiseksi edustavan sijoittajan mallissa. Kappaleessa 3.1 esitettävässä Lucasin (1978) mallissa määritellään kulutuksen ja säästämisen välinen optimaalisuusehto, jolle arvopaperien hinnoittelu perustuu. Lucasin lisäksi ehtoa ovat soveltaneet hinnoittelumalleihinsa mm. Rubinstein (1976) sekä Breeden (1979). Kappaleessa 3.2 esiteltävässä Mertonin (1973) mallissa keskitytään kuluttamatta jääneen osuuden optimaaliseen sijoittamiseen eri vaihtoehtojen kesken. Kappaleessa 3.3 esitetään Lucasin ja Mertonin mallien synteesinä pidetty Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a) yleinen muoto.

Sijoittajien heterogeenisuudesta, kuten erilaisista preferensseistä tai asymmetrisestä informaatiosta syntyvät vaikutukset jäävät analyysin ulkopuolelle. Koska lainauksen avulla ei silloin ole mahdollista saavuttaa alkuperäistä optimaalista portfoliota parempaa ratkaisua, ei edustavalla sijoittajalla ole tarvetta eikä mahdollisuuttakaan riskittömään rahoitukseen. Mikäli edustava sijoittaja voisi käyttää riskitöntä lainausta, määrittelisi johdettava tasapainokorko hinnan, jolla tehokas portfolio saavutetaan.

3.1 Eksogeenisen pääoman tuoton ja hintojen välinen yhteys

Tarkastellaan Lucasin (1978) edustavan yksilön ja yhden pääomahyödykkeen mallia. Oletetaan vaihtotalous, missä pääoman tuotto on eksogeenista. Tuottoa ei voi investoida takaisin tuotantoon eikä varastoida, vaan se on kulutettava välittömästi. Muutokset pääoman tuottavuudessa toteutuvat stokastisesti kehittyvän prosessin tavoin, mutta muutoksia ohjaava todennäköisyysjakauma tiedetään. Sargent (1987) on verrannut pääomahyödykettä omenapuuhun, joka tuottaa hedelmiä jonkin satunnaiskulun tavoin. Hedelmät on syötävä välittömästi, jotta ne eivät pilaantuisi, eikä siemeniä voi käyttää istutukseen.

Oletetaan homogeeniset sijoittajat, jotka voidaan aggregoida yhdeksi edustavaksi sijoittajaksi. Edustavan sijoittajan odotukset ovat rationaalisia eli hän tuntee pääomahyödykkeen tuoton todellisen todennäköisyysjakauman. Sijoittajalla on oikeus tuottoon, Sargentia lainaten omenapuun antimiin. Arvopaperia voidaan kutsua osuudeksi pääomahyödykkeen tuottoon.

Sijoittajan tavoitteena on maksimoida elinkaaren aikana saatavaa hyötyä neoklassisista kasvumalleista tutussa analyysikehikossa:

$$\max E_0 \{\int_t^T U[C(s),s]ds + B[W(T),T]\}, \tag{3.1}$$

missä

E_0 = odotusarvo hetkellä t = 0,
U[C,t] = kulutuksen hyötyfunktio hetkellä t,
B[W,T] = varallisuuden hyötyfunktio hetkellä T.

Termiä B[W(T),T] voidaan pitää perintöfunktiona, joka määrittelee sijoittajan elinkaaren päättyessä omistamasta varallisuudesta saatavan hyödyn. Hyöty ei silloin synny omasta kulutuksesta, vaan seuraaville sukupolville annettavista lisäresursseista.

Edustavan sijoittajan vaihtotaloudessa voidaan triviaalisti osoittaa tehokkaaksi tila, jossa kaikki pääomahyödykkeet omistetaan ja kaikki tuotanto kulutetaan välittömästi. Ratkaisemalla yhtälön (3.1) äärettömässä kehikossa [$T \to \infty$] Lucas (1978, yhtälö 6, s. 1434) osoittaa seuraavan yhtälön määräävän arvopaperin hinnan:

$$\frac{\partial U(C,t)}{\partial C(t)} \cdot P(Y,t,T) = E_t \{\int_t^\infty [\frac{\partial U(C,s)}{\partial C(s)} \cdot D(Y,s,T)]ds\}, \tag{3.2}$$

missä

P(Y,t,T) = arvopaperin hinta hetkellä t,
D(Y,t,T) = arvopaperin osinko hetkellä t.

Matemaattisesti ilmaistuna (3.2) on stokastinen Eulerin yhtälö[36], jonka mukaan tasapainohinnoilla nykyisen ja tulevan kulutuksen välinen rajasubstituutioaste on yhtä suuri

---

36 Ks. Stokey ja Lucas (1989) ss. 280-283.

pääoman rajatransformaatioasteen (so. markkinatuoton) kanssa.

Nollakuponkilainaa hinnoiteltaessa voidaan olettaa, että

$$D(Y,t,T) = 1,\ t = T \quad \text{ja} \quad D(Y,t,T) = 0,\ t \neq T,$$

jolloin yhtälö (3.2) voidaan esittää seuraavassa muodossa:

$$P(Y,t,T) = E_t\left[\frac{U_C(C,T)}{U_C(C,t)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+r)^{T-t}} = E_t\left[\frac{U_C(C,T)}{U_C(C,t)}\right], \qquad (3.3)$$

missä

$$U_C(C,t) = \frac{\partial U}{\partial C}.$$

Kuluttajan ensimmäisen kertaluvun ehdoista voidaan siten johtaa yhtälön (3.3) mukaisesti velkakirjojen hinnoittelussa käytettävä diskonttokorko kullekin maturiteetille. Yhtälö on konsistentti myös Arrow-Debreu-kehikon täydellisten markkinoiden ja allokatiivisen tehokkuuden oletusten kanssa[37].

Yhtälöt (3.2) ja (3.3) eivät myöskään ole ristiriidassa tehokkaiden markkinoiden informaatiota koskevien oletusten kanssa. Koska sijoittajat ovat rationaalisia, arvopapereiden hinnat heijastavat täydellisesti tulevia tuotto-odotuksia. Tiedolla menneestä hintakehityksestä ei ole merkitystä sijoituspäätöksiä tehtäessä, sillä markkinat ovat diskontanneet kaiken käytettävissä olevan informaation hintoihin. Siten tuotto-odotusten perustuessa todennäköisyysjakaumaan hintakehityksenkin on perustuttava samaan epävarmuuteen kiinteän pääoman tuottavuudesta.

---

[37] Ks. Huang ja Litzenberger (1988, s. 205). Duffie (1986) on vertaillut lähemmin Lucasin (1978) ja Arrow-Debreu malleja. Toisin kuin Arrow-Debreu-malleissa, Lucas ei määrittele markkinoilla tarjolla olevia arvopapereita. Mikäli kehikkoon liitettäisiin oletus täydellisistä markkinoista, yhtälö (3.2) pätisi myös heterogeenisten kuluttajien tapauksessa.

Kuten kappaleen alussa todettiin, Lucasin (1978) malli perustuu oletukseen vaihtotaloudesta, jossa pääomakantaa ei voi kasvattaa. Yleistäen voidaan sanoa, että pääoman tuotto riippuu teknologian tilasta kunakin hetkenä. Hyvinä aikoina pääomasta saadaan paljon irti, huonoina vähemmän. Mikäli osinkoprosessia koskeviin oletuksiin ei tehdä rajoituksia, mikään ei estä sitä olemasta myöskään negatiivinen. Siten yhtälössä (3.2) arvopaperin hintaakaan ei ole rajoitettu ei-negatiiviseksi (Constantinides, 1988).

Kuitenkin todellisuudessa kiinteä pääoma akkumuloituu investointien seurauksena. Kuluttajan on siten mahdollisuus tehdä päätös nykyisen ja myöhemmän kulutuksen välillä. Kulutusta voidaan viivästyttää säästämällä eli sijoittamalla pääomakantaan. Sijoitukset voidaan tehdä suoraan tuotantoprosessiin, jolloin altistutaan epävarmuudelle tulevasta tuotannosta. Riskiä voidaan kuitenkin diversifioida sijoittamalla useisiin eri tuotantoprosesseihin.

Myös otto- ja antolainaus riskittömällä korolla on mahdollista. Kuitenkin on huomattava, että korot vaihtelevat. Kuten Lucasin analyysin avulla voitiin havaita, on koron määräytyminen riippuvaista tuottavuuden odotetusta kehityksestä. Riskittömällä korolla lainattaessa altistutaan epävarmuudelle teknologian kehityksestä. Mikäli tuottavuus onkin kehittynyt odotettua paremmin, riskittömällä korolla tehty sijoitus tulevaan kulutukseen antaa suoraa sijoitusta alhaisemman tuoton.

Lucasin mallin avulla voitiin osoittaa, että tasapainokorot on mahdollista johtaa kuluttajan ensimmäisen kertaluvun ehdoista yhtälön (3.3) mukaisesti. Samaa menetelmää ovat käyttäneet korkorakennemalleissaan myös Rubinstein (1976) ja Sun (1987). Menetelmä perustuu kuitenkin hyvin voimakkaalle oletukselle odotetun hyödyn intertemporaalisesta maksimoinnista. Siten Lucasin malli, kuten kaikki jatkossakin esiteltävät hinnoittelumallit, sisältävät implisiittisesti oletuksen kulutuksen elinkaarihypoteesista. Makroteoreettisessa tutkimuksessa hypoteesiin on suhtauduttu niin suurin varauksin, että sen mielekkyyttä hinnoittelumallien kulmakivenä voidaan myös pitää kyseenalaisena[38]. Toisaalta on kuitenkin mainittava, että yhtälöstä (3.2) johdetun hinnoittelumallin avulla Harvey (1988) on osoittanut korkorakenteen ennustavan kulutuksen kasvua paremmin kuin ekonometriset mallit tai *leading indicator*it.

3.2 Tehokkaan portfolion määräytymisestä

Lucasin (1978) yhden pääomaprosessin vaihtotalouden mallissa ei käsitelty lainkaan eri prosessien välisiä suhteita eikä pääoman akkumulaatiosta aiheutuvaa kulutus- ja säästämispäätöksiin liittyvää problematiikkaa. Kappaleessa 3.3 tullaan Lucasin mallia laajentamaan tapaukseksi, missä yhtä kulutushyödykettä voidaan valmistaa useissa toisistaan riippumattomissa tuotantoprosesseissa. Myös investoinnit pääomakantaan ovat käsiteltävässä Coxin, Ingersollin ja Rossin mallissa (1985a) mahdollisia.

Ennen Lucasin mallin laajennusta tarkastellaan kuitenkin intertemporaalisen rahoitusteorian näkökulmasta tehokkaan portfolion johtamista useiden sijoitusvaihtoehtojen tapauksessa. Intertemporaaliset hinnoittelumallit perustuvat pitkälti perinteiseen capital asset pricing -malliin, johon on liitetty dynaamisia piirteitä. Perinteisen CAPM:n varallisuuden maksimoinnin sijaan sijoittajien tavoitteena on maksimoida elinkaarensa odotettua kulutusta määritelmän (3.1) tavoin. Lisäksi arvopapereiden hintojen oletetaan seuraavan edellisessä luvussa esitetyn yhtälön (2.7) kaltaista stokastista prosessia

$$\frac{dP^j(Y,t,T)}{P^j(Y,t,T)} = \alpha_j(Y,t,T)dt + \sum_i \delta_{ij}(Y,t,T)dz, \qquad (3.4)$$

missä

$\alpha(Y,t,T)$ = hinnan odotettu suhteellinen muutos,
$\delta_{ij}(Y,t,T)$ = kustakin tilamuuttujasta Y_i aiheutuva odottamaton muutos.

---

[38] Ks. Hall ja Taylor (1986, s. 187-91).

Osakkeiden tapauksessa eräpäivää yhtälössä indikoiva T lähestyy äärettömyyttä.

Phelpsillä (1962) on yksi varhaisimpia ratkaisuja varallisuuden ja tulevien tulojen optimaaliseksi allokaatioksi kulutuksen ja yhden riskisijoituksen kesken. Hakansson (1970) yleisti analyysin käsittämään useita sijoituskohteita, joissa on mukana anto- ja ottolainaus riskittömällä korolla. Jos arvopaperin hintoja ohjaava prosessi ei muutu ajan kuluessa, niin Hakanssonin mukaan kiinteän riskiaversion tapauksessa sijoittajien optimaaliset portfoliot pysyvät stabiileina. Fama (1970) sovelsi tulosta hajoittamalla intertemporaalisen allokaatio-ongelman useaksi peräkkäiseksi yhden periodin ongelmaksi.

Jotta Faman mukaisesti sijoituspäätökset voitaisiin hajoittaa useiksi yhden periodin ongelmiksi, parametrien α ja δ pitää pysyä kiinteinä. Hintojen ja korkojen muutokset ovat kuitenkin seurausta taloudellisesta kasvusta, joka taas on peräisin muun muassa tuottavuuden paranemisesta ja teknologian kehityksestä. Siten oletus kiinteistä parametreistä ei ole realistinen. Intertemporaalisen hinnoittelun teorian kannalta merkittävissä kolmessa artikkelissaan Merton (1969, 1971 ja 1973) olettikin hintoja ohjaavan prosessin parametrien vaihtelevan stokastisesti. Hintojen muutos voidaan esittää Ito-prosessina, jossa N kappaletta yhtälön (2.6) kaltaista maailmantilaa ohjaavaa muuttujaa, Y_i, aiheuttaa muutoksia yhtälön (3.4) parametreissä α ja δ_{ij}:

$$dY_i(t) = \mu_i(Y,t)dt + g_i(Y,t)dz_i, \tag{3.5}$$

missä

$\mu_i(Y,t)$ = tilamuuttujan arvon odotettu muutos,
$g_i(Y,t)$ = tilamuuttujan odottamaton muutos.

Oletetaan, että on olemassa täysin riskitön arvopaperi. Staattisen CAPM:n tavoin riskitöntä vaihtoehtoa voidaan ostaa ja myydä rajattomasti. Merkitään riskitöntä tuottoa r:llä (arvopaperin ollessa riskitön sillä ei luonnollisestikaan ole stokastista komponenttia). Maksimoitaessa yhtälöä (3.1) asetetaan varallisuusrajoitteeksi

$$dW = [\sum_j w_j(\alpha_j - r)W + rW - C]dt + [\sum_j\sum_i w_j W\delta_{ij}]dz, \qquad (3.6)$$

missä

W(t) = varallisuus hetkellä t,
w_j = arvopaperin P_j osuus portfoliosta,
r = riskitön tuotto.

Allokaatio-ongelmassa oletetaan siis, että pääomatulot ovat ainoa tuoton lähde. Mahdolliset kuponki- ja osinkotulot voidaan olettaa sisältyväksi hintaprosessiin dP/P. Merton (1971) sisälsi erikoistapauksena budjettirajoitteeseen myös palkkatulon, jolloin allokaatio-ongelma ei kuitenkaan olennaisesti muutu.

Metodina yhtälön (3.1) ratkaisussa on käytetty dynaamista ohjelmointia rajoitteen vallitessa[39]. Määritellään epäsuora hyötyfunktio, jonka avulla yhtälön (3.1) dynaamisesta ongelmasta tehdään staattisen kaltainen[40]:

$$J(W,Y,t) = \max E_0\{\int_t^T U(C,s)ds + B[W(T),T]\}, \qquad (3.7)$$

sekä määritellään[41]

---

[39] Ratkaisu seuraa läheisesti Chown (1979) analyysia. Stokastisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisuista yleisemmin, ks. Malliaris ja Brock (1982). Johdatus optimaalisen allokaatio-ongelman ratkaisemiseen diskreetissä muodossa Ingersollin (1987, luku 11) esityksessä.

[40] Yhtälössä (3.7) epäsuoraa hyötyfunktiota rajoittaa ehto

$$J(W,Y,T) = B[W(T),T].$$

Mertonin (1971, teoreema VI) mukaan oletus perinnön mahdollisuuden huomioon jättämisestä (B = 0) muuttaa analyysia tulevan hyödyn diskonttaustekijän osalta. Muuten sijoittaja käyttäytyy kuin eläisi ikuisesti, paitsi korottaa tulevan hyödyn diskonttausastetta jäljellä olevan eliniän odotusarvon pienentyessä.

[41] Merton (1969) on osoittanut, että osittaisdifferentiaaliyhtälö (3.7) redusoituisi kokonaisdifferentiaaliyhtälöksi, mikäli oletettaisiin ääretön aikahorisontti.

$$\Phi(w,C;W,Y,t) = \underset{(a)}{U(C,t)} + \underset{(b)}{\mathcal{L}[J(W,Y,t)]}, \tag{3.8}$$

missä

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J(W,Y,t)] = {} & \frac{\partial J}{\partial t} + [[\sum_j w_j(\alpha_j - r) + r]W - C]\frac{\partial J}{\partial W} \\ & + \sum_i \mu_i \frac{\partial J}{\partial Y_i} + \tfrac{1}{2}\sum_j \sum_l \delta_{jl} w_j w_l W^2 \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \\ & + \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k {}_i g_k \rho_{ik} \frac{\partial^2 J}{\partial Y_i \partial Y_k} \\ & + \sum_i \sum_j w_j W g_i u_{ij} \frac{\partial^2 J}{\partial Y_i \partial W},\end{aligned}$$

missä

$\delta_{jl} = \delta_j \delta_l v_{jl}$ = tuottojen välinen kovarianssi,
ρ_{ik} = eri tilamuuttujien muutosten välinen korrelaatiokerroin,
u_{ij} = tuottojen ja tilamuuttujien muutosten välinen korrelaatiokerroin.

Yhtälön ratkaisussa käytetystä dynaamisen ohjelmoinnin menetelmästä sekä Iton stokastisten yhtälöiden differentiointisäännöstä, ks. Chow (1979, s. 149-54). Yhtälössä (3.8) kulutuksesta elinkaaren aikana saatava hyöty jaetaan kahteen osaan ja maksimoidaan osien summaa. Välitön kulutuspäätös hetkellä t vaikuttaa elinkaaren aikana saatavaan hyötyyn suoraan termin (a) välityksellä. Termi (b) kuvaa tulevan kulutuksen odotettua hyötyä, johon nykyinen kulutuspäätös vaikuttaa varallisuusrajoitteessa tapahtuneen muutoksen kautta.

Differentioidaan (3.8) kulutuksen ja portfolion painojen suhteen, jolloin ensimmäisen kertaluvun ehdoiksi saadaan

---

Ratkaisu olisi silloin laskennallisesti yksinkertaisempi, mutta siitä puuttuu tämän esityksen kannalta olennaisia ominaispiirteitä. Siksi pidättäydytään hankalammassa, tosin myös realistisemmassa esitystavassa.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \frac{\partial J}{\partial W} = 0, \tag{3.9.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial w_x} = \frac{\partial J}{\partial W}(\alpha_x - r) + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W \sum_j \delta_{jx} w_j + \sum_i \frac{\partial^2 J}{\partial Y_i \partial W} g_i w_x u_{ix} = 0. \tag{3.9.2}$$

Yhtälöt (3.9.1) ja (3.9.2) ratkaisemalla saadaan optimaalinen kulutustaso, C, sekä portfoliopainot, w_j, epäsuoran hyötyfunktion osittaisderivaattojen funktioina. Yhtälö (3.9.1) esittää rajasubstituutioehdon, jonka mukaan sijoittaja allokoi varallisuuttaan kulutukseen siihen asti, kunnes kulutuksesta saatava rajahyöty on samansuuruinen varallisuuden lisäämisen rajahyödyn kanssa[42].

Arvopapereiden optimaaliset osuudet portfoliossa määräytyvät yhtälöstä (3.9.2). Ennen tarkastelun aloittamista muokataan yhtälö intuitiivisemmaksi. Kirjoittamalla yhtälö matriisimuotoon voidaan portfolion rakenne esittää seuraavan yhtälön avulla:

$$0 = \frac{\partial J}{\partial W}(\alpha - r1) + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W\Sigma \mathbf{w}^* + \sum_i \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial Y_i} \Omega. \tag{3.10}$$

missä

Σ = tuottojen kovarianssimatriisi,
Ω = tuottojen ja tilamuuttujien muutosten välinen kovarianssimatriisi.

Muokkaamalla yhtälöä (3.10) edelleen saadaan ratkaistua optimaalisten portfolio-osuuksien vektori **w***:

$$\mathbf{w}^* = \underbrace{\frac{J_W}{WJ_{WW}}\Sigma^{-1}(\alpha - r1)}_{(a)} - \underbrace{\sum_i \frac{J_{WY_i}}{WJ_{WW}}\Sigma^{-1}\Omega}_{(b)}, \tag{3.11}$$

missä osittaisderivaattoja merkitään $J_W = \frac{\partial J}{\partial W}$.

---

42 Ensimmäisen kertaluvun ehdosta (3.9.1) voidaan johtaa myös edellisessä kappaleessa esitetty stokastinen Eulerin yhtälö (3.2). Ks. Stokey ja Lucas (1989), s. 281.

Yhtälön (3.11) termi (a) kuvaa optimaalista portfolion hajauttamista perinteisen CAPM:n mielessä. Kysymyksessä on tangenttiportfolio tehokkaiden portfolioiden uralla, kun varianssi-kovarianssimatriisi pysyy stabiilina. Termi (b) kuvaa Mertonin mallin intertemporaalista ulottuvuutta. Staattisen markkinariskin lisäksi sijoittajat haluavat suojautua odottamattomilta varianssi-kovarianssimatriisin muutoksilta. Termi (b) kuvaakin suojausportfolioita maailmantilassa tapahtuvia muutoksia vastaan. Kutakin maailmantilaa ohjaavaa muuttujaa Y_i vastaan on olemassa sen kanssa täydellisesti korreloiva portfolio. Siten intertemporaalinen hinnoittelumalli[43] eroaa perinteisestä CAPM: sta ottamalla huomioon staattisen markkinariskin lisäksi mahdolliset ajan kuluessa tapahtuvat muutokset markkinariskin luonteessa.

Mertonin (1973) mallin ansioksi voidaan pääasiassa lukea intertemporaalisten vaikutusten liittäminen analyysiin. ICAPM:ia voidaankin pitää perinteisen CAPM:n yleistyksenä, sillä olettamalla yhtälön (3.8) termissä (b) esitetyn epäsuoran hyötyfunktion maailmantilasta riippumattomaksi palataan takaisin yhden periodin muotoon. Jotta epäsuora hyötyfunktio olisi maailmantilasta riippumaton, suoran hyötyfunktion täytyy myös olla vastaavasti riippumaton. Lisäksi tuottojen varianssi-kovarianssimatriisin pitää olla stabiili (Constantinides, 1988)[44].

Rahoitusmarkkinoiden empiirisen tutkimuksen kannalta Mertonin mallilla ei ole ollut paljon annettavaa. Teoreettisessa mielessä se tarjoaa lähtökohdan seuraavassa kappaleessa esitettävässä kehikossa Rossin (1976 ja 1977) riskipreemioiden eksplisiittiselle määrittämiselle. Esitettävässä Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a) hinnoittelumallissa

---

43 Intertemporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM) tai multibeta-malli. Koska ICAPM:ssa on muitakin riskin lähteitä kuin markkinariski, tulee kullekin arvopaperille voida mitata sen kovarianssi jokaisen riskin kanssa. Siitä jälkimmäinen nimitys.

44 Luvussa 4 osoitetaan, että toinen mahdollisuus palauttaa ongelma staattisen kaltaiseksi on olettaa sijoittajien hyötyfunktiot logaritmisiksi.

arbitraasihinnoitteluteorian ympärille rakennetaan intertemporaalinen, mikroperusteista johdettu kehikko, jolloin preemiot voidaan esittää suhteessa sijoittajan riskiprofiiliin.

3.3 Korkorakenne yleisessä tasapainossa

Seuraavaksi esitellään Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a) yleisen tasapainon intertemporaalinen hinnoittelumalli, jota voidaan pitää edellisessä kappaleessa esitettyjen Lucasin (1978) ja Mertonin (1973a) mallien synteesinä. Cox, Ingersoll ja Ross (CIR) laajentavat Lucasin mallin talouteen, jossa on mahdollista kasvattaa pääomakantaa[45]. Arvopapereiden hinnat ovat edelleen riippuvaisia teknologian kehityksestä, joskin tuotannon taso määräytyy kulutus/investointiongelman ratkaisun kautta. Mertonin analyysista CIR-malliin on liitetty tehokkaan portfolion ratkaisu usean sijoitusvaihtoehdon välisenä optimointiongelmana.

CIR-mallin tarkastelun voi aloittaa toteamalla, että Mertonin ICAPM ei ole yleisen tasapainon malli. Kuluttajien puolelta maksimointiongelma on konsistentti tasapainoanalyysin kanssa, mutta hintojen määräytymisen tuotannon ja teknologian suhteen Merton jättää analyysin ulkopuolelle. Kuitenkin, kuten Lucasin mallia esiteltäessä todettiin, hinnat ovat seurausta kiinteän pääomakannan tuottavuudesta.

Cox, Ingersoll ja Ross olettavat teknologisen kehityksen toteutuvan maailmantilaa ohjaavien muuttujien $\{Y_i\}$ stokastisen kehityksen seurauksena. Muuttujien voidaan olettaa seuraavan yhtälön (3.3) kaltaista prosessia. Kuten Lucasilla, teknologian kehitys vaikuttaa CIR-mallissakin yhden hyödykkeen tuotantoon. Hyödykettä voidaan käyttää sekä kulutukseen että tuotantoon. Tuotannossa oletetaan kiinteät skaalatuotot eli tuottavuusaste on sama kaikilla tuotannon

---

[45] Muita hinnoittelumalleja, joissa pääoman kasvu on mukana analyysissa, ovat Brock (1982) sekä Prescott ja Mehra (1980).

tasoilla. Mikäli kaikki tuotanto palautuisi pääomakantaan, akkumulaatioprosessi kehittyisi yhtälön (3.12) tavoin[46]:

$$\frac{d\eta_j}{\eta_j} = \alpha_j(Y,t)dt + \sum_i \delta_{ij}(Y,t)dz, \qquad (3.12)$$

missä

$\eta_j(Y,t)$ = pääomakanta tuotantoprosessissa j hetkellä t,

$\alpha_j(Y,t)$ = odotettu tuotanto,

$\delta_{ij}(Y,t)$ = tuotannon odottamaton komponentti.

Investoinnit tuotantoprosessiin tapahtuvat yritysten välityksellä. Sijoitukset voidaan tehdä joko suoraan tuotantoon (oma pääoma) tai yrityksen liikkeelle laskemiin vaateisiin (vieras pääoma). Vaateet oikeuttavat haltijansa sovittuun osuuteen tulevasta tuotannosta. Vaateesta saatavat tulovirrat voidaan jakaa kuuluviksi kolmeen eri ryhmään. Merkittävimpien rahoitusmarkkinoilla käytettävien instrumenttien rahavirtojen voidaan katsoa sisältyvän kyseisiin ryhmiin:

1) Jos vaateen hintaa ohjaavat muuttujat pysyvät tietyllä, joko etukäteen sovitulla tai vaateen omistajan subjektiivisesti määrittelemällä alueella, niin omistaja vastaanottaa sovitunkaltaisen nimellispääoman (mahdollisena) eräpäivänä

2) Jos vaateen hintaa ohjaavat muuttujat poistuvat kohdan 1 alueelta, niin omistaja vastaanottaa tietyn tulovirran joko (mahdollisena) eräpäivänä tai sitä aikaisemmin

3) Omistaja vastaanottaa sovitunkaltaisen jatkuvan tuottovirran vaateen hallussapitoaikanaan.

---

46 Yhtälöstä (3.12) voidaan todeta, että negatiivinen tuotanto on mahdollista. Se voidaan tulkita pääoman poistoiksi.

Yleensä käytettyjen instrumenttien tapauksissa kohdan 1 kaltainen rahavirta saadaan esimerkiksi erääntyvän velkakirjan nimellispääomasta. Kohdan 2 kaltaisia rahavirtoja siirrellään kaupattaessa instrumentteja jälkimarkkinoilla tai käytettäessä esimerkiksi oikeutta lunastaa optio. Kohdan 3 kuvaus koskee osinko- ja kuponkivirtoja.

Edellä esitettyjä instrumentteja voidaan myös verrata perinteisiin Arrown ja Debreun aika- ja tapahtumasidonnaisiin hyödykkeisiin (Debreu, 1959, kpl 7.3) Voidaan ajatella CIR:n monimutkaisempien vaateiden olevan Arrown ja Debreun hyödykkeiden lineaarisia kombinaatioita.

Vaateiden tuotto syntyy arvonnousuista sekä mahdollisista osingoista. Tuoton voidaan olettaa määräytyvän teknologisen kehityksen seurauksena ja se voidaan mallittaa Ito-prosessiksi

$$dF^j(W,Y,t,T) = (\beta_j F^j - \upsilon_j)dt + \sum_i F^j h_{ij} dz, \tag{3.13}$$

missä

$F^j(W,Y,t,T)$ = vaateen hinta hetkellä t,
β_j = arvon odotettu muutos,
υ_j = osinkovirta,
h_{ij} = hinnan muutoksen odottamaton komponentti.

Sijoittajilla on myös mahdollisuus rahoittaa nykyistä ja tulevaa kulutustaan riskittömän anto- ja ottolainauksen avulla. Riskitön korko määräytyy tehokkaan markkinatasapainon seurauksena ja teknologian kehityksen myötä vaihtelee jatkuvasti. Kaikkia pidemmän maturiteetin korkoja rajoittaa riippuvuussuhde äärimmäisen lyhyeen korkoon, välittömään nykykorkoon.

Sijoittajan optimointitehtävä säilyy edelleen määritelmän (3.1) kaltaisena. Koska CIR-taloudessa sijoituksia voi tehdä sekä tuotantoprosessiin että tulevaan tuotantoon oikeuttaviin vaateisiin, voidaan varallisuusrajoitteeksi kirjoittaa

$$dW = [\sum_j a_j(\alpha_j - r)W + \sum_j b_j(\beta_j - r) + rW - C]dt$$

$$+ [\sum_i \sum_j a_j \delta_{ij} + \sum_i \sum_j b_i h_{ij}]Wdz_i. \qquad (3.14)$$

missä

a_j = suoran sijoituksen tuotantoprosessiin j osuus portfoliossa,

b_j = vaateen j osuus portfoliossa.

Mertonin (1973) ICAPM:n varallisuusrajoitteeseen (3.6) on siis lisätty mahdollisuus sijoittaa tulevaan tuotantoon oikeuttaviin vaateisiin. Koska tuotantoprosessiin sijoittamisessa ei voida olettaa lyhytmyynnin mahdollisuutta (negatiiviset osuudet tuotantoprosessissa eivät ole mielekkäitä), painojen a_j arvot on rajoitettava positiiviseksi. Negatiivista kulutusta ei vastaavasti voi pitää realistisena.

Jotta allokaatio-ongelmalle saataisiin mielekäs ja yksikäsitteinen ratkaisu, on vielä tehtävä vaateiden määrää koskeva rajoitus. Määritellään ns. perusjoukko, missä kutakin tuotantoprosessia vastaa äärellinen määrä vaateita. Oletetaan, että kaikki perusjoukon ulkopuoliset vaateet voidaan määritellä perusjoukon vaateiden ja tuotantoprosessien lineaarisena kombinaationa. Vastaava määritelmä sisältyy implisiittisesti myös Blackin ja Scholesin (1973) teoriaan, missä johdannaisinstrumentti voidaan määritellä riskittömän lainauksen ja osakkeen kombinaationa[47].

Joitakin määritelmällisiä ominaisuuksia lukuunottamatta CIR:n optimaalinen portfolio on analoginen Mertonin (1973) johtaman portfolion (3.11) kanssa. Edellä määriteltyjen

---

[47] Käsitteen on yleisessä muodossa ensimmäisenä määritellyt Merton (1977). Perusjoukon käsite mahdollistaa arbitraasin eliminoitumisesta johdetun lineaarisuusehdon soveltamisen.

rajoitteiden vuoksi CIR käyttivät Kuhn-Tuckerin optimointimenetelmää. Periaatteellisesti ratkaisu on kuitenkin hyvin samanlainen (ks. Cox, Ingersoll ja Ross, 1985a, s. 368-370).

Kuten kappaleessa 3.1 todettiin, homogeenisten sijoittajien tapauksessa on helppo olettaa nettolainanannon olevan markkinatasapainossa nolla. Sijoittajilla ei myöskään ole tarvetta sijoittaa vaateisiin, sillä paras mahdollinen ratkaisu voidaan saavuttaa sijoittamalla suoraan tuotantoprosessiin. Kun kaikille tuotantoprosesseille löytyy omistajat, määrittelee optimaalinen ratkaisu vaateiden tasapainohinnat. Voidaan myös sanoa, että tasapainon määrää se hinta, jolla sijoittajalla ei enää ole halua vaademarkkinoille.

Kirjoitetaan optimaalisten portfolio-osuuksien vektori (3.11) seuraavassa muodossa:

$$a* = \frac{WJ_W}{W^2 J_{WW}}\Sigma^{-1}(\alpha - r1) - \sum_{Y_i} \frac{WJ_{WY}}{W^2 J_{WW}}\Sigma^{-1}\Omega. \qquad (3.11')$$

Tehokkaassa markkinatasapainossa kaikki tuotantoprosessit omistetaan, joten niiden kysyntää voidaan merkitä ykkösellä. Siten voidaan johtaa:

$$1 = \frac{WJ_W}{J_{WW}} \cdot \frac{E(dW/W) - r}{varW} - \sum_{Y_i} \frac{WJ_{WY}}{J_{WW}} \cdot \frac{cov(W,Y)}{varW},$$

mistä saadaan riskittömäksi koroksi

$$r = \underset{(a)}{E[\frac{dW}{W}]} - \underset{(b)}{[\frac{-J_{WW}}{J_W}][\frac{varW}{W}]} - \underset{(c)}{\sum_{Y_i}[\frac{-J_{WY}}{J_W}][\frac{cov(W,Y)}{W}]}. \qquad (3.15)$$

Yhtälö (3.15) määrittelee riskittömän koron ja varallisuuden muutoksen välisen suhteen. Homogeenisten sijoittajien taloudessa riskittömäksi tasapainokoroksi muodostuu varallisuuden odotettu tuottoaste (a) sopeutettuna varallisuuden varianssilla (b) sekä varallisuuden odotetun tuoton ja varallisuuden rajahyödyn muutosasteen välisellä kovarianssilla (c)[48]. Mitä parempi varallisuuden odotettu tuottoaste on, sitä kalliimmalla korolla sijoittajat ovat valmiita rahoittamaan tulevaa tuotantoa.

Yhtälön (3.15) termistä (b) nähdään, että riskiaversiivisuuden aste vaikuttaa käänteisesti koron määräytymiseen. Riskiaversion kasvaessa sijoittajan halu sopeuttaa varallisuuden epävarmuutta lisääntyy ja tasapainokorko laskee. Vastaavasti, mikäli sijoittaja on riskineutraali[49] varallisuuden odottamattoman muutoksen suhteen, ei kyseinen riski vaikuta tasapainokoron määräytymiseen.

Yhtälön (3.15) termi (b) kuvastaa sijoittajan suhtautumista optimaalisesti sijoitetun varallisuuden lokaaliseen epävarmuuteen. Jälkimmäiseen termiin (c) vaikuttaa sitä vastoin tilamuuttujien välityksellä varallisuuteen heijastuva teknologinen epävarmuus. Mikäli sijoittaja on riskineutraali varallisuuden muutosten suhteen, sen ei tarvitse merkitä, että hän olisi neutraali tilamuuttujien stokastisten muutosten suhteen. Yhtälön ominaisuuksiin palataan luvussa 4 käsiteltäessä CIR-mallin ja likvidiyspreemioteorioiden välistä suhdetta.

Sijoittamalla optimaaliset portfoliopainot, a_j^*, sekä riskitön korko, r, tavoitefunktion ensimmäisen kertaluvun ehtoihin[50] voidaan johtaa kunkin vaateen odotettu tuotto:

$$(\beta_j - r)F^j = [\phi_W \; \phi_{Y_1} \; .. \; \phi_{Y_k}][F_W^j \; .. \; F_{Y_k}^j]', \tag{3.16}$$

missä

$$\phi_W = [(\frac{-J_{WW}}{J_W})(\mathrm{var}W) + \sum_{Y_i}(\frac{-J_{WY}}{J_W})(\mathrm{cov}W,Y_i)],$$

$$\phi_{Y_i} = [(\frac{-J_{WW}}{J_W})(\mathrm{cov}W,Y_i) + \sum_{Y_k}(\frac{-J_{WY}}{J_W})(\mathrm{cov}Y_i,Y_k)].$$

---

48 Todistuksesta tarkemmin, ks. Cox, Ingersoll Ross (1985a, teoreema 1, s. 373).

49 Riskineutraalisuuden tapauksessa $-J_{WW}/J_W = 0$.

50 CIR (1985a, yhtälö 11e)

Yhtälön (3.16) avulla voidaan laskea odotettu ylimääräinen tuotto niille arvopapereille, joiden hinta määräytyy tilamuuttujien $\{Y_i\}$ funktiona. Yhtälöstä (3.15) voidaan johtaa:

$$\phi_W = E(dW) - r, \tag{3.17}$$

eli sijoittaja vaatii riskipreemio ϕ_W:n verran kompensaatiota syntyneestä epävarmuudesta varallisuuden kehityksessä. Riskipreemio ϕ_{Y_n} määrittelee vastaavasti vaadittavan ylimääräisen tuoton arvopaperille, jonka riski aiheutuu ainoastaan tilamuuttuja Y_n:n synnyttämästä epävarmuudesta. Riskipreemiot $\{\phi\}$ ovat siten yhtäläisiä Rossin (1976) arbitraasihinnoitteluteorian (APT) faktoripreemioiden kanssa. CIR:n mallissa sijoittajien vaatima ylimääräinen tuotto on kompensaatiota (k + 1):stä riskin lähteestä; k:n tilamuuttujan aiheuttamista teknologisista shokeista sekä välillisesti kyseisten shokkien seurauksena varallisuuden odottamattomista muutoksista.

Sijoittajien vaatima riskittömän koron ylittävä tuotto voidaan siten esittää riskipreemioiden lineaarisena kombinaationa. Riskipreemio ikään kuin kääntää rahamitallisiksi kunkin tilamuuttujan aiheuttaman epävarmuuden. Kullakin arvopaperilla on myös oma herkkyytensä F_Y kutakin riskiä kohtaan. Kertomalla riskipreemiot arvopaperien herkkyyksillä yhtälön (3.16) mukaisesti määritellään vaadittava ylimääräinen tuotto.

Yhdistämällä (3.15) ja (3.16) voidaan määritellä edellisen luvun velkakirjojen hinnoitteluyhtälön (2.13) kanssa konsistentti osittaisdifferentiaaliyhtälö. CIR-talouden vaateiden hinnat voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\mathrm{var}W)\frac{\partial^2 F}{\partial W^2} + \sum_i (\mathrm{cov}\ W, Y_i)\frac{\partial^2 F}{\partial W \partial Y_i} \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k (\mathrm{cov}\ Y_i, Y_k)\frac{\partial^2 F}{\partial Y_i \partial Y_k} + [rW - C^*]\frac{\partial F}{\partial W} \\
&+ \sum_i [\mu_i - \phi_{Y_i}]\frac{\partial F}{\partial Y_i} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF + \upsilon = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

missä riskitön korko r on määritelty yhtälössä (3.15) ja riskipreemio ϕ_{Y_i} yhtälössä (3.16)[51].

Yhtälössä (3.18) sopeutetaan siten kunkin tilamuuttujan aiheuttamaa epävarmuutta vähentämällä odotetusta muutoksesta riskipreemio. Yhtälö esittää mikroperusteista johdetussa muodossa saman asian, mihin yhtälöiden (2.13) ja (2.17) avulla pyrittiin. Kun epävarmuutta aiheuttavan prosessin odotetusta muutoksesta vähennetään sijoittajien riskiaversiivisuudesta aiheutuva vaikutus, voidaan hinnoitteluyhtälö esittää *ikään kuin* riskineutraalissa muodossa.

Ross (1976) esitti arbitraasihinnoitteluteorian kehikossa, että arbitraasin ehkäisemiseksi arvopaperien tuottojen pitää määräytyä yhtälön (3.16) kaltaisessa lineaarisessa muodossa. Markkinat antavat kullekin epävarmuuden lähteelle riskin markkinahinnan ϕ mukaisen arvon. Jokaisella arvopaperilla on oma herkkyytensä kunkin riskin suhteen, joten kompensaatioksi kustakin tuottoon kohdistuvasta riskistä sijoittajat haluavat lisätuottona arvopaperin herkkyydellä suhteutetun määrän riskin markkinahintaa. Koska Rossilla ei omassa esityksessään ollut tasapainomallia käytössä, hän ei kuitenkaan pystynyt eksplisiittisesti määrittelemään riskin markkinahintaa.

Matemaattisesti yhtälö (3.18) on ratkaistavissaa samoilla menetelmillä, mitä edellisen luvun ratkaisuissa (2.14) ja (2.18) on käytetty[52].

Yhtälöissä (3.16) ja (3.18) vaateiden hinnoittelu on johdettu yleisessä, Arrow-Debreu -analyysia muistuttavassa kehikossa. Optimaalinen allokaatio, missä sijoittajilla ei enää ole insentiiviä vaateisiin sijoittamiseen, määrittelee tasapainokoron ja vaateiden hinnat. Määrittelemällä vaadittavat rajaehdot, yhtälön (3.18) avulla voidaan hinnoitella kaikkia edellä määritellyn kaltaisia vaateita. Kappaleen 2 velkakirjojen hinnoitteluyhtälöitä voidaan pitää yleisen

---

[51] CIR (1985a, teoreema 3, s. 377).

[52] CIR (1985a, lemma 4, s. 380).

tasapainon hinnoitteluyhtälön erikoistapauksina, missä sijoittajat ovat varallisuuden suhteen neutraaleja ja hinta määräytyy yhden stokastisen muuttujan funktiona.

Samalla on osoitettu, että tasapainoanalyysi on yhdenmukainen arbitraasilähestymistavan kanssa, mikäli riskipreemion muotoa rajoittavat yhtälön (3.16) ehdot ovat voimassa. Määrittelemällä hyötyfunktion sekä tilamuuttujien prosessien parametriset muodot eksplisiittisesti, hinnoitteluyhtälö voidaan asettaa empiirisesti testattavaksi. Seuraavassa luvussa esitetään eräs CIR-mallin erikoistapaus, yhden muuttujan korkorakennemalli. Olettamalla hyötyfunktion olevan logaritmisen, hinnoitteluyhtälö palautuu staattisen kaltaiseen muotoon. Kun lisäksi oletetaan kaiken epävarmuuden heijastuvan yhden muuttujan välityksellä, CIR-malli on kaikesta monimutkaisuudestaan huolimatta saavuttanut testattavissa olevan muodon.

4 COXIN, INGERSOLLIN JA ROSSIN YHDEN MUUTTUJAN KORKORAKENNEMALLI

Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985b) korkorakennemalli on heidän (1985a) kappaleessa 3.3 esitellyn yleisen tasapainon hinnoittelumallinsa erikoistapaus. Siten myös luvun 2 arbitraasirajoitteet ovat edelleen voimassa. Saadakseen hinnoitteluyhtälölle suljetun muodon ratkaisun CIR tekevät vaadittavat lisäoletukset logaritmisesta hyötyfunktiosta sekä kaiken teknologisen epävarmuuden selittävästä yhdestä instrumentaalimuuttujasta.

CIR:n korkorakennemallia on viime vuosina testattu empiirisesti useilla eri markkinoilla[53]. Mallin arvo onkin siinä, että se on ensimmäinen mikroperusteista johdettu arbitraasimalli, joka on ollut testattavissa. Tulokset osoittavat, että yksi muuttuja ei riitä kuvaamaan korkorakenteen dynamiikkaa. Erityisesti inflaatiosta aiheutuva riski jää selitystä vaille.

4.1 Mallin esittely

Hyötyfunktion erikoistapaus

Oletetaan edelleen edustavan sijoittajan talous. Sijoittaja maksimoi aika-additiivista hyötyfunktiota, joka voidaan esittää eksplisiittisessä muodossa

$$U[C(s),s] = e^{-\rho s}\left[\frac{C(s)^{\gamma}-1}{\gamma}\right], \qquad (4.1)$$

missä

$C(s)$ = kulutus hetkellä s.

Muun muassa Hakansson (1970) osoittaa, että yhtälön (4.1)

---

53 Ks. Brown ja Dybvig (1986), Brown ja Schaefer (1988), Gibbons ja Ramaswamy (1986) sekä Stambaugh (1988).

kaltaisen hyötyfunktion tapauksessa edellisessä luvussa esitetty epäsuora hyötyfunktio on separoituva muotoon

$$J(W,Y,t) = f(Y,t)U(W,t) + g(Y,t). \qquad (4.2)$$

Ominaisuuden ansiosta varallisuuden vaikutus eliminoituu kahdessakin mielessä CIR:n (1985b) mallista. Ensiksi, sijoittajan epäsuoran hyötyfunktion relatiivinen riskiaversio on kiinteä. Siten yhtälön (3.11') oikean puolen ensimmäisessä termissä varallisuuden vaikutus eliminoituu. Toiseksi, varallisuuden rajahyödyn joustavuus tilamuuttujien muutokselle ei myöskään ole varallisuuden tasosta riippuvainen. Siitä seuraa, että varallisuus ei vaikuta riskillisen sijoituksen kysyntään myöskään yhtälön (3.11') oikean puolen jälkimmäisen termin kautta.

Hyötyfunktion (4.1) muoto takaa siis, että sijoitusvaihtoehtojen kysyntä ei ole varallisuudesta riippuvainen. Silloin voidaan johtaa, että myöskin yhtälön (3.15) tasapainokorko tai yhtälön (3.16) riskipreemiot ovat varallisuuden tason suhteen neutraaleja.

Kiinteän relatiivisen riskiaversion lisäksi CIR rajoittavat hyötyfunktion muotoa edelleen olettamalla, että parametri $\gamma = 0$. Matemaattisen l'Hospitalin säännön mukaan hyötyfunktio redusoituu silloin logaritmiseen muotoon[54]. Logaritmisen hyötyfunktion tapauksessa taas sijoittajan intertemporaalinen portfolio-ongelma on analoginen yhden periodin tapauksen kanssa. Siten sijoittajien halukkuus suojautua tilamuuttujien muutoksesta aiheutuvalta riskiltä ei vaikuta logaritmisen hyötyfunktion tapauksessa arvopapereiden kysyntään yhtälön (3.11) jälkimmäisen termin mielessä. Sijoittajien käyttäytymistä voidaan silloin pitää myooppisena, pelkästään lokaaliseen varianssi-kovarianssimatriisin riskiin suhtautuvana.

Koska dynaaminen, teknologisista shokeista tilamuuttujien välityksellä aiheutuva epävarmuus karsiutuu sijoitusvaih-

---

[54] Ks. Ingersoll (1987, s. 39 - 40).

toehtojen kysynnästä, se ei homogeenisten sijoittajien maailmassa myöskään vaikuta tasapainokoron tai riskipreemioiden määräytymiseen. Hinnoitteluyhtälö (3.18) voidaan logaritmisen hyötyfunktion erikoistapauksessa esittää muodossa

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i}\sum_{k}\rho_{ij} g_i g_j \frac{\partial^2 F}{\partial Y_i \partial Y_j} + \sum_{i}[\mu_i(Y,t) - \lambda_i(Y,t)]\frac{\partial F}{\partial Y_i}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial t} + \delta - rF = 0. \qquad (4.3)$$

Teknologian erikoistapaus

Korkorakennemallissaan Cox, Ingersoll ja Ross (1985b) tekevät lisäksi joitakin teknologiaan liittyviä lisärajoituksia. Teknologisten shokkien välittyminen hintoihin tapahtuu usean tilamuuttujan sijasta yhden muuttujan välityksellä. Lisäksi oletetaan, että välittömän nykykoron prosessi korreloi täydellisesti ainoan tilamuuttujan kanssa, jolloin kyseistä korkoa voidaan pitää kaiken epävarmuuden instrumentaalimuuttujana. Välitön nykykorko seuraa mean reversion -prosessia, joka voidaan esittää seuraavassa muodossa:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz, \qquad (4.4)$$

missä

$r(t)$ = korko hetkellä t,
κ = sopeutumiskerroin,
θ = pitkän aikavälin keskiarvokorko,
$\sigma^2 r$ = koron varianssi (σ = vakio).

Logaritmisen hyötyfunktion ja täydellisen korrelaation vuoksi korko on tilamuuttujan deterministinen funktio. Siten korkoa merkittäessä voidaan tilamuuttuja Y jättää suluista pois.

Korkoprosessin (4.4) ominaisuuksista mainittakoon pitkän aikavälin negatiivinen autokorreloituneisuus eli koron taipumus palata kohti historiallista keskiarvotasoa. Parametrin κ sopeutumiskerroin kuvastaa taipumuksen voimakkuutta. Mitä suurempi κ, sitä herkemmin korko palautuu keskiarvotasolleen.

Toinen prosessiin (4.4) implisiittisesti sisältyvä ominaisuus on negatiivisten korkojen eliminoituminen. Prosessin ollessa jatkuva koron on käytävä nollassa tullakseen negatiiviseksi. Parametrien κ, θ ja σ arvoista riippuu, voiko korko saavuttaa nollan[55]. Kuitenkin havaitaan, että varianssi pienenee korkotason mukana ja häviää kokonaan koron saavuttaessa nollan. Jos korko on alunperin ollut nollaa suurempi, myös historiallinen keskiarvo on silloin positiivinen. Mean reversion -ominaisuuden ansiosta odotetulla muutoksella on silloin taipumus palata kohti keskiarvoaan, joten mahdollisuus negatiivisiin korkoihin eliminoituu.

Vaikutukset hinnoitteluyhtälöön

Cox, Ingersoll ja Ross (1985b) sovelsivat kappaleessa 3.3 esiteltyä analyysiaan edellä mainittujen hyötyfunktiota ja teknologiaa koskevien lisärajoitusten vallitessa korkorakenteen määräytymiseen ja edelleen velkakirjojen hinnoitteluun. Oletetaan aikaisemmin esitetyn vaateen, $F^j(Y,t,T)$ olevan nollakuponkilaina, joka takaa velkakirjan haltijalle kaikissa mahdollisissa maailmantiloissa sovittuna erääntymishetkenä tietyn nimellispääoman.

Kuten luvussa 2 todettiin, ovat pitkät korot yhden muuttujan mallissa lyhyiden korkojen lineaarinen funktio ainoastaan, jos välittömän nykykoron varianssi on nykykoron lineaarinen funktio. Yhtälöstä (4.4) voidaan todeta, että CIR:n korkorakennemallissa ehto toteutuu. Siten myös riskipreemio $\lambda(r,t)$ on koron lineaarinen funktio. Koska velkakirjalla ei ollut kuponkivirtaa, eliminoituu myös δ pois, jolloin hinnoitteluyhtälöksi tulee

---

55 Parametrien on täytettävä ehto $\sigma^2 > 2\kappa\theta$ (Cox, Ingersoll ja Ross, 1985b, s. 391).

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \hat{\lambda} r]\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0, \qquad (4.5)$$

missä

$\hat{\lambda} r = \lambda(r,t)$ = koron muutoksen kovarianssi optimaalisesti sijoitetun varallisuuden (markkinaportfolion) prosenttimuutoksen kanssa.

Logaritmisen hyötyfunktion ansiosta varallisuuden ja teknologisten shokkien vaikutukset arvopaperien kysyntään eliminoituvat hinnoitteluyhtälöstä. Koska kaikki epävarmuus heijastuu täydellisesti lyhyen koron prosessin välityksellä, voidaan yhtälössä (3.16) määritelty riskipreemio, ϕ_r, esittää seuraavassa muodossa:

$$\phi_r = \mathrm{cov}(W,r) \quad (= \hat{\lambda} r).$$

Sijoittajan vaatima riskipreemio on siten kompensaatiota välittömän nykykoron odottamattomien muutosten aiheuttamasta epävarmuudesta markkinaportfoliossa. Preemio ei ole preferensseistä riippuvainen.

Cox, Ingersoll ja Ross ovat löytäneet riskisopeutetulle osittaisdifferentiaaliyhtälölle (4.5) suljetun muodon yksikäsitteisen ratkaisun, kun rajoitteena pidetään velkakirjan hintaa erääntymishetkellä, $P(r,T,T) = 1$. Velkakirjan hinnaksi tulee

$$P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}, \qquad (4.6)$$

missä

$$A(t,T) \equiv \left[\frac{2\gamma e^{[(\kappa+\lambda+\gamma)(T-t)]/2}}{(\gamma + \kappa + \hat{\lambda})(e^{\gamma(T-t)}-1) + 2\gamma}\right]^{2\kappa\theta/\sigma^2},$$

$$B(t,T) \equiv \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma + \kappa + \hat{\lambda})(e^{\gamma(T-t)}-1) + 2\gamma},$$

$$\gamma = [(\kappa + \hat{\lambda})^2 + 2\sigma^2]^{1/2}.$$

Velkakirjan hinta (4.5) perustuu siis kappaleessa 3.3 esitetyn riskisopeutetun hinnoitteluyhtälön erikoistapaukselle. Hinta voidaan esittää ajan, välittömän nykykoron sekä estimoitujen parametrien κ, $\hat{\lambda}$, θ ja σ^2 funktiona. Logaritmisen hyötyfunktion vuoksi velkakirjan hinnan (tai diskontattaessa käytettävän korkorakenteen) määräytymiseen ei vaikuta varallisuuden taso tai jakautuminen eikä sijoittajien mahdollinen halu suojautua teknologisten shokkien aiheuttamilta muutoksilta varianssi-kovarianssimatriisissa. Hinnoitteluyhtälö ottaa myös huomioon korkojen taipumuksen palata keskiarvotasolleen sekä volatiliteetin vaihtelut maturiteetin mukana.

Tarkastellaan seuraavaksi CIR:n korkorakennemallin joitakin komparatiivis-staattisia tuloksia[56].

(1) Velkakirjan korkoriski

Velkakirjan hinta on välittömän nykykoron suhteen vähenevä konveksi funktio. Vaikutuksen ymmärtää paremmin tarkastelemalla välittömän nykykoron vaikutusta sisäiseen tuottoon. Velkakirjan tuotto on välittömän nykykoron suhteen kasvava konkaavi funktio. Kuitenkin vaikutus on suurin lyhyemmissä maturiteeteissa. Lähestyttäessä asymptoottisesti ääretöntä maturiteettia välittömän nykykoron muutosten vaikutus häviää olemattomaksi. Kuitenkaan missään maturiteetissa vaikutus tuottoon ei ole negatiivinen, joten hinnan ja tuoton välisen määritelmän mukaisesti velkakirjan hinta reagoi käänteisesti välittömän nykykoron muutoksiin.

(2) Maturiteetin vaikutus

Velkakirjan eliniän kasvaessa sen hinta lähestyy konveksisesti nollaa. Mitä kauempaa nimellispääoma diskontataan nykyhetkeen, sitä alhaisempi sen arvo on. Ainoa vaadittava ehto on negatiivisten korkojen poissulkeminen, mikä tuli jo todistettua.

---

[56] Alunperin tulokset on esitetty CIR:n artikkelissa (1985b, s. 393-5).

Pääoman diskonttauksessa käytettävä sisäinen korkokanta lähestyy välitöntä nykykorkoa eliniän vähetessä. Korkojen välinen lineaarinen yhteys selittää ominaisuuden. Eliniän kasvaessa tuottokanta lähestyy asymptoottisesti tasoa

$$R(r,t,\infty) = \frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \lambda}.$$

Siten pitkä korko on kiinteä ja välittömästä nykykorosta riippumaton.

(3) Mean reversion -vaikutus

Velkakirjan hinta on korkoprosessin (4.4) sopeutumiskertoimen κ suhteen konkaavisti kasvava funktio, mikäli välitön nykykorko on historiallisen keskiarvon yläpuolella. Mitä suurempi sopeutumiskertoimen arvo, sitä nopeammin korko laskee keskiarvotasolleen (ja lineaarisen vaikutuksen seurauksena myös pitemmät korot) ja sitä enemmän velkakirjan hinta nousee. Vaikutus on käänteinen, mikäli välitön nykykorko on historiallisen keskiarvon alapuolella.

Historiallinen keskiarvo θ vaikuttaa käänteisesti velkakirjan hintaan vastaavasti kuin välitön nykykorko. Välittömän nykykoron vaikutus oli kuitenkin suurin lyhyisiin korkoihin. Parametrin θ ollessa vakio sen vaikutus on suurin pitkissä koroissa. Mitä korkeampi θ, sitä varmemmin välitön nykykorkokin on tulevaisuudessa korkeammalla tasolla. Mikäli θ:n oletetaan olevan ajasta riippuvainen liikkuva keskiarvo, se on sidoksissa välittömään nykykorkoon ja vaikutus pitkiin korkoihin heikkenee.

(4) Varianssin vaikutus

Välittömän nykykoron prosessin (4.4) varianssitermin vakion σ^2 vaikutus hintaan on positiivinen. Sijoittaja arvostaa varmaa tulovirtaa tulevaisuudessa enemmän, jos epävarmuus lisääntyy. Sen vuoksi hän vaatii alhaisemman tuoton, joten velkakirjan hinta nousee.

Koska prosessin varianssitermi ja riskipreemio λ ovat lineaarisessa suhteessa keskenään, aiheuttaa epävarmuuden kasvu myös riskin markkina-arvon nousun.

(5) Korkorakenteen muodon rajoitukset

Yhtälön (4.6) parametrien arvoista riippuu, millä todennäköisyydellä eri pituiset korot saavuttavat kunkin tason. Hinnoitteluyhtälön analyyttinen muoto asettaa korkorakenteelle kuitenkin yleiset rajoitukset.

Kuten edellä jo mainittiin maturiteetin pidentyessä korko lähestyy tiettyä kiinteätä tasoa. Stokastisen prosessin (4.4) parametrit määrittelevät välittömän nykykoron vaihteluvälin. Ääripäiden välillä eri pituisten korkojen vaihteluvälit kapenevat velkakirjan eliniän kasvaessa kohti pitkän koron kiinteää tasoa. Korkorakenteen muoto voi olla nouseva, laskeva tai kupera. Muoto määräytyy seuraavista ehdoista:

$$r < \frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \lambda} \Rightarrow \text{nouseva korkorakenne,}$$

$$\frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \lambda} < r < \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} \Rightarrow \text{kupera korkorakenne,}$$

$$r > \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} \Rightarrow \text{laskeva korkorakenne.}$$

Kun CIR-mallin implikaatioita on verrattu korkorakenteen todellisiin liikkeisiin, on todettu, että yksi muuttuja ei pysty selittämään koko dynamiikkaa. Esimerkiksi Stambaugh (1988) on tuoreen ekonometrisen menetelmän avulla osoittanut, että selittääkseen Yhdysvaltain treasury bill -markkinoiden korkorakenteen vaihteluita CIR-mallin pitäisi olla kahden tai kolmen muuttujan malli. Erityisen vaikeaa CIR-mallille on ollut selittää korkorakenteen pitkän pään vaihteluita (Gibbons ja Ramaswamy, 1988). Kuten komparatiivisstaattisen tarkastelun yhteydessä todettiin, maturiteetin kasvaessa nykykoron muutosten vaikutus häviää mallissa olemattomaksi. Siten mallin implikoimaa suurempi todellisuudessa havaittava pitkien korkojen volatiliteetti johtaa systemaattiseen hinnoitteluvirheeseen. Koska indeksisidonnaisten velkakirjojen tapauksessa vääristymää ei synny (Brown ja Schaefer, 1988), hintavirhe voidaan tulkita selittämättä jääneeksi inflaatioriskiksi.

Vaihtoehtoisissa hinnoittelumalleissa korkorakenteen muotojen kirjoa on pyritty lisäämään liittämällä toinen muuttuja analyysiin. Kuten luvussa 2 todettiin, suljetun muodon ratkaisun löytäminen tulee silloin huomattavasti hankalammaksi. Lisääntyneiden teknisten ongelmien vastineeksi kahden muuttujan malli tosin mahdollistaa esimerkiksi pitkien korkojen volatiliteetin selittämisen.

Haasteen uusien muuttujien valinnalle ovat esittäneet Litterman ja Scheinkman (1988) sekä Knez, Litterman ja Scheinkman (1989), jotka ovat faktorianalyysin avulla määritellet kolme muuttujaa, jotka selittävät jopa yli 90% raha- ja velkakirjamarkkinoiden tuotoista. Muuttujat kuvaavat korkorakenteen taso-, jyrkkyys- ja kuperuusmuutoksia. Rahamarkkinoilla kuperuusmuuttujan sijasta selitysvoimaa oli valtion takaamien ja kaupallisten sijoitustodistusten erotusta kuvaavalla muuttujalla.

Faktorianalyysiin perustuvan menetelmän pohjana on ollut Rossin (1976 ja 1977) arbitraasihinnoitteluteoriaan (APT) perustuva malli. Ajatus on sama kuin CIR-mallissa: äärellinen määrä muuttujia synnyttää kaiken epävarmuuden ja kompensaatioksi otetusta riskistä sijoittajat haluavat lisäpreemion. Lähtökohdissa ainoastaan on eroa. CIR-mallissa määritellään teoreettinen kehikko, joka määrää korkorakenteen muodon. Kaikki epävarmuus aiheutuu etukäteen määritellyistä muuttujista ja riskipreemiot kuvaavat kyseisten muuttujien riskiä velkakirjan tuotolle. Faktorimallissa sitä vastoin ei oleteta muuta kuin riskin ja tuoton välinen lineaarinen suhde Rossin APT:n hengessä. Faktorianalyysin avulla pyritään löytämään, mitkä tekijät ovat historiallisesti vaikuttaneet riskin ja siten myös lisätuottojen syntymiseen.

Muuttujien realistisuuden lisäksi myös CIR-mallin lähtökohtia voidaan kritisoida. Jotta mallia voitaisiin käyttää korkorakenteen dynamiikan selittämiseen, parametrit on ensin valittava siten, että korkorakenteen nykyinen muoto tulee selitetyksi. Oletus, että koko korkorakenteen dynamiikka perustuu ainoastaan yhdelle tai kahdelle muuttujalle on silloin hyvin rajoittava. Osittaisdifferentiaaliyhtälölle saadaan ratkaisu ainoastaan tiukkojen prosessien parametrejä sekä sijoittajien preferenssejä kuvaavien rajoitusten vallitessa. Seurauksena korkorakenteen muotojen vaihtelut jäävät vähäisiksi.

Lieventämällä joitakin CIR-mallin rajoituksia korkorakenteen dynamiikkaan saadan paljon rikkaampia muotoja. Heath, Jarrow ja Morton (1989) ovat osoittaneet, että olettamalla nykyinen korkorakenne annetuksi ja asettamalla riskipreemion muodolle vähemmän rajoituksia saavutetaan huomattavasti vaihtelevampi korkorakenne. Arbitraasiehdoista johdettu HJM-malli on kuitenkin laadittu palvelemaan johdannaisinstrumenttien hinnoittelua. Brenner (1989) toteaa sen olevan yhtenäinen CIR-mallin kanssa ja käyttökelpoinen myös velkakirjojen hinnoittelussa, mikäli sijottajien preferenssit määriteltäisiin erikseen. Preferenssien määrittely aiheuttaisi kuitenkin riskipreemiolle ja sitä kautta korkorakenteelle lisärajoituksia. Tulevan tutkimuksen vastattavaksi jääkin, johtaako Heathin, Jarrown ja Mortonin valitsema tie yhtä rajoitettuun korkorakenneyhtälöön kuin CIR-malli.

4.2 Yhteys perinteisiin korkorakennehypoteeseihin

Tarkastellaan seuraavaksi Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985b) hinnoittelumallin suhdetta korkorakenteen traditionaalisiin hypoteeseihin. Kuten luvussa 1 mainittiin, traditionaalisina voidaan pitää kiinteän riskipreemion olettavia teorioita. CIR-malli voisi tosin tarjota teoreettisen selityksen myös ajan suhteen vaihteleville riskipreemioille. Faman ja Frenchin (1989) ym. mukaan riskipreemioiden koko on riippuvainen taloudellisista olosuhteista, kuten kokonaiskulutuksesta ja -varallisuudesta. Mikäli yhtälön

(4.1) sijasta oletettaisiin varallisuuden vaikuttavan riskiaversiivisuuteen, vaihtelisi preemion kokokin kulutuksen ja varallisuuden muutosten mukana.

CIR-mallissa ei myöskään analysoida rahan kysynnän vaikutuksia likvidiyspreemioon. Kysymyksessä on yhden hyödykkeen malli, jossa kyseinen kulutushyödyke on ainoa arvon yksikkö (numeraire). Cox, Ingersoll ja Ross (1985b) esittelevät myös vaihtoehdon, jossa stokastisesti kehittyvä inflaatio on välittömän nykykoron ohella toinen tilamuuttuja. He olettavat kuitenkin rahan olevan neutraalia eli ilman todellista vaikutusta reaalitalouteen.

Edellisessä kappaleessa esitettyyn CIR-mallin kritiikkiin nojaten oletusta rahan neutraalisuudesta ei voi pitää oikeutettuna. Koska CIR-mallin kykenemättömyys selittää inflaatioriskiä aiheuttaa systemaattisen virheen velkakirjojen hinnoittelussa, rahan todelliset reaalitaloudelliset vaikutukset olisi jotenkin liitettävä analyysiin. Singleton (1988) on yhtenä vaihtoehtona esittänyt *cash in advance*-rajoitteen, missä rahan kysynnällä on vaikutuksia reaalituotantoon ja sitä kautta edelleen korkorakenteeseen.

Koska CIR-malli perustuu edustavan sijoittajan käsitteelle, ei heterogeenisista tarpeista syntyvien preemioiden tarkastelu ole mahdollista. Myöskään markkinoiden epätäydellisyydestä syntyviä vaikutuksia ei analysoida. Siten markkinasegmentaatioteorian ja rahoitusvirtamallien traditioon liittyvät ominaisuudet jäävät CIR-mallin ulkopuolelle.

Stiglitz (1970) osoitti, että epävarmuuden sisältyessä analyysiin riskineutraalisuutta ei voi pitää käypänä taustaoletuksena puhtaalle odotushypoteesille (jossa riskipreemio on nolla). Odotusarvon käsitteeseen perustuvan Jensenin epäyhtälön avulla Stiglitz todisti, että riskineutraalisuus johtaa eri tuloksiin varmuuden ja epävarmuuden vallitessa. LeRoy (1982b) sekä Cox, Ingersoll ja Ross (1981) ovat myöhemmin osoittaneet, että tasapainomallissa riskineutraalisuus voi olla lähtökohta puhtaalle odotushypoteesille ainoastaan äärimmäisen rajoittavissa olosuhteissa.

CIR-mallin ja puhtaan odotushypoteesin yhteyttä voidaan tarkastella liittämällä yhtälön (3.16) mukaiset riskipreemiot arbitraasiyhtälöön (2.12). Oletetaan edelleen, että yhtälön (4.1) mukainen ehto kiinteästä relatiivisesta riskiaversiivisuudesta on voimassa. Velkakirjan odotetuksi tuotoksi muodostuu

$$\alpha_j(Y,t,T) = r(Y,t) + \sum_i \phi_{Y_i} \frac{\partial P^j}{\partial Y_i} \cdot \frac{1}{P}, \tag{4.7}$$

missä

$$\phi_{Y_i} = [(\frac{-J_{WW}}{J_W})(\text{cov } W,Y_i) + \sum_{Y_k} (\frac{-J_{WY}}{J_W})(\text{cov } Y_i, Y_k)].$$

Kiinteän relatiivisen riskiaversion vuoksi varallisuuden määrä ei vaikuta sijoittajan riskihalukkuuteen, joten preemio ϕ_W putoaa pois. Cox, Ingersoll ja Ross (1981) kutsuivat *lokaaliseksi odotushypoteesiksi* tapausta, missä yhtälön (4.7) mukainen riskipreemio eliminoituu. Silloin kaikkien velkakirjojen odotetut lokaaliset, välittömästi toteutuvat tuotot ovat välittömän nykykoron suuruisia. Edellisessä kappaleessa esitetyssä logaritmisen hyötyfunktion erikoistapauksessa (γ = 0) lokaalinen odotushypoteesi toteutuu ainoastaan, mikäli varallisuuden ja koron muutosten välillä ei ole lainkaan korrelaatiota. Mikäli korrelaatiota esiintyy, ϕ_r = cov(W,r) $\neq$ 0, jolloin riskillä on markkinahinta.

Preferred habitat -teorian mukaan sijoittaja haluaa mahdollisimman varman tulovirran tiettynä hetkenä tulevaisuudessa. Saadakseen sen hän valitsee maturiteetin, joka eliminoi hinta- ja jälleensijoitusriskit. Kuitenkin intertemporaaliseen sijoitukseen liittyy lokaalin markkinariskin lisäksi tilamuuttujien odottamattomista muutoksista aiheutuvaa epävarmuutta. Logaritmisen hyötyfunktion tapauksessa sijoittaja suhtautui neutraalisti intertemporaaliseen riskiin. Hän oli aversiivinen ainoastaan systemaattiselle markkinariskille.

Mikäli oletetaan edelleen yhtälön (4.1) tyyppinen hyötyfunktio, mutta ei-logaritminen ($\gamma \neq$ 0), suhtautuminen intertemporaaliseen riskiin muuttuu. Kun $\gamma < 0$, sijoittaja on riskiaversiivinen myös tilamuuttujien riskin suhteen. Siten hän haluaa sijoittaa mieluummin riskittömään velkakirjaan, joka on hänen tavoitematuriteettinsa pituinen. Vastineeksi hinta- tai jälleensijoitusriskistä hän vaatii tuotolleen positiivisen preemion. Kun taas $0 < \gamma < 1$, sijoittaja on edelleen globaalisti riskiaversiivinen, mutta intertemporaalisen epävarmuuden suhteen riskinrakastaja. Silloin hän preferoi tilamuuttujien muutokseen liittyvää riskiä ja valitsee esimerkiksi hintariskin turvallisuuden sijasta. Edellytyksenä luonnollisesti on, että riskinottohalukkuus tilamuuttujien suhteen on suurempaa kuin suojautumishalukkuus lokaalisen markkinariskin suhteen.

Yhteenvetona voidaan sanoa, että tarkasteltaessa CIR-mallin kehikossa perinteisiä korkorakennehypoteeseja moni asia riippuu hyötyfunktion muodosta. Kun rajoitutaan pelkkään riskiaversiivisuuteen, CIR-malli voi ainoastaan periaatteessa tarjota selityksen sekä puhtaalle odotushypoteesille että likvidiyspreemio- ja preferred habitat -teorioille. Yhtälön (4.1) mukaisen kiinteän relatiivisen riskiaversiivisuuden tapauksessa puhdas odotushypoteesi vaatii hyvin epärealistiset lisäoletukset. Myös likvidiyspreemioteoria vaatii lisäoletuksia, jos sijoittajien halu likvidiyteen perustuu muillekin syille kuin pelkästään mahdollisimman lyhyelle sijoitushorisontille. Sitä vastoin preferred habitat -teorian tyyppisiä hinta- ja jälleensijoitusriskejä CIR-mallin puitteissa voidaan tarkastella säätelemällä hyötyfunktion (4.1) parametrejä.

5 TASAPAINOMALLIN KÄYTTÖ RISKINHALLINNASSA

CIR-mallilla on lukuisia sovellusmahdollisuuksia velkakirjojen riskinhallinnassa. Seuraavaksi tarkastellaan kahta implikaatiota: suhdetta duraatioanalyysiin sekä tuottojen ennustamista.

5.1 Duraatiokritiikki

Duraatioanalyysissa velkakirjan riskin oletetaan aiheutuvan korkorakenteessa tapahtuvista odottamattomista muutoksista[57]. Hicks (1939) määritteli modifioidun duraation käsitteen velkakirjan joustoksi sisäisen korkokannan muutoksille:

$$\frac{dP}{P} = -D_{mod} \cdot dy, \qquad (5.1)$$

missä

D_{mod} = modifioitu duraatio,
dy = sisäisen korkokannan odottamaton muutos.

Rahoitusteoreettisessa kirjallisuudessa duraation käsitteeseen ollaan liitetty ainakin kolme ominaisuutta, joiden ansiosta se on vaillinainen riskin mittari tasapainoanalyysissa[58]:

1) Duraatioanalyysissa oletetaan shokkien vaikuttavan korkorakenteeseen paraalelleina muutoksina. Eri pituisten korkojen pitäisi olla yhtä volatiileja ja keskenään täydellisesti korreloituneita,

---

[57] Duraatioanalyysista yleensä, ks. Bierwag, Kaufman ja Toevs (1983) sekä Ilmanen (1989).

[58] Ilmanen (1989).

2) Duraatioanalyysiin nojaava immunisaatiostrategia[59] rikkoo pääomamarkkinoiden arbitraasiehdon. Immunisoidun portfolion pitäisi tuottaa vähintään sijoitushorisontin mittaisen nollakuponkilainan tuoton. Siten tekemällä lyhyt positio nollakuponkilainaan ja ostamalla portfolion syntyy arbitraasimahdollisuus,

3) Konveksisuusominaisuuden[60] vuoksi duraatio on hyvä volatiilisuuden mittari ainoastaan pienille shokeille.

Ingersoll, Skelton ja Weil (1978) tarkastelivat duraatioanalyysin suhdetta arbitraasimalleihin yhtälön (2.12) valossa:

$$\alpha_j(Y,t,T) = r(Y,t) + \sum_i \lambda_i(Y,t)\frac{\partial P^j}{\partial Y_i}\cdot\frac{1}{P}. \tag{2.12}$$

Mikäli velkakirjan odotettu tuotto on riskitöntä tuottoa korkeampi, ylimääräinen osuus on kompensaatiota otetusta riskistä. Kaikki riski on peräisin korkorakenteeseen vaikuttavista stokastisista muuttujista. Kullakin velkakirjalla on yksilökohtainen herkkyytensä kunkin riskin lähteen kanssa. Arbitraasimahdollisuuksien eliminoitumiseksi APT-mallin hengessä riskin ja tuoton välillä on lineaarinen riippuvuussuhde.

Duraatioanalyysissa korkorakenteen muutokset ovat paralleeleja. Tasapainomallissa, missä välitön nykykorko on ainoa stokastinen muuttuja, volatiliteetti on suurinta lyhyissä koroissa. Maturiteetin kasvaessa nollakuponkilainan sisäisen koron varianssi pienenee. Mikäli tasapainomalliin liitetään toinen muuttuja kuten pitkä korko, korkorakenteen odottamattomat muutokset eivät enää ole täydellisesti

---

[59] Immunisaatiostrategiassa riski eliminoidaan täsmäämällä taseen velat ja saatavat siten, että molempien nykyarvo on joka hetki yhtä suuri.

[60] Yhtälön (5.1) lineaarinen yhteys pätee ainoastaan approksimatiivisesti pienille koron muutoksille. Todellisuudessa velkakirjan hinta on sisäisen korkotason konveksi funktio.

korreloituneitakaan. Siten lisäämällä muuttujia saadaan rikkaampi valikoima erilaisia korkorakenteen muutoksia.

Velkakirjan herkkyyttä odottamattomille shokeille voidaan tarkastella yhden muuttujan mallin avulla. Muuttujien lukumäärän lisääntyessä määritellään velkakirjan herkkyys vastaavasti uusille riskeille. Yhteismitallisia riskit eivät kuitenkaan ole, joten niiden aggregointi yhdeksi riskimittariksi ei ole mahdollista. Tosin riskin markkinahinnan käsitteen avulla voidaan laskea kunkin epävarmuuden lähteen ansiosta aiheutuva lisätuoton vaatimus kullekin velkakirjalle. Yhden muuttujan mallissa velkakirjan j herkkyys stokastisen prosessin Y_i riskille määräytyy muokkaamalla yhtälöä (2.8.2):

$$\delta_{ij}(Y,t,T) = g_i(Y,t)\frac{\partial P^j}{\partial Y_i}\cdot\frac{1}{P}. \qquad (2.8.2')$$

Yhden muuttujan korkorakennemalleissa kaiken epävarmuuden oletetaan välittyvän lyhyen koron kautta. Vaikka välitöntä nykykorkoa ohjaava prosessi tunnettaisiinkin, velkakirjan herkkyyksien määrittelemiseksi tarvitaan ensin hinnan määrittelevän osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisu. Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985b) suljetun muodon ratkaisu määräytyi yhtälöstä (4.6)

$$P(r,t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r},$$

milloin velkakirjan herkkyydeksi lyhyen koron riskille määräytyy yhtälön (2.8.2) mukaisesti

$$\delta(r,t,T) = -B(t,T)\sigma\sqrt{r}. \qquad (5.2)$$

Siten velkakirjan riski on nykykoron hajonnan lineaarinen funktio, joka pienenee maturiteetin kasvaessa.

Cox, Ingersoll ja Ross (1979) ovat myös esitelleet tasapainomallinsa kanssa yhdenmukaisen duraatiokäsitteen, ns. stokastisen duraation. Stokastinen duraatio määrittelee kuponkeja sisältävän velkakirjan absoluuttisen riskipitoisuuden suhteessa nollakuponkilainaan. Kuponkivelkakirjan kullakin kupongilla on oma herkkyytensä stokastisen muuttujan riskille. Kokonaisriski on siten suurempi kuin vastaavanpituisella nollakuponkilainalla. Ratkaisemalla stokastinen duraatio tiedetään kuinka pitkällä nollakuponkilainalla on sama määrä riskiä kuin kuponkivelkakirjalla.

Määritellään kuponkivelkakirja useiden nollakuponkilainojen lineaarisena kombinaationa:

$$Q(r,t,T) = \sum_{s=t}^{T} P(r,t,s) \cdot C(s), \tag{5.3}$$

missä

$Q(r,t,T)$ = hetkenä T erääntyvä kuponkivelkakirja,
$P(r,t,T)$ = hetkenä T erääntyvä nollakuponkilaina,
$C(t)$ = kuponkiprosentti.

Kuponkiprosentti on esimerkiksi {6%, 6%, ..., 6%, 106%}, kun s = t, t+1, ..., T. Viimeinen maksuvirta sisältää nimellispääoman.

Kuponkivelkakirjan ja nollakuponkilainan välistä stokastisen riskiherkkyyden suhdetta mitataan stokastisella duraatiolla:

$$D_{stok} = \frac{Q_r/Q}{P_r/P} = \frac{\Sigma P_r \cdot C/\Sigma P \cdot C}{P_r/P}, \tag{5.4}$$

missä

D_{stok} = stokastinen duraatio.

Sijoittamalla CIR-mallin hinnoitteluyhtälön (4.6) parametrit stokastisen duraation kaavaan, se voidaan esittää seuraavassa muodossa:

$$D_{stok} = \frac{\Sigma B(t,s)C(s)P(r,t,s)/\Sigma P(t,s)C(s)}{B(t,T)}. \tag{5.5}$$

Tunnettaessa hinnoitteluyhtälön parametrit tiedetään kuponkivelkakirjan sisältämän kokonaisriskin määrä suhteessa nollakuponkilainaan. Siten voidaan myös ratkaista, minkä pituisella nollakuponkilainalla olisi sama riski kuin kuponkilainalla. Immunisaatiostrategian ajatusta voidaan silloin soveltaa täsmäämällä velkojen ja saatavien riskit. Useamman muuttujan malleissa stokastista duraatiota vastaavia riskimittareita on luonnollisesti useampia.

Stokastisen duraation käyttökelpoisuuteen velkakirjojen riskin mittauksessa liittyy useita ongelmia. Jotta duraation arvo selviäisi, vaaditaan tarkka käsitys velkakirjan hintaan vaikuttavista stokastisista prosesseista ja niiden parametreistä. Lisäksi velkakirjan hinnan määräävä osittaisdifferentiaaliyhtälö pitää olla ratkaistu. Mitä hankalampia prosesseja käytetään, sitä ongelmallisempaa ratkaisun löytäminen on. Lisäksi jokaiselle eri prosessille tarvitaan oma 'duraationsa'.

Gultekin ja Rogalski (1984) tarkastelivat empiirisesti useiden erilaisten duraatiovaihtoehtojen käyttökelpoisuutta velkakirjojen riskillisyyttä mitattaessa. Stokastinen duraatio ei osoittautunut olennaisesti muita duraatioita paremmaksi. Mahdollisiksi syiksi mainittiin hinnoitteluyhtälön parametrien estimointiin liittyvät ongelmat, väärin spesifioitu korkoprosessi sekä puutteelliset tilastolliset menetelmät.

Muuttamalla korkorakenteen mallittamiseen liittyviä lähtöoletuksia riskin mittaaminen muuttuu merkittävästi. Tarkastellaan kappaleen lopuksi menettelyjärjestystä arbitraasimallien hinnoitteluyhtälön ratkaisemiseksi. Arbitraasimalleissa, kuten CIR:ssä, oletetaan koko korkorakenteen dynamiikan riippuvan äärellisestä määrästä (yleensä yhdestä tai kahdesta) tilamuuttujia. Jotta arbitraasimahdollisuudet eliminoituisivat, riskin ja ylimääräisen tuoton välillä on lineaarinen yhteys. Lisäksi sijoittajien preferenssit rajoittavat riskipreemion muotoa.

Hullin (1989, s. 265) esittämän etenemisjärjestyksen mukaan hinnoitteluyhtälön parametrien arvoja sopeutetaan niin kauan, kunnes ollaan löydetty paras mahdollinen ratkaisu.

Mikään ei kuitenkaan estä todellisen korkorakenteen muotoa eroamasta välittömästi hinnoittelumallin avulla johdetusta. Syynä voi olla rajoitukset stokastisten prosessien muodossa, niiden määrässä tai riskipreemioiden muodossa.

Heath, Jarrow ja Morton (HJM) (1989) ovat välttäneet lukuisat korkorakenteen muodostumista koskevat rajoitukset korkosidonnaisten optioiden hinnoittelumallissaan. Mallin tarkoitus on alunperin ollut hinnoitella stokastisen koron tapauksessa optiot riskineutraalisti vastaavasti kuin Black-Scholes-malli. HJM olettavat alkuperäisen korkorakenteen annetuksi, eivätkä tee sen muotoa koskevia rajoituksia. Myöskään riskin markkinahintaa ei sidota preferensseihin. Korkorakennetta ohjaa HJM-mallissa äärellinen määrä termiinikorkojen stokastisia muuttujia, joiden prosessien ei tarvitse optioita hinnoiteltaessa olla preferenssien rajoittamia.

HJM-mallin riskineutraali hinnoittelutekniikka soveltuu ainoastaan korkosidonnaisten optioiden hinnoitteluun. Mikäli mallia sovellettaisiin velkakirjojen hinnoitteluun, pitäisi sijoittajien preferenssit määritellä arbitraasimallin tavoin. Brenner (1989) osoittaa kuitenkin, että HJM-mallin lähtöoletuksilla duraatiomittarit voidaan määritellä ilman osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisua. Määrittelemällä termiinikorkoprosessin analogiseksi arbitraasimallien nykykorkoprosessien kanssa, voidaan esimerkiksi stokastinen duraatio ratkaista suoraan termiinikoron stokastisesta komponentista.

5.2 Velkakirjojen tuottojen ennustaminen

Seuraavaksi tarkastellaan Faman (1988) motivoimana, miten Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a ja 1985b) mallin avulla voidaan selittää viime vuosina empiirisessä töissä havaittuja ajassa vaihtelevia riskipreemioita. Monissa viimeaikaisissa tutkimuksissa riskipreemioiden vaihtelun on todettu olevan seurausta mean reversion -ominaisuudesta[61]. Ominaisuuden mukaan korot sekä osakkeiden hinnat ovat pitemmällä aikavälillä negatiivisesti autokorreloituneita eli niillä on taipumus palata keskiarvotasolleen.

Muun muassa LeRoy (1989) osoittaa, että mean reversion-ominaisuus ei ole ristiriidassa tehokkaiden markkinoiden hypoteesin kanssa. Hypoteesin mukaan markkinoilla on ns. martingaaliominaisuus eli tämän päivän hinta (korko) on paras mahdollinen ennuste huomisen hinnalle (korolle). Koska lyhyellä aikavälillä hajontatermi hallitsee hintoja ja korkoja ohjaavia stokastisia prosesseja, ei välittömissä tuotoissa ole havaittavissa autokorrelaatiota. Negatiivinen autokorrelaatio tulee esiin vasta pitemmällä aikavälillä, jolloin odotettua muutosta kuvaava termi hallitsee stokastista prosessia.

Fama ja French (1989) havaitsivat mean reversion -taipumuksen aiheutuvan taloudellisten suhdanteiden mukana muuttuvista odotetuista tuotoista. Muutoksen todettiin johtuvan vaihtelevasta riskipreemiosta, joka liikkuu täydellisesti suhdanteiden vastaisesti. Siten korkeasuhdanteessa saatavilta tuotoilta vaadittiin matalasuhdanteessa saatavia suurempi preemio.

Vastaavaa syklisyyttä on todettu olevan myös lyhyiden korkojen liikkeissä. Fama ja Bliss (1987) totesivat USA:n aineistolla, että lyhyellä tähtäimellä nykyisen korkorakenteen avulla ei pystytä ennustamaan tulevia korkoja, mutta ennustevoima lisääntyy huomattavasti ennustehorisontin pidentyessä. Nykyisestä korkorakenteesta implisiittisesti määräytyvien termiinikorkojen avulla pystytään ennustamaan jopa 48% tämän hetken yhden vuoden koron ja neljän vuoden päästä toteutuvan yhden vuoden koron muutoksesta. Ennustevoiman lisääntymisen Fama ja Bliss osoittivat liittyvän korkojen mean reversion -taipumukseen.

---

[61] Fama ja French (1988, 1989) sekä Poterba ja Summers (1986, 1988).

Fama ja Bliss (1987) sekä Fama (1988) asettivat intertemporaalisille hinnoittelumalleille ja erityisesti CIR-mallille haasteeksi ajassa muuttuvan riskipreemion selittämisen. Vastausta voidaan tarkastella yhtälössä 3.16 johdetun velkakirjan odotettua lisätuottoa kuvaavan määritelmän avulla:

$$(\beta_j - r)F^j = [\phi_W \; \phi_{Y_1} \; .. \; \phi_{Y_k}][F^j_W \; .. \; F^j_{Y_k}]', \qquad (3.16)$$

missä

$$\phi_W = [(\frac{-J_{WW}}{J_W})(\text{var}W) + \sum_{Y_i}(\frac{-J_{WY}}{J_W})(\text{cov}W,Y_i)],$$

$$\phi_{Y_i} = [(\frac{-J_{WW}}{J_W})(\text{cov}W,Y_i) + \sum_{Y_k}(\frac{-J_{WY}}{J_W})(\text{cov}Y_i,Y_k)].$$

CIR (1985a) osoittivat preemioiden olevan seurausta lisääntyneestä riskinotosta suhteessa optimaalisesti sijoitettuun varallisuuteen. Mikäli velkakirjan odotettu tuotto korreloisi täydellisesti varallisuuden rajahyödyn odotetun muutoksen kanssa, ei lisätuottoa syntyisi. Siten voidaan kirjoittaa myös (CIR, 1985a, yhtälö)

$$(\beta_j - r)F^j = -(\text{cov}\; F^j, J_W)/J_W. \qquad (5.6)$$

Koska yhtälössä (3.15) määritelty riskitön korko kuvaa täydellisesti varallisuuden rajahyödyn odotettua muutosta, ei riskittömän koron kanssa täydellisesti korreloivalle velkakirjalle makseta lisäpreemiota. Mitä suurempi negatiivinen korrelaatio velkakirjan odotetun tuoton ja varallisuuden rajahyödyn muutosasteen välillä on, sitä suuremmaksi preemio muodostuu.

Breeden (1986) antoi negatiivisesta korrelaatiosta johtuvalle lisäpreemiolle intuitiivisen selityksen, joka käy implisiittisesti ilmi myös yhtälöstä (5.6). Koska sijoittajan saama rajahyöty on alhaisella kulutuksen tasolla (matalasuhdanteessa) korkeampi kuin korkealla kulutustasolla (korkeasuhdanteessa), suostuu hän maksamaan enemmän matalasuhdanteessa erääntyvästä velkakirjasta[62]. Siten matalasuhdanteessa erääntyvän velkakirjan tuotto on myös alhaisempi ja lisäpreemio pienempi.

Luvussa 4 esitetyssä korkorakennemallissa riskipreemio ϕ_r oli logaritmisen hyötyfunktion ansiosta kiinteä. Siten kyseisessä yleisen CIR-mallin erikoistapauksessa ei preemio ole varallisuuden tai kulutuksen tasosta riippuvainen. Voidaankin päätellä, että selittääkseen taloudellisten suhdanteiden mukana vaihtelevia riskipreemioita, CIR-mallissa käytettävään hyötyfunktioon ei voi liittää oletusta kiinteästä relatiivisesta riskiaversiosta.

62 Ehdon (3.9.1) mukaan kulutuksen rajahyöty U_C voidaan sijoittaa suoraan varallisuuden rajahyödyn J_W tilalle.

6 YHTEENVETO

Tutkielmassa ollaan tarkasteltu arbitraasin eliminoitumisen pohjalta johdettuja velkakirjojen hinnoittelumalleja. Arbitraasin eliminoitumisehdosta on viimeistään 1970-luvulla tullut rahoitusteorian kulmakivi, jolle modernit hinnoittelumallit perustuvat. Ehtoa voidaan nykyisin pitää myös lähtökohtana markkinoiden tehokkuuden kuvaamiseen.

Velkakirjan hinnoittelumalleissa yhdistetään rahoitusteoreettisen kirjallisuuden kaksi valtavirtaa. Alunperin optioiden hinnoitteluteoriassa käytetty dynaaminen kehikko tarjoaa puitteet myös velkakirjoille. Arbitraasihinnoitteluteorian piiristä taas on omaksuttu käsitys, miten riskiaversiiviset sijoittajat hinnoittelevat stokastisten prosessien riskejä.

Coxin, Ingersollin ja Rossin (1985a,b) tasapainoanalyysista johdettu hinnoittelumalli ja sen korkorakennesovellus ovat 1980-luvulla olleet runsaan huomion kohteena. Mallin teoreettisiksi ansioiksi voidaan lukea kyky yhdistää arbitraasi- ja tasapainolähestymistavat toisiinsa. Olen tutkielmassani osoittanut, että CIR:n synteesi oli luonnollista jatkoa aiemmille rahoitusteorian kehitysaskeleille.

CIR:n yhden muuttujan korkorakennesovellus sitä vastoin ei ole pystynyt selittämään korkorakenteen todellisia liikkeitä. Malli on tarjonnut hyvän lähtökohdan korkodynamiikan teoreettiselle tarkastelulle, mutta empiirisissä töissä on voitu todeta, että tarvitaan useampi kuin yksi stokastinen muuttuja. Realistisuuden lisääminen uusien muuttujien avulla johtaa taas yhä vaikeampiin ratkaisuihin.

LÄHTEET

BIERWAG, GERALD O., GEORGE G. KAUFMAN ja ALDEN TOEVS (toim.) (1983): Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization, Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol. 41, Greenwich, USA,

BLACK, FISCHER ja MYRON SCHOLES (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, s. 637-54,

BREEDEN, DOUGLAS T. (1979): An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities, Journal of Financial Economics, 7, s. 265-96,

BREEDEN, DOUGLAS T. (1986): Consumption, Production, Inflation and Interest Rates; A Synthesis, Journal of Financial Economics, 16, s. 3-39,

BRENNAN, MICHAEL J. ja EDUARDO S. SCHWARTZ (1979): A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds, Journal of Banking and Finance, 3, s. 133-55,

BRENNER, ROBIN J. (1989): Duration and the Heath, Jarrow and Morton Term Structure Model, julkaisematon käsikirjoitus, Karl Eller Graduate School of Management, University of Arizona, USA,

BROCK, WILLIAM A. (1982): Asset Prices in a Production Economy, s. 1-46 teoksessa J.J. McCall (toim.): The Economics of Uncertainty and Information, University of Chicago Press, USA,

BROWN, STEPHEN J. ja PHILIP H. DYBVIG (1986): The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates, Journal of Finance, 3, s. 617-32,

BROWN, ROGER H. ja STEPHEN M. SCHAEFER (1988): Testing the Cox, Ingersoll & Ross Model on British Government Index-Linked Securities, Institute of Finance and Accounting Working Paper 109-88, London Business School, Englanti,

CHOW, GREGORY C. (1979): Optimum Control of Stochastic Differential Equation Systems, Journal of Economic Dynamics and Control, 1, s. 143-75,

CONSTANTINIDES, GEORGE M. (1988): Theory of Valuation: Overview and Recent Developments, s. 1-23 teoksessa SUDIPTO BHATTACHARAYA ja GEORGE M. CONSTANTINIDES (toim.): Theory of Valuation - Frontiers of Modern Financial Theory, Volume 1, Rowman & Littlefield, USA,

COPELAND, THOMAS E. ja J. FRED WESTON (1988): Financial Theory and Corporate Policy (3rd Ed.), Addison-Wesley Publishing Company, USA,

COX, JOHN C., JONATHAN E. INGERSOLL, JR. ja STEPHEN A. ROSS (1979): Duration and the Measurement of Basis Risk, Journal of Business, 1, s. 51-61,

COX, JOHN C., JONATHAN E. INGERSOLL, JR. ja STEPHEN A. ROSS (1981): A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates, Journal of Finance, 36, s. 769-99.

COX, JOHN C., JONATHAN E. INGERSOLL, JR. ja STEPHEN A. ROSS (1985a): An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, Econometrica, 2, s. 363-84,

COX, JOHN C., JONATHAN E. INGERSOLL, JR. ja STEPHEN A. ROSS (1985b): A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, 2, s. 385-407,

COX, JOHN C. ja STEPHEN A. ROSS (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 31, s. 145-66,

CULBERTSON, J.M. (1957): The Term Structure of Interest Rates, Quarterly Journal of Economics, 4, 485-517,

DEBREU, GERARD (1959): Theory of Value - An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, A Cowles Foundation Monograph 17, Yale University Press, USA,

DOTHAN, L. URI (1978): On the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial Economics, 6, s. 59-69

DUFFIE, DARREL (1986): On the Term Structure of Interest Rates, Research Paper No. 916, Graduate School of Business, Stanford University,

DYBVIG, PHILIP H. ja STEPHEN A. ROSS (1987): Arbitrage, s. 100-106 teoksessa JOHN EATWELL ja MURRAY MILGATE (toim.): The New Palgrave: A Dictionary of Economics, MacMillan Press Ltd., Englanti,

FAMA, EUGENE F. (1970): Multiperiod Consumption-Investment Decisions, American Economic Review, 1, s. 163-76,

FAMA, EUGENE F. (1988): Term Structure Forecasts of Interest Rates, Inflation and Real Returns, Center for Research in Security Prices Working Paper Series No. 233, Graduate School of Business, University of Chicago, USA,

FAMA, EUGENE F. ja ROBERT R. BLISS (1987): The Information in Long-Maturity Forward Rates, American Economic Review, 4, s. 680-92,

FAMA, EUGENE F. ja KENNETH R. FRENCH (1988): Permanent and Temporary Components of Stock Prices, Journal of Political Economy, 2, s. 246-73,

FAMA, EUGENE F. ja KENNETH R. FRENCH (1989): Business Conditions and Expected Returns on Stocks and Bonds, Center for Research in Security Prices Working Paper Series No.

220, Graduate School of Business, University of Chicago, USA;

FERSON, WAYNE E. ja CAMPBELL R. HARVEY (1989): The Variation of Economic Risk Premiums, Center for Research in Security Prices Working Paper Series No. 258, Graduate School of Business, University of Chicago, USA,

FISHER, IRVING (1930): The Theory of Interest, MacMillan Publishing Co., New York, USA,

FRIEDMAN, BENJAMIN M. (1977): Financial Flow Variables and the Short-run Determination of Long-term Interest Rates, Journal of Political Economy, 85, 661-89,

GIBBONS, MICHAEL R. ja KRISHNA RAMASWAMY (1988): The Term Structure of Interest Rates: Empirical Evidence, Center for the Study of Futures Markets Working Paper Series No. 174, Columbia Business School, USA,

GROSSMAN, SANFORD J. ja ROBERT J. SHILLER (1982): Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-traded Assets and Heterogeneous Information, Journal of Financial Economics, 10, s. 195-210,

GULTEKIN, N. BULENT ja RICHARD J. ROGALSKI (1984): Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk: Empirical Tests, Journal of Business, 2, s. 241-64,

HAKANSSON, NILS H. (1970): Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions, Econometrica, 5, s. 587-607,

HALL, ROBERT E. ja JOHN B. TAYLOR (1986): Macroeconomics: Theory, Performance and Policy, W.W.Norton & Co., USA,

HARRISON, J. MICHAEL ja DAVID KREPS (1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, 20, s. 381-408,

HARVEY, CAMPBELL R. (1988): The Real Term Structure and Consumption Growth, Journal of Financial Economics, 22, s. 305-33,

HEATH, DAVID, ROBERT JARROW ja ANDREW MORTON (1989): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, julkaisematon käsikirjoitus, Cornell University, USA,

HICKS, JOHN R. (1939): Value and Capital: An Inqiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory, Oxford at the Clarendon Press, Englanti,

HUANG, CHI-FU ja ROBERT H. LITZENBERGER (1988): Foundations for Financial Economics, North-Holland, USA,

HULL, JOHN (1989): Options, Futures and Other Derivative Securities, Prentice-Hall, USA, ILMANEN, ANTTI (1989): Duraatioanalyysin käyttö joukkovelkakirjan korkoriskin arvioinnissa ja hallinnassa, Suomen Pankin keskustelualoitteita 18/89, Helsinki,

INGERSOLL, JONATHAN E., JR. (1987): Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield, USA,

INGERSOLL, JONATHAN E., JR., JEFFREY SKELTON ja ROMAN L. WEIL (1978): Duration Forty Years Later, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Proceedings issue, November, s. 627-48,

KESSEL, RUEBEN A. (1965): The Cyclical Behavior of the Term Structure of Interest Rates, National Bureau of Economic Research Occasional Paper No. 91, USA,

KNEZ, PETER, ROBERT LITTERMAN ja JOSE SCHEINKMAN (1989): Explorations into Factors Explaining Money Market Returns, julkaisematon käsikirjoitus, Department of Economics, University of Chicago, USA,

KÄRKI, JAAKKO P. ja OLIVIER M. AUBRY (1990): Term Structure of Interest Rates and Bond Valuation, Credit Suisse Investment Research Basic Report, Credit Suisse, Sveitsi,

LEROY, STEPHEN F. (1982a): Expectations Models of Asset Prices: A Survey of Theory, Journal of Finance, 1, s. 185-217,

LEROY, STEPHEN F. (1982b): Risk-Aversion and the Term Structure of Real Interest Rates, Economics Letters, 10, 355-61, korjaus (1983) sama julkaisu, 12, 339-40,

LEROY, STEPHEN F. (1989): Efficient Capital Markets and Martingales, Journal of Economic Literature, December, s. 1583-1621,

LITTERMAN, ROBERT ja JOSE SCHEINKMAN (1988): Common Factors Affecting Bond Returns, Financial Strategies Group Publications, Goldman, Sachs & Co., USA,

LONGSTAFF, FRANCIS A. (1989): A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial Economics, 23, s. 195-224,

LUCAS, ROBERT E., JR. (1978): Asset Prices in an Exchange Economy, Econometrica, 6, s. 1429-45,

LUTZ, FREDERICK A. (1940): The Structure of Interest Rates, Quarterly Journal of Economics, 55, s. 36-63,

MALLIARIS, A.G. ja W.A. BROCK (1982): Stochastic Methods in Economics and Finance, North-Holland, USA,

MELINO, ANGELO (1988): The Term Structure of Interest Rates: Evidence and Theory, Journal of Economic Surveys, 4, s. 335-67,

MERTON, ROBERT C. (1969): Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, Review of Economics and Statistics, 51, s. 247-57,

MERTON, ROBERT C. (1971): Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, Journal of Economic Theory, 4, s. 373-413,

MERTON, ROBERT C. (1973): An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, Econometrica, 41, s. 867-87,

MERTON, ROBERT C. (1975): Theory of Finance from the Perspective of Continuous Time, Journal of Financial and Quantitative Analysis, November, s. 659-74,

MERTON, ROBERT C. (1977): On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem, Journal of Financial Economics, 5, s. 241-9,

MERTON, ROBERT C. (1982): On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous-time Models, s. 19-51 teoksessa WILLIAM F. SHARPE ja CATHRYN M. COOTNER (toim.): Financial Economics: Essays in Honor of Paul Cootner, Prentice-Hall, USA,

MODIGLIANI, FRANCO ja MERTON H. MILLER (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment, American Economic Review, 48, s. 261-97,

MODIGLIANI, FRANCO ja RICHARD SUTCH (1966): Innovations in Interest Rate Policy, American Economic Review, 56, s. 178-97,

MURTO, RISTO (1989): Korkorakenne, odotushypoteesi ja aikapreemio Suomen lyhyen rahan markkinoilla, Elinkeinoelämän tutkimuslaitos, C 51, Helsinki,

POTERBA, JAMES M. ja LAWRENCE H. SUMMERS (1986): The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations, American Economic Review, 5, s. 1142-51,

POTERBA, JAMES M. ja LAWRENCE H. SUMMERS (1988): Mean Reversion in Stock Prices; Evidence and Implications, Journal of Financial Economics, 22, s. 27-59,

PRESCOTT, EDWARD C. ja RAJNISH MEHRA (1980): Recursive Competitive Equilibrium: The Case of Homogeneous Households, Econometrica, 6, s. 1365-79,

RICHARD, SCOTT F. (1978): An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial Economics, 6, s. 33-57,

ROLEY, V. VANCE (1981): The Determinants of the Treasury Security Yield Curve, Journal of Finance, 36, s. 1103-26,

ROLL, RICHARD (1977): A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Journal of Financial Economics, 4, s.129-76, ROSS, STEPHEN A. (1976): The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory, 13, s. 341-60,

ROSS, STEPHEN A. (1977): Risk, Return and Arbitrage, teoksessa IRWIN FRIEND ja J. BICKSLER (toim.): Studies in Risk and Return, Ballinger Publishing Company, USA,

RUBINSTEIN, MARK (1976): The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options, Bell Journal of Economics, 7, 407-25,

SARGENT, THOMAS J. (1987): Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, USA,

SCHAEFER, STEPHEN M. ja EDUARDO S. SCHWARTZ (1984): A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 4, 413-24,

SHILLER, ROBERT J. (1979): The Volatility of Long-term Interest Rates and Expectations Models of the Term Structure, Journal of Political Economy, 87, s. 1190-219,

SHILLER, ROBERT J. ja J. HUSTON MCCULLOCH (1987): The Term Structure of Interest Rates, National Bureau of Economic Research Working Paper Series No. 2341, USA,

SINGLETON, KENNETH J. (1988): Modeling the Term Structure of Interest Rates in General Equilibrium, s. 152-64 teoksessa SUDIPTO BHATTACHARAYA ja GEORGE M. CONSTANTINIDES (toim.): Theory of Valuation - Frontiers of Modern Financial Theory, Volume 1, Rowman & Littlefield, USA,

STAMBAUGH, ROBERT F. (1988): The Information in Forward Rates: Implications for Models of the Term Structure, Journal of Financial Economics, 21, s. 41-70,

STIGLITZ, JOSEPH E. (1970): A Consumption-Oriented Theory of the Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates, Review of Economic Studies, s. 321-51,

STOKEY, NANCY L. ja ROBERT E. LUCAS, JR. (1989): Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, USA,

SUN, TONG-SHENG (1987): Connections between Discrete-time and Continuous-time Financial Models, julkaisematon väitöskirja, Stanford University,

VASICEK, OLDRICH (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure, Journal of Financial Economics, 5, s. 177-88,

VIRÉN, MATTI (1988): Korot, korkorakenne ja inflaatio: tuloksia kansainvälisellä aikasarja-aineistolla, Suomen Pankki, D:66, Helsinki.

SUOMEN PANKIN KESKUSTELUALOITTEITA

ISSN 0785-3572

1/91 RISTO PELTOKANGAS Usean faktorin korkorakennemallit ja immunisaatio. 1991. 82 s. (ISBN 951-686-274-8)

2/91 ANTTI URVAS Volatile Exchange Rates and Speculation - Can the Dollar Movements of the 1980s Be Explained? 1991. 124 s. (ISBN 951-686-275-6)

3/91 MIKKO NISKANEN Velkakirjojen hinnoittelu arbitraasimallissa. 1991. 87 s. (ISBN 951-686-276-4)