

Esa Jokivuolle
Suomen Pankin tutkimusosasto
14.6.1990

13/90

SUOMALAISTEN FOX-INDEKSIPTIOIDEN HINNOITTELU
MONTE CARLO -SIMULOINTIA KÄYTTÄEN

Suomen Pankin monistuskeskus
Helsinki 1990
ISBN 951-686-253-5
ISSN 0785-3572

ABSTRACT

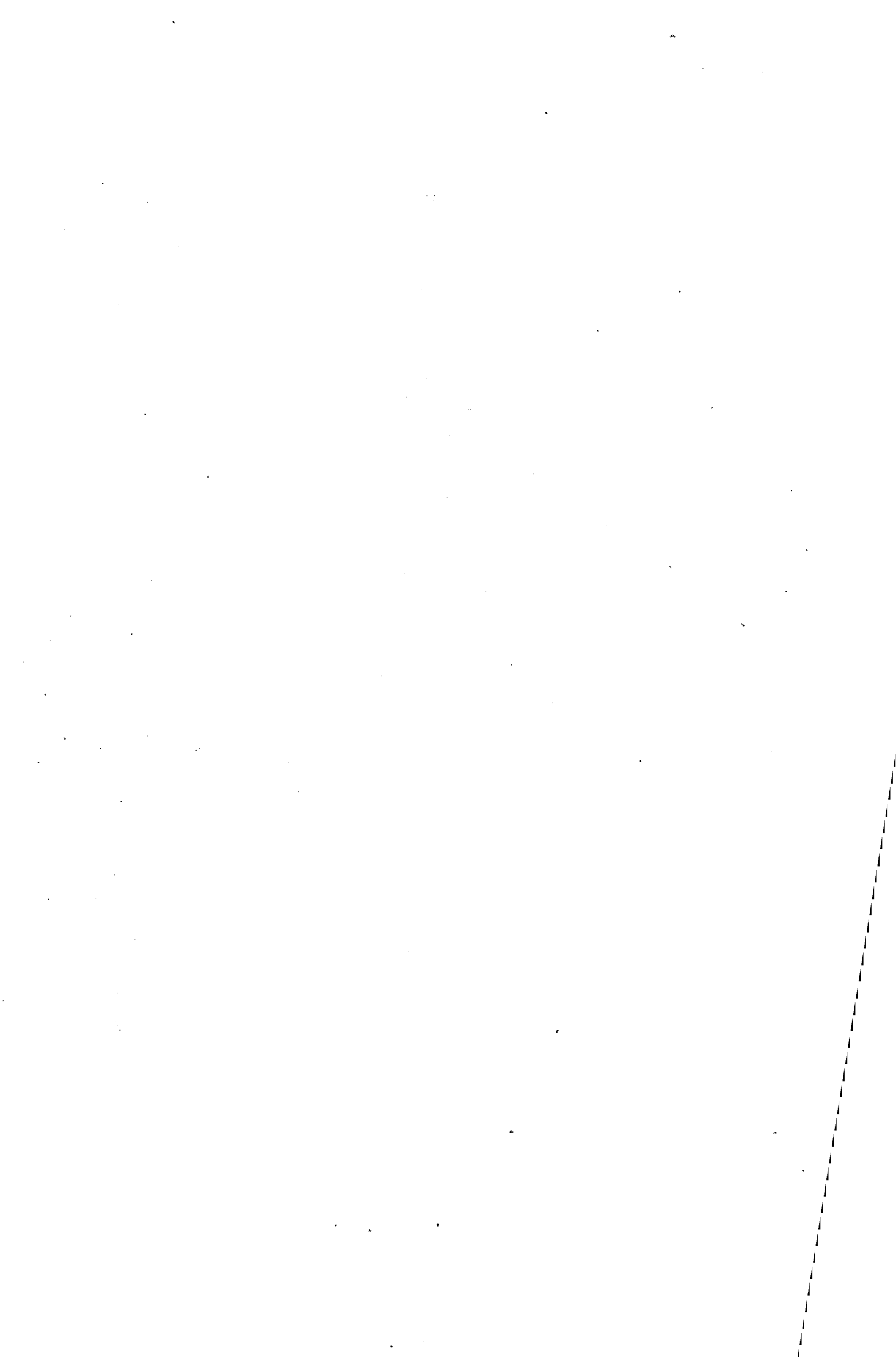
The empirical work of this study consists of three parts: a time series analysis of the Finnish FOX stock index, Monte Carlo simulation of the theoretical index option prices and a comparison of the performance of the standard option pricing models with that of the simulation model applied.

The daily changes in the FOX stock index are specified to follow a positively autoregressive process of first order as well as a GARCH(1,1)-type process in conditional variance. Following Cox & Ross (1976) argumentation, we simulate the theoretical index option prices based on the specified stock index process. The main results suggest that the markets seem to be pricing options rationally in respect to the specified stochastic properties of the FOX index. The traditional pricing models do not perform as well.

TIIVISTELMÄ

Työn empiirinen puoli jakaantuu kolmeen osaan: suomalaisen FOX-osakeindeksin tilastolliseen analyysiin, FOX-indeksioptioiden teoreettisten hintojen laskemiseen Monte Carlo simuloinnilla sekä simulointimallin ja perinteisten optiohinnoittelumallien selityskyvyn vertailuun.

Tutkimuksessa todetaan, että FOX-indeksin päivittäiset muutokset ovat autokorreloituneita ja että niiden päivittäinen varianssi vaihtelee. Indeksimuutoksia kuvaava prosessi täsmennetään ensimmäisen asteen positiivisesti autoregressiiviseksi sekä GARCH(1,1)-tyyppiseksi. FOX-indeksiin perustuvien FOX-optioiden teoreettiset hinnat simuloidaan käyttämällä täsmennettyä indeksiprosessia. Vertailussa havaitaan, että simulointimalli kykenee selittämään selvästi paremmin toteutuneita optiohintoja kuin perinteiset hinnoittelumallit.



SISÄLTÖ

Sivu

TIIVISTELMÄ	3
1 JOHDANTO	7
2 OPTIOTEORIAN PERUSTEITA	10
2.1 Johdatus optioihin	10
2.2 Black & Scholes -malli	13
2.3 Myyntioption hinta ja put-call -pariteetti	18
2.4 Black-76 -malli	19
3 OPTIOIDEN HINNOITTELU VAIHTOEHTOISTEN STOKASTISTEN PROSESSIEN TAPAUKSESSA	22
3.1 Cox & Ross -malli	22
3.2 Jarrow & Rudd -malli	24
3.3 GARCH-prosessit	28
3.3.1 GARCH-in-mean	30
3.4 Optioiden hinnoittelu GARCH-maailmassa	32
3.5 Osakeindeksin muutosten autokorrelaatio ja sen vaikutus optioiden hinnoitteluun	34
3.5.1 Autokorreloituneen prosessin odotusarvo	37
3.5.2 Autokorreloituneen prosessin varianssi	38
4 EMPIIRINEN TUTKIMUSONGELMA JA KÄYTETTÄVÄ AINEISTO	40
4.1 Empiirisen tutkimusongelman täsmentäminen	40
4.2 Suomen Optiomeklarit Oy:n markkinoilla noteerattavat sijoitusinstrumentit	41
4.3 Tilastoaineisto	42
5 FOX-INDEKSIEN EMPIIRINEN PROSESSI JA SEN VOLATILITEETTI	45
5.1 FOX-indeksin volatiliteetti	45
5.2 FOX-indeksin muutosten autokorrelaatio	48
5.3 FOX-indeksin päivittäisten muutosten stokastinen prosessi	53
5.3.1 GARCH-in-mean	59
5.4 Implisiittinen volatiliteetti	59

6	AUTOKORRELAATION JA HETEROSKEDASTISUUDEN VAIKUTUS OPTIOIDEN HINTAAN: TARKASTELU MONTE CARLO -SIMULOINNIN AVULLA	64
6.1	Monte Carlo -simulointi	64
6.2	Autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vaikutusten erittely	66
6.3	Teoreettisten optiohintojen simulointi	72
	6.3.1 Teoreettisten option hintojen suhteellinen virhe	77
6.4	Johtopäätökset empiirisistä tuloksista	89
7	YHTEENVETO	93
	LIITTEET 1 - 7	96
	LÄHTEET	105

1 JOHDANTO

Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu, että osakeindeksit voivat heijastaa tehottomasti¹ markkinainformaatiota, vaikka indeksiin kuuluvien yksittäisten osakkeiden markkinat olisivat periaatteessa tehokkaat (Fischer (1966)). Koska etenkin ohuilla markkinoilla osakkeilla on periodeja, jolloin niillä ei tehdä kauppvoja, täytyy indeksin laskemiseen sisällyttää vanhentuneita noteerauksia. Tehottomuus näkyy indeksimuutosten positiivisena autokorrelaationa. Viime aikoina on esitetty havaintoja myös muista syistä johtuvasta autokorrelaatiosta (Poterba & Summers (1988)).

Osakeindeksin tehottomuus ei johda välttämättä indeksiin perustuvien johdannaismarkkinoiden tehottomuuteen. Indeksifutuurin hinta voi heijastaa koko sitä informaatiota, josta osa heijastuu viivästyneenä indeksiin. Indeksioptioiden hinnoittelu voi puolestaan perustua futuurin hintaan.

Tehottomalle osakeindeksille perustuvat optiot voivat olla tehokkaasti hinnoiteltuja, vaikka markkinoilla ei olisikaan tarjolla indeksifutuuria. Option hinnan tulee perustua tällöin todelliselle, indeksimuutoksia kuvaavalle stokastiselle prosessille, joka on tehottomalla indeksillä autoregressiivinen. On osoitettu, että hyödynämällä autoregressiivisyyden tarjoamaa informaatiota indeksin odotusarvosta, voidaan markkinoilla saavuttaa ylisuuria voittoja, mikäli optioiden hinnat perustuisivat Black & Scholes -malliin (Berglund, Liljebloom & Hedvall (1988)). Black & Scholes -malli ei siten ole validi.

Toinen korrektissa hinnoittelussa huomioon otettava seikka on se, että positiivisesti autoregressiivisen, integroituneen prosessin varianssi kasvaa epälineaarisesti ennustehorisontin pidentyessä. Siten

¹Osakemarkkinat ovat tehokkaat, jos jokaisen sijoittajan odotukset osakkeiden tulevista tuotoista ovat rationaaliset ja perustuvat kaikkeen tarjolla olevaan informaatioon. Tällöin osakkeiden hinnat heijastavat tehokkaasti saatavissa olevaa informaatiota (Ingersoll, (1987), s. 73. Katso myös Copeland & Weston (1988)).

historiallinen volatilitiitti, joka on estimoitu autokorrelaatiota sisältävällä frekvenssillä, antaa liian alhaisen estimaatin indeksin todelliselle heilahtelulle. Jos tätä volatilitiittiestimaattia sovelletaan esimerkiksi Black & Scholes (tai Black -76) -kaavassa, muodostuvat teoreettiset option hinnat systemaattisesti liian alhaisiksi.

Autoregressiivisyyden molemmat vaikutukset option hintaan voidaan ottaa huomioon numeerisessa hinnoittelumenetelmässä. Noudattaen aikaisemmin esitettyjä periaatteita, indeksin odotettu jakauma simuloidaan valitulla stokastisella prosessilla (Boyle (1976)). Kyseessä on Monte Carlo -simulointi. Option arvo sen voimassaoloajan päättyessä lasketaan simuloitujen indeksirealisaatioiden joukosta option toteuttamishinnan avulla. Coxin ja Rossin (1976) argumentointia noudattaen option tämän hetken arvo saadaan diskonttaamalla päättymispäivän arvo riskittömällä korolla (Cox & Ross (1976)).

Toinen, osakekurseja koskeva viimeaikainen huomio on se, että niiden ehdollinen varianssi on autoregressiivinen. Osakekurseja tai osakeindeksiä generoiva prosessi on tällöin ARCH- tai GARCH-tyyppinen. Näillä prosesseilla on vaikutuksia myös option teoreettiseen hintaan. Prosessien ehdolliset jakaumat ovat yleensä huipukkaampia kuin normaalijakauma. Approksimatiivisen hinnoittelumallin ja simuloinnin avulla voidaan osoittaa, että indeksijakauman huipukkuus alentaa tasaoption² hintaa. ARCH- ja GARCH-prosessien tapauksessa option teoreettinen hinta voidaan ratkaista edellä kuvatulla numeerisella menetelmällä (Engle & Mustafa (1989)).

Tämän työn empiirisessä osassa Suomen Optiomeklarit Oy:n noteeraamien FOX-indeksioptioiden teoreettiset hinnat ratkaistaan simuloimalla, kun oletetaan, että indeksimuutosten prosessi on GARCH(1,1)-tyyppinen ja odotusarvonsa suhteen ensimmäisen asteen autoregressiivinen. Prosessin parametrit estimoidaan päivittäisistä havainnoista periodilta 2.5.1988 - 8.6.1989. Tulokset viittaavat

²Tasaoptio on määritelty sivulla 13.

vahvasti siihen, että markkinat huomioivat oikein autokorrelaation ja GARCH-ominaisuuksien vaikutuksen tulevan volatiliteetin ennustamiseen. Sen sijaan käytettyjen analyysimenetelmien avulla ei voida olla varmoja, ottavatko markkinat huomioon autokorrelaation vaikutuksen indeksin odotusarvon kautta option hintaan. Jää myös osittain avoimeksi, kuinka merkittävä empiirisesti on GARCH-ominaisuuksien aiheuttaman indeksituottojen huipukkuuden vaikutus FOX-optiohintoihin.

Työn esitys etenee seuraavasti: luvussa 2 määritellään peruskäsitteet ja johdetaan pääpiirteissään Black & Scholes -kaava. Sen jälkeen esitetään Black & Scholes ja Black-76 -mallin yhteys.³ Luku 3 käsittelee optioiden hinnoittelua tapauksissa, joissa indeksituotto- ja kuvaava prosessi poikkeaa BS- ja B76-mallin oletuksista. Luvussa 4 esitellään käytetty tilastoaineisto ja ne institutionaaliset tekijät, jotka vaikuttavat datan käsittelyyn ja tulosten tulkintaan. Luvussa 5 estimoidaan FOX-indeksin noudattama stokastinen prosessi ja lasketaan indeksin volatiliteetin estimaatti eri menetelmiä käyttäen. Luvussa 6 tuotetaan optioiden teoreettiset hinnat simuloimalla ja tarkastellaan niiden osuvuutta havaittuihin optioiden hintoihin. Sama tarkastelu suoritetaan B76- ja BS-mallille. Apuvälineiden tekninen esittely sisältyy liitteisiin. Työ päättyy yhteenvetoon ja johtopäätöksiin luvussa 7.

³Tästä eteenpäin Black & Scholes (1973) - ja Black (1976) -malleista käytetään lyhenteitä BS- ja - B76-malli.

2 OPTIOTEORIAN PERUSTEITA

Luvussa esitellään option ominaisuuksia sijoitusinstrumenttina. Peruskäsitteiden määrittelyn jälkeen johdetaan Black & Scholes -malli eurooppalaisen osto-option hinnalle noudattaen arbitraasi-periaatetta. Osinkojen huomioimista hinnoittelussa käsitellään Black-76 -mallin valossa. Lopuksi esitetään Tauseke, jonka avulla voidaan johtaa eurooppalaisen myyntioption hinta Black & Scholes tai Black-76 -mallista.

2.1 Johdatus optioihin

Optio on sopimus, joka antaa oikeuden joko ostaa tai myydä option kohteena olevan arvopaperin määrättyyn hintaan määrätyn ajan puitteissa. Osto-oikeuden sisältävää optiota kutsutaan osto-optioksi ja myyntioikeuden sisältävää optiota myyntioptioksi. Mikäli optio voidaan toteuttaa ainoastaan sen voimassaoloajan päättyessä, on kyseessä eurooppalainen optio. Optiota, joka voidaan toteuttaa milloin tahansa voimassaoloaikanaan, kutsutaan amerikkalaiseksi optioksi.

Optioita voidaan asettaa ja kaupata mitä erilaisimmille sijoituskohteille ja hyödykkeille, joiden arvon kehitykseen tulevaisuudessa sisältyy epävarmuutta. Tässä työssä käsiteltävä optioteoria liittyy pelkästään osake- ja osakeindeksi-optioihin. Samat periaatteet pätevät kuitenkin pitkälle myös muun tyyppisissä optioissa.

Aloitetaan option hinnoitteluongelman tarkastelu eurooppalaisella osto-optiolla. Amerikkalaisen option hinnoittelua ei tässä työssä tarkastella erikseen, koska suomalaisilla optiomarkkinoilla kaupattavat indeksi-optiot ovat eurooppalaisia.¹ Eurooppalaisen myynti-

¹Amerikkalaisen osto-option hinta on sama kuin eurooppalaisen osto-option, jos option perustana olevalle osakkeelle ei makseta osinkoja option voimassaoloaikana. Osinkojen maksu vaikeuttaa hinnoittelua, koska se saattaa tehdä option ennaikaisen toteuttamisen optimaaliseksi. Amerikkalaisen myyntioption hintaa ei ole voitu ratkaista suljetussa muodossa, koska arbitraasin määrittelemällä option hinnan alarajalla option toteuttaminen ennen eräpäivää on periaatteessa aina optimaalista (Cox & Rubinstein (1985)).

option hinta voidaan johtaa helposti eurooppalaisen osto-option hinnasta myöhemmin esitettävän pariteetin avulla. Jatkossa sanalla "optio" tarkoitetaan osto-optiota, ellei toisin mainita.

Määritellään aluksi muutamia symboleja ja käsitteitä:

T = option jäljellä oleva voimassaoloaika

S = osakkeen hinta T:n osoittamalla hetkellä

C = osto-option hinta T:n osoittamalla hetkellä

K = option toteuttamishinta eli hinta, jolla osto-option kohteena oleva osake voidaan ostaa (tai myyntioption tapauksessa myydä)

r = markkinoiden kiinteä, riskitön korko

Oletetaan seuraavaksi, että option perustana olevalle osakkeelle ei makseta osinkoa ja että minkäänlaisia transaktiokustannuksia ei synny. Koska option toteuttaminen on vapaaehtoista, sen arvo on aina vähintään nolla. Päätymishetkellään option arvo on siten joko nolla tai yleisen arbitraasiehdon nojalla osakkeen hinnan ja option toteuttamishinnan välinen erotus. Saman arbitraasiehdon nojalla ja edellä esitetyin oletuksin osto-option hinta on kaikkina hetkinä vähintään nolla tai osakkeen hinnan ja kyseiseen hetkeen diskontatun toteuttamishinnan välinen erotus. Symbolein merkittynä:

$$C \leq \text{Max}\{0, S - K\exp(-rT)\}$$

2.1.1

Mikäli näin ei olisi, arbitraasivoitto tulisi mahdolliseksi ylimyymällä osake ja sijoittamalla saatu raha alihintaiseen optioon ja riskittömään obligaatioon option päätymishetkeen saakka. Päätymishetkellä osake ostettaisiin ylimyynnin kattamiseksi joko toteuttamalla optio tai suoraan markkinahintaan, mikäli tämä olisi halvempi kuin option toteuttamishinta.

Edellinen argumentointi voidaan havainnollistaa seuraavan taulukon avulla:

TAULUKKO 2.1.1 Arbitraasi osakkeen ja osto-option välillä

Vaihe 1.	Vaihe 2.
Jos $C < S - K \exp(-rT)$, niin $S - C - K \exp(-rT) = A$, missä $A =$ arbitraasivoitto	Jos $S > K$, kun $T = 0$, niin toteutetaan optio maksamalla K . Lopullinen voitto = A . Jos $S < K$, kun $T = 0$, niin ostetaan osake markkinahintaan S . Lopullinen voitto = $A + K - S$.

Luonnollisesti osto-option hinta ei voi koskaan ylittää perustana olevan osakkeen hintaa. Edellä esitetyt osto-option yleiset arbitraasiehdot voidaan tiivistää seuraavasti:

$$S > C > \text{Max}\{0, S - K \exp(-rT)\}$$

2.1.2

Edellisistä arbitraasiehdoista huomataan, että option perustana olevan osakkeen hinta tarkasteluhetkellä T ja option toteuttamishinta määräävät option niin kutsutun **perusarvon**. Symbolein merkittävästi, osto-option perusarvo on $S - K$. Osto-option arvo on sitä suurempi mitä korkeampi on osakkeen hinta ja vastaavasti sitä pienempi mitä korkeampi on option toteuttamishinta. On kuitenkin muistettava, että option hinta on aina vähintään nolla.

Perusarvon lisäksi optiolla sanotaan olevan **aika-arvoa**, joka perustuu option jäljellä olevaan voimassaoloaikaan, kiinteään, riskittömään korkoon sekä epävarmuuteen osakkeen tulevasta kurssikehityksestä. Toisin sanoen, kun $T > 0$, niin $C > S - K$. Kuten edellisistä arbitraasiehdoista voimme päätellä, on option aika-arvo sitä suurempi mitä pitempi on jäljellä oleva voimassaoloaika ja mitä korkeampi on riskitön korko. Nämä tekijät vaikuttavat käänteisesti option toteuttamishinnan nykyarvoon ja siten suoraan option hintaan.

Jos option kohteena olevan hyödykkeen hintakehitykseen ei liittyisi epävarmuutta, optiokauppaa tuskin käytäisiin. Option hinta määrittelee itse asiassa korvauksen, jonka option liikkeellelaskija eli **asettaja** vaatii, jotta hän suostuu kantamaan option kohteen hinta-

kehitykseen sisältyvää riskiä option haltijan puolesta. Tässä mielessä optioita voidaan hyvin verrata vakuutus sopimuksiin.

Osakkeen kurssikehitykseen sisältyvää epävarmuutta voidaan kuvata osakkeen hinnanmuutoksia generoivan stokastisen prosessin varianssilla. Karkeasti ottaen osakkeen hinnan muutokset alaspäin ovat yhtä todennäköisiä kuin muutokset ylöspäin. Osto-option hinta nousee rajatta osakkeen hinnan noustessa suhteessa option toteuttamishintaan, mutta on aina vähintään nolla, vaikka osakkeen hinta laskee toteuttamishinnan alapuolelle. Siten osakehinnan varianssin kasvu - yhä suuremmat odotettavissa olevat heilahdukset sekä ylös- että alaspäin - nostaa option hintaa.

Määritellään lopuksi käsitteet **tasa-**, **miinus-** ja **plusoptio**, joita tarvitaan jatkossa. Käsitteet liittyvät option perustan arvon ja toteuttamishinnan nykyarvon erotukseen. Hetkellä T osto-optio on tasa-optio, jos $S = \exp(-rT)K$. Vastaavasti kyseessä on miinusoptio, jos $S < \exp(-rT)K$. Plusoption tapauksessa $S > \exp(-rT)K$.

2.2 Black & Scholes -malli

Kappaleessa käydään läpi pääpiirteissään eurooppalaisen osto-option eksaktin hintafunktion johtaminen Black & Scholes -mallin mukaan (Black & Scholes (1973)). Mallin antama ratkaisu option hinnalle perustuu oivallukseen, että jos osakkeesta ja sille asetetusta optios- ta voidaan muodostaa riskitön portfolio, täytyy tällaisen portfolion odotetun tuoton vastata markkinoiden kiinteää, riskitöntä korkoa. Mikäli option hinta on jatkuva funktio osakkeen hinnasta ja jäljellä olevasta voimassaoloajasta ja jos funktion muut parametrit ovat kiinteitä, on riskittömän portfolion muodostaminen mahdollista. Seuraavassa on koottu yhteen BS-mallin oletukset:

1. Kyseessä on eurooppalainen osto-optio
2. Option perustana olevalle osakkeelle ei makseta osinkoa
3. Transaktiokustannuksia ei ole

4. Osakkeiden ylimyynti on sallittu²
5. Osakkeen hinta seuraa Ito-prosessia³
6. Markkinoiden riskitön korko on kiinteä
7. Lainanotto on täysin vapaata riskittömällä korkolla

Muodostetaan aluksi portfolio, joka koostuu eurooppalaisesta osto-optiosta, tietystä määrästä option perustana olevaa osaketta sekä obligaatioista, joiden tuotto vastaa riskitöntä korkoa. Seuraavassa on taulukoitu portfolion tarkka koostumus.

TAULUKKO 2.2.1 Ylimyydyistä osakkeista, osto-optiosta ja obligaatioista koostuva portfolio

	määrä	hinta	arvo
osake	-h	S	-hS
optio	1	C	C
obligaatio	(hS-C)/Q	Q	hS-Q
portfolio			0

Osakkeita on siis ylimyyty arvosta hS (merkitty taulukkoon negatiivisena) ja saatu summa on sijoitettu yhteen osto-optioon ja määrään (hS-C)/Q obligaatioita. Omaa pääomaa ei ole käytetty, joten portfolion arvo on nolla (ylimyyty osake joudutaan kattamaan jossakin vaiheessa ostamalla vastaava osake).

Seuraavaksi määritellään portfolion eri arvopaperien oletetut hinta-prosessit. Osakkeen hinta noudattaa Ito-prosessia, eli $dS = \mu S dt + \sigma S dz$.

²Ylimyynti eli lyhyeksi myynti tarkoittaa tilannetta, jossa sijoittaja myy arvopaperin, jota hän ei vielä omista. Hän saa itse maksusuorituksen heti myyntitilanteessa, mutta joutuu ostamaan ja toimitamaan myyntikohteen vasta myöhemmin sovitun ajan puitteissa. Sijoittajan kokema voitto tai tappio riippuu ylimyydyn arvopaperin tulevasta hintakehityksestä.

³Stationaarinen stokastinen prosessi, jonka odotusarvo on vakio ja jonka satunnaistermi on normaalisti jakautunut vakioparametrein 0 ja σ^2 . Merkitään $y(t) = \mu dt + \sigma dz$, jossa $dz = \sqrt{dt}$ ja $dz \sim N(0,1)$.

Obligaation hinta muuttuu riskittömän koron mukaan, eli $dQ = rQdt$. Option hinta on funktio kahdesta muuttujasta, S ja T , eli $C = C(S,T)$. Option hintaprosessi saadaan kokonaisderivoimalla edellinen funktio. Tällöin joudutaan soveltamaan stokastista differentiaali-laskentaa, jota on esitelty lyhyesti liitteessä 1. Tulokseksi saadaan:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)ds + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)(ds)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)dt \quad 2.2.1$$

Kun sijoitetaan osakkeen hintaprosessi edelliseen yhtälöön, saadaan:

$$dC = \left[\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)\mu S + \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2 \right] + \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)\sigma Sdz \quad 2.2.2$$

Merkitään alussa muodostetun portfolion arvoa V :llä, eli

$$V = -hS + C + \left[\frac{(hS - C)}{Q}\right]Q \quad 2.2.3$$

Kokonaisderivoimalla V saadaan portfolion arvonmuutos:

$$dV = -hdS + dC + \left[\frac{(hS - C)}{Q}\right]dQ \quad 2.2.4$$

Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan osakkeen, option ja obligaation hintaprosessit, saadaan:

$$dV = \left[-h\mu S + \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)\mu S + \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2 + (hS - C)r\right]dt + \left[\frac{\partial C}{\partial S} - h\right]\sigma Sdz \quad 2.2.5$$

Edellisen yhtälön viimeinen termi on satunnaistermi, jonka odotus-arvo on nolla. Tällöin koko portfolion odotettu arvonmuutos on:

$$E(dV) = \left[\left(\frac{\partial C}{\partial S} - h \right) \mu S + \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \sigma^2 S^2 + (hS - C)r \right] dt \quad 2.2.6$$

Toisaalta portfolion arvonmuutoksen varianssi on kyseisen satunnais-termin neliö, joten:

$$\text{Var}(dV) = \left(\frac{\partial C}{\partial S} - h \right)^2 \sigma^2 S^2 dt \quad 2.2.7$$

Black & Scholes -mallin ideana on ollut muodostaa riskitön portfolio. Jotta portfolio olisi riskitön, sen arvonmuutoksen varianssin pitää olla nolla. Yhtälö 2.2.7 on nolla silloin, kun $h = \frac{\partial C}{\partial S}$. Toisin sanoen h on option hinnan ensimmäinen osittaisderivaatta sen perustana olevan osakkeen hinnan suhteen. On keskeistä havaita, että h on osakkeiden määrä yhtä optiota kohti riskittömässä portfoliossa. Sitä kutsutaan option delta-arvoksi.

Sijoitetaan ratkaistu h eli delta-arvo riskittömän portfolion odotettua arvonmuutosta kuvaavaan yhtälöön:

$$E(dV) = \left[\frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \sigma^2 S^2 + \left(\left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) S - C \right) r \right] dt \quad 2.2.8$$

Kun arbitraasimahdollisuudet ovat eliminoituneet markkinoilta, täytyy riskittömän portfolion, joka ei sisällä omaa pääomaa, odotetun arvonmuutoksen olla nolla. Siten:

$$\frac{\partial C}{\partial T} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \sigma^2 S^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) rS - rC = 0, \quad 2.2.9$$

joka on etsimämme option hinnan liikeyhtälö. Tämä osittais-differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista option hinnan reunaehdolla

$C(S,0,K) = \text{Max}\{0, S-K\}$, jolloin saamme option hinnan yhtälön.⁴

Black & Scholes -mallin tulos eurooppalaisen osto-option hinnalle on siten seuraava:

$$C = SN(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2), \quad 2.2.10$$

missä

N = normaalijakauman kertymäfunktio

$$d_1 = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T] / (\sigma\sqrt{T})$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Option delta-arvo, eli $\frac{\partial C}{\partial S}$, on $N(d_1)$. Tämän arvo muuttuu osakkeen hinnan muuttuessa ja jäljellä olevan voimassaoloajan lyhetyksessä. Osakkeen ja option määrien suhdetta tulee siten sopeuttaa jatkuvasti deltan muutosten mukaan, jotta portfolion riskittömyys säilyisi. Täten mahdollisuus jatkuva-aikaiseen, kitkattomaan kaupankäyntiin optio- ja osakemarkkinoilla, joilla ei ole transaktiokustannuksia, on keskeinen oletus saatujen tulosten takana.

On huomattava, että osakkeen kurssikehityksen odotusarvo, μ , häviää lopullisesta hintafunktiosta. Tämä merkittävä tulos perustuu riskittömän portfolion ylläpitämismahdollisuuteen ja arbitraasin häviämiseen. Osakkeen hintaprosessin varianssi on hintafunktion ainoa parametri, jota ei voida suoraan havaita. Se voidaan estimoida historiallisesta datasta tai laskea havaituista optioiden hinnoista olettaen, että hinnat noudattavat BS-mallia.

⁴Kyseisen osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaiseminen reunaehdolla ei ole aivan yksinkertaista. Black & Scholes suorittivat tehtävän käyttämällä apunaan fyysikkojen tuntemaa lämmönvirtayhtälöä (Black & Scholes (1973)). Black & Scholes -kaava on kuitenkin johdettavissa myös yksinkertaisemman, joskin työläemmän, menetelmän avulla (Cox & Rubinstein (1985)).

2.3 Myyntioption hinta ja put-call -pariteetti

Eurooppalaisen myyntioption hinta voidaan johtaa helposti BS- tai B76-kaavasta osto- ja myyntioptiota yhdistävän yleisen arbitraasiehdon avulla. Tätä yhteyttä kutsutaan put-call -pariteetiksi.⁵

Myyntioption hinnoittelukaavan suoraviivainen johtaminen koskee vain eurooppalaista optiota. Se, että amerikkalainen optio voidaan toteuttaa milloin tahansa, vaikeuttaa suljetun ratkaisun löytymistä amerikkalaisen myyntioption hinnalle.

Osto- ja myyntioption hinnan välinen pariteetti on muotoa:

$$C = P + S - K \exp(-rT),$$

2.3.1

missä edellä määriteltyjen symbolien lisäksi P tarkoittaa myyntioption hintaa. Toteuttamishinta, K, on sama sekä osto-että myyntioptiolla. Seuraava taulukko havainnollistaa edellisen arbitraasiin perustuvan pariteetin luonnetta (Cox & Rubinstein (1985), s. 41):

TAULUKKO 2.3.1 Osto- ja myyntioption välinen arbitraasiehto

	tämä päivä	päättymispäivä	
		S < K	S > K
myy osto-optio	C	-	K - S
osta myyntioptio	-P	K - S	-
osta osake	-S	S	S
lainaa	$K \exp(-rT)$	-K	-K
Yhteensä		-	-

Option päättymispäivänä tänään avatut positiot sulkeutuvat ja riippumatta siitä, päätyykö osakkeen hinta toteuttamishinnan ylä- vai alapuolelle, lopputulos yhteensä on nolla. Täten osto- ja myyntioption hintojen täytyy tasapainossa olla sellaiset, että tänään muodostettava portfolio voidaan rahoittaa ilman omaa pääomaa.

⁵Call option = osto-optio, put option = myyntioptio.

Edellisestä pariteetista ratkaistuna myyntioption hinta on:

$$P = C - S + K \exp(-rT). \quad 2.3.2$$

Kun C:n paikalle sijoitetaan osinkokorjatun BS-mallin antama hinta, saadaan:

$$\begin{aligned} P &= K[1 - N(d_1)] \exp(-rT) - S[1 - N(d_2)] \\ &= K \exp(-rT) N(-d_1) - SN(-d_2). \end{aligned} \quad 2.3.3$$

2.4 Black-76 -malli

Kappaleessa 2.1 johdetun BS-mallin kriittiset kohdat liittyvät mallin tekemiin oletuksiin. Tämän työn tarkoituksena on kiinnittää huomio oletukseen osakkeen kurssikehitystä kuvaavasta stokastisesta prosessista ja tarkastella option hinnoitteluongelmaa tapauksessa, jossa Ito-prosessille ominaiset autokorreloimattomuus ja homoskedastisuus eivät ole voimassa. Tämä kappale käsittelee puolestaan osingon maksun huomioon ottamista option hinnoittelussa.

Option voimassaoloaikana osakkeelle maksettava osinko on menetettyä tuloa eurooppalaisen osto-option haltijalle. Osinkojen vaikutus voidaan liittää BS-malliin suoraviivaisesti vähentämällä odotetun osingon nykyarvo osakkeen hinnasta. BS-kaava saa tällöin muodon:

$$C = (S - D)N(d_1) - K \exp(-rT)N(d_2), \quad 2.4.1$$

missä edellä määriteltyjen symbolien lisäksi:

D = option voimassaoloaikana odotetun osingon nykyarvo (Cox & Rubinstein (1985)).

Vaikeudeksi jää odotetun osingon suuruuden määrittäminen. Koska Suomen optiomarkkinoilla käydään kauppaa myös osakeindeksille

perustuvilla futuurisopimuksilla,⁶ keskitytään seuraavassa malliin, jossa odotettu osinkovirta tulee implisiittisesti huomioon otetuksi futuurisopimuksen hinnan kautta. Tämä perustuu indeksin ja sitä vastaavan futuurin hinnan väliseen yhteyteen. Option ja futuurin maturiteettien tulee olla samat, jotta futuurin hinta heijastaa nimen omaan option voimassaoloaikana odotettavia osingonmaksuja.

Mikäli osakkeiden ylimyynti on sallittu, voidaan indeksin mukaisesta osakekorista ja futuurista muodostaa riskitön portfolio. Tämä tapahtuu ylimyymällä osakkeet, ostamalla niitä vastaava futuuri ja sijoittamalla ylimyynnistä saadut rahat riskittömään kohteeseen. Jotta toimenpiteellä ei saavutettaisi arbitraasivoittoa, täytyy futuurin hinnan vastata indeksin tämän hetken arvoa plus sille kertyvää riskitöntä korkoa vastaavaa tuottoa. Toisin sanoen,

$$F = S \exp(rT),$$

2.4.2

jossa F on futuurisopimuksen hinta.

Jos indeksiin kuuluville osakkeille maksetaan osinko futuurin voimassaoloaikana, on futuurin arvo $F = (S - D) \exp(rT)$. Siten futuurin riskittömällä korolla nykyhetken diskontattu hinta vastaa in-

⁶Julkisuudessa esiintyvä kielenkäyttö on häilyvää. Suomen optio-markkinoilla kaupattavat instrumentit ovat itse asiassa termiinejä (a forward contract). Kun tehdään termiinisopimus, sovitaan termiinin kohteena olevan hyödykkeen tai arvopaperin kauppahinnasta sovittuna ajankohtana tulevaisuudessa. Tätä kutsutaan termiinihinnaksi. Suomen Optiomeklareiden markkinoilla olevat termiinit kohdistuvat FOX-indeksin arvoon ja niiden maturiteetit on standardoitu. Termiinin päättyessä suoritetaan tilihyvitys joko termiinin myyjälle tai ostajalle sen mukaan, onko FOX-indeksin arvo päätynyt termiinihinnan ala- vai yläpuolelle.

Futuurisopimus (a future's contract), jota Suomessa ei esiinny, eroaa termiinistä siinä, että tilihyvitys suoritetaan jokaisena kauppapäivänä kulloisenkin tilanteen mukaan. Näistä asteittaisista suorituksista kertyy sama määrä kuin termiinin tilityksestä. Futuurille kertyvät jatkuvat suoritukset saattavat kuitenkin aiheuttaa eron futuurin ja termiinin teoreettisissa hinnoissa, mikäli eri pituiset korot poikkeavat toisistaan (Cox, Ingersoll & Ross (1981); Cox & Rubinstein (1985)).

deksin hinnan ja option voimassaoloaikana odotetun osingonmaksun nykyarvon erotusta. Kaavan muodossa:

$$F_{exp}(-rT) = S - D.$$

2.4.3

Havaitaan, että edellisen yhtälön nojalla $F_{exp}(-rT)$ voidaan sijoittaa osinkokorjattuun BS-kaavaan lausekkeen $(S - D)$ paikalle. Tällä tavalla saatua kaavaa kutsutaan Black-76 -malliksi, joka alunperin johdettiin futuurioptioiden hinnoittelumiseksi (Black (1976)). Malli on hyvin käyttökelpoinen osinkojen huomioon ottamiseksi edellyttäen, että teoreettinen yhteys indeksin ja futuurin hinnan välillä pätee riittäväällä tarkkuudella. Empiirisessä työssä on huomattavasti helpompaa käsitellä futuurin hintoja kuin pyrkiä konstruoimaan osakeindeksin odotetun osinkovirran estimaatti käyttämällä erillistä aineistoa kullekin osakkeelle maksetuista osingoista.

Futuurihinnan käytöstä indeksin asemesta option hinnoittelussa on myös muita etuja. Futuurisopimus on itse asiassa Suomen markkinoiden ainoa instrumentti, joka edustaa FOX-osakeindeksin rakennetta vastaavaa osakeportfoliota. Tällaisen portfolion ostaminenhan täytyy olla mahdollista ilman kohtuuttomia transaktiokustannuksia, jotta riskittömän portfolion muodostaminen onnistuu. Futuurisopimuksen avulla voidaan hankkia myös ylimyytyä osakeportfoliota vastaava asema, mitä BS- tai B76-malli edellyttää. Varsinainen osakkeiden ylimyynti⁷ on Suomessa käytännössä vaikeaa.

⁷On huomattava, että edellä esitetty futuurin ja indeksin hintojen välinen arbitraasiehto perustuu osakkeiden ylimyyntiin. Ylimyyntin vaikeuden takia tämä ehto saattaa rikkoutua. Teemaan palataan luvussa 6, jossa empiiriset tulokset viittaavat siihen, että optioiden ja futuurin välinen teoreettinen yhteys pätee varsin hyvin, vaikka indeksin ja futuurin välinen yhteys rikkoutuisikin ajoittain.

3 OPTIOIDEN HINNOITTELU VAIHTOEHTOISTEN STOKASTISTEN PROSESSIEN TAPAUKSESSA

Luvussa hahmotellaan empiirisen tutkimusongelman käsittelemiseksi tarvittava teoreettinen kehikko. Aluksi käsitellään optioiden hinnoitteluperiaate, joka perustuu option hinnan riippumattomuuteen sijoittajan riskiasenteista. Tämän lähestymistavan turvin tarkastellaan option hinnan riippuvuutta osakeindeksin muutosten autokorrelaatiosta ja ehdollisesta heteroskedastisuudesta. Näiden stokastisten ominaisuuksien vaikutusta voidaan eritellä esiteltävän approksimatiivisen hinnoittelumallin avulla.

3.1 Cox & Ross -malli

Luvussa 2 käsiteltiin optioiden hinnoittelua arbitraasimahdollisuuksien eliminoitumisen pohjalta. Tämä on mahdollista ilman tietoa sijoittajien riskiasenteista silloin, kun osakkeen kurssikehitykseen sisältyvältä riskiltä voidaan suojautua täydellisesti osakkeella ja siihen perustuvalla optiolla käytävän jatkuvan kaupan avulla. Ylläpidettävän riskittömän portfolion tuoton täytyy tällöin arbitraasin toimiessa vastata markkinoiden riskitöntä korkoa. Tästä saadaan tapainoehto option hinnan ratkaisemiseksi.

Option hinnan riippumattomuus sijoittajien riskiasenteista käy ilmi siitä, että osakkeen tuottovaatimus, μ , ei esiinny option hinnan liikeyhtälössä (kaava 2.2.9). Kun tämä tulos otetaan lähtökohdaksi, voidaan option hinnoitteluongelmaa tarkastella uudesta näkökulmasta.

Tarkastellaan option hintaa maailmassa, jossa sijoittajat ovat asenteillaan riskineutraaleja. Tässä maailmassa kaikkien sijoituskohteiden tuottovaatimus vastaa markkinoiden riskitöntä korkoa riippumatta sijoituksen riskitasosta. Siten myös osto-option hinta saadaan diskonttaamalla sen erääntymishetken odotusarvo seuraavan kaavan mukaisesti:

$$\begin{aligned}
C_t &= \exp[-r(T-t)] E_t[\max\{S_T - K, 0\}] \\
&= \exp[-r(T-t)] \int_{-\infty}^{\infty} dF(S_T | S_t) \max[0, S_T - K], \\
&= \exp[-r(T-t)] \int_K^{\infty} (S_T - K) dF(S_T | S_t), \tag{3.1.1}
\end{aligned}$$

jossa $F(\cdot)$ on osakkeen kurssikehitystä kuvaavan prosessin generoima kertymäfunktio option erääntymishetkellä. Riskineutraalissa maailmassa kyseisen prosessin trendi, μ , vastaa riskitöntä korkoa, r .

Kappaleen alussa kerrattiin Blackin ja Scholesin (1973) argumentointi, jonka mukaan option hinta ei riipu sijoittajien riskiasenteista. Option hinta on siis aina sama riippumatta siitä, mitkä todelliset riskiasenteet ovat.¹ Siten riskineutraalisuuden asettamia ehtoja apuna käyttäen johdettu option hinta pätee yleisesti² (Cox & Ross (1976))!

Cox & Ross -mallin avulla option hinta voidaan ratkaista mille tahansa osaketuottoja kuvaavalle stokastiselle prosessille, jos voidaan osoittaa, että kyseisen prosessin tapauksessa riskittömän portfolion ylläpito jatkuvan kaupankäynnin avulla on mahdollista. Cox & Ross -malli korostaa sitä näkökulmaa, että option hintaan vaikuttaa keskeisesti sen perustana olevan osakkeen hinnan todennäköisyysjakauman muoto option päättymishetkellä.³

¹Tarkasti ottaen option hinta ei riipu suoraan sijoittajien riskiasenteista. Riskiasenteet vaikuttavat kuitenkin epäsuorasti siten, että ne määräävät osaltaan osakkeen tämän hetkisen, havaitun hinnan.

²Käy ilmi, että yhtälö 3.3.1 on yhtäpitävä option hinnan liikeyhtälön, 2.2.9, kanssa (Cox & Ross (1976)).

³On muistettava, että osakkeen hinnan odotusarvo määräytyy Cox & Ross -mallissa riskittömän tuottovaatimuksen mukaan. Kuten edellä on esitetty, tätä käytetään apuvälineenä, eikä riskitön tuottovaatimus suinkaan kuvaa osakkeiden todellista tuottovaatimusta.

Option hinta voidaan ratkaista analyytisesti Cox & Ross -argumentin mukaan vain silloin, kun tunnetaan option perustana olevan osakkeen hinnan todennäköisyysjakauma. Mikäli jakaumaa ei kyetä johtamaan analyytisesti, voidaan ratkaisu löytää numeerisesti simuloimalla (Boyle (1976)). Ongelmaksi jää se, ettei tiedetä, miten jakauman ominaisuudet vaikuttavat option hintaan. Jos esimerkiksi tarkasteltava jakauma on huipukkaampi kuin BS-mallin oletama lognormaalijakauma, millä tavalla tämä muuttaa option hintaa BS-hintaan verrattuna? Seuraavassa kappaleessa esitellään approksimatiivinen malli, jossa option hinta perustuu BS- (tai B76-) hintaan ja todellisen jakauman poikkeamiin lognormaalista jakaumasta.

3.2 Jarrow & Rudd -malli

Edellisen kappaleen Cox & Ross -argumentti painottaa sitä, että option hinta riippuu indeksin todennäköisyysjakauman muodosta. Tärkeimmät jakauman muotoa kuvaavat mitat ovat hajonta, vinous ja huipukkuus. Kyseiset mitat voidaan laskea jakauman neljän ensimmäisen momentin avulla. Neljä ensimmäistä momenttia approksimoivat varsin hyvin useimpien todennäköisyysjakaumien ominaisuuksia (Jarrow & Rudd (1982a)). Kiintoisa kysymys on se, miten option hinta muuttuu esimerkiksi B76-hintaan verrattuna, jos todellisen indeksijakauman momentit poikkeavat lognormaalin jakauman momenteista.

Jarrow ja Rudd ovat johtaneet approksimatiivisen kaavan, joka perustuu option hinnan Taylor-kehitelmiin jonkin lähtökohtana olevan jakauman ja todellisen jakauman neljän ensimmäisen momentin erotusten suhteen (Jarrow & Rudd (1982a)). Malli on johdettu käyttäen Cox & Ross -argumenttia siten, että molempien jakaumien odotusarvot on asetettu samoiksi. Mallin avulla käy myös ilmi, että jakauman hajonnan, vinouden ja huipukkuuden vaikutus option hintaan riippuu siitä, onko kyseessä plus-, miinus- vai tasaoptio. Seuraavassa keskitytään mallin tuloksiin. Malli on johdettu Jarrow & Ruddin artikkelissa (Jarrow & Rudd (1982a)).

Jarrow & Ruddin esittämä option hintafunktio on approksimaatio, jossa B76-kaavan olettamalla lognormaalilla jakaumalla approksimoidaan

indeksin todellista jakaumaa.⁴ Malli on muotoa:

$$\begin{aligned}
 C(F) = & C(A) + \exp(-rt)a(K)[k_2(F) - k_2(A)]/2! \\
 & - \exp(-rt)a'(K)[k_3(F) - k_3(A)]/3! \\
 & + \exp(-rt)a''(K)\{[k_4(F) - k_4(A)] + 3[k_2(F) - k_2(A)]^2\}/4! \\
 & + \epsilon(K),
 \end{aligned}$$

3.2.1

missä

$C(F)$	= option todellinen hinta
$C(A)$	= option B76-kaavalla laskettu hinta
$k_2(F), k_3(F)$ ja $k_4(F)$	= todellisen jakauman 2., 3. ja 4. kumulantti
$k_2(A), k_3(A)$ ja $k_4(A)$	= lognormaalisen jakauman 2., 3. ja 4. kumulantti
$a(K), a'(K), a''(K)$	= lognormaalisen jakauman tiheysfunktio sekä sen ensimmäinen ja toinen derivaatta
$\epsilon(K)$	= virhetermi, jonka ominaisuudet riippuvat todellisesta jakaumasta

Kaavassa 3.2.1 momentit esiintyvät kumulanttimuunnoksina.⁵ Kun approksimoivana jakaumana on lognormaalijakauma, kaava koostuu option Black-76 -hinnasta, kolmesta korjaustermistä, jotka tuovat B76-hinnan lähemmäksi option todellista hintaa, sekä virhetermistä. Korjaustermit perustuvat todellisen jakauman ja lognormaalisen jakauman momenttien erotuksiin. Korjaustermien etumerkit ja painot riippuvat lognormaalisen jakauman tiheysfunktion ja sen derivaattojen arvoista. Kuviossa 3.2.1 on esitetty kuvaajat näiden kertoimien funktioista option toteuttamishinnan suhteen.

Kaavaa sovellettaessa täytyy myös jakaumien toiset tunnusluvut eli keskihajonnat standardoida keskenään. Tämä voidaan suorittaa asetta-

⁴Periaatteessa kaava voidaan kehittää minkä tahansa approksimoivan jakauman ympärille.

⁵Neljän ensimmäisen kumulantin ja momentin väliset yhteydet ovat seuraavat: $k_1(F) = \alpha_1(F)$, $k_2(F) = \mu_2(F)$, $k_3(F) = \mu_3(F)$, $k_4(F) = \mu_4(F) - 3\mu_2(F)^2$, missä α_1 on ensimmäinen momentti ja μ_i , on i:nnes keskusmomentti (Kendall & Stuart (1977), s. 73).

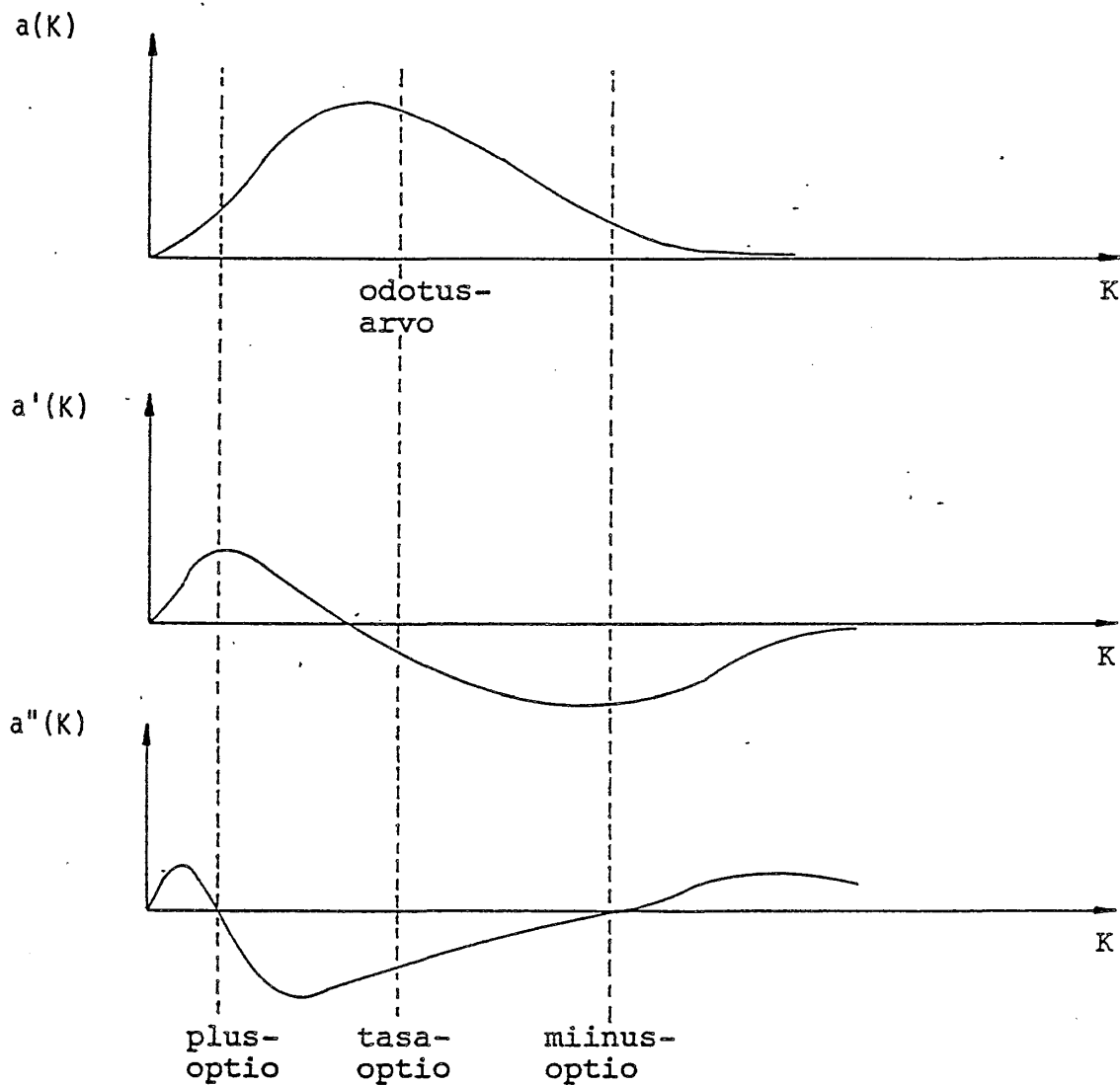
malla joko hetkelliset varianssit, eli $\sigma^2 dt$ kun $dt \rightarrow 0$, tai koko periodin varianssit, $\sigma^2 t$, samoiksi. Standardointitavan valinta vaikuttaa termin $C(A)$ arvoon ja korjaustermien tulkintaan. Jos approksimoivan ja todellisen jakauman koko periodin varianssit asetetaan samoiksi, ensimmäinen korjaustermi tulee nolaksi. Tällöin toinen ja kolmas korjaustermi mittaavat eroja jakaumien vinoudessa ja huipukkaudessa. Kolmansien momenttien positiivinen erotus merkitsee sitä, että todellinen jakauma on vinompi oikealle kuin approksimoiva jakauma. Jos neljänsien momenttien erotus on positiivinen, on todellinen jakauma huipukkaampi kuin approksimoiva jakauma. Kuvion 3.2.1 perusteella tasaoption tapauksessa toisen korjaustermien kerroin on positiivinen ja kolmannen negatiivinen. Siten option hinta muodostuu sitä suuremmaksi mitä vinompi todellinen jakauma on oikealle ja sitä pienemmäksi mitä huipukkaampi todellinen jakauma on.

Jos jakaumat standardoidaan asettamalla hetkelliset varianssit samoiksi, ei toista ja kolmatta korjaustermiä voida tulkita yhtä suoraviivaisesti kuin edellä. Tässä tapauksessa ensimmäinen korjaustermi, eli koko periodin varianssien erotus, dominoi (Jarrow & Rudd (1982a), luku 5).

Yleisesti ottaen Jarrow & Rudd -mallin on todettu parantavan teoreettisten hintojen osuvuutta sekä numeerisissa että empiirisissä testeissä (Jarrow & Rudd (1982a,b)). Samalla on tutkittu tarkemmin virhetermin riippuvuutta todellisesta jakaumasta ja keskihajontojen standardointitavan valinnasta (Jarrow & Rudd (1982a)).

KUVIO 3.2.1

Lognormaalin jakauman tiheysfunktion option toteuttamishinnan suhteen ($a(K)$) sekä sen ensimmäisen ($a'(K)$) ja toisen ($a''(K)$) derivaatan kuvaajat.⁶



⁶Jakauman odotusarvo on $S_0 \exp(rt)$, jossa S_0 on osakkeen tai osakeindeksin arvo tarkasteluhetkellä. Siten lognormaalin jakauman tiheysfunktion ja sen derivaattojen arvot tietyllä K :n arvolla heijastavat option hinnan ja sen toteuttamishinnan suhdetta.

3.3 GARCH-prosessit

Viime vuosina on saatu runsaasti näyttöä siitä, että osakkeiden tai osakeindeksien hintaprosessien ehdollinen varianssi ei ole vakio (Engle & Mustafa (1989)). Varianssin vaihtelua on pyritty selittämään muun muassa eri perusteiden valituilla eksogeenisillä muuttujilla. 1980-luvulla on tutkittu sellaisia stokastisia prosesseja, joiden ehdollinen varianssi on autoregressiivinen. Tulevien periodien varianssiin vaikuttavat sekä prosessissa itsessään tapahtuneiden yllätysten neliöt että varianssin omat viiveet. Prosesseja, joissa muuttujan ehdolliseen varianssiin vaikuttavat vakiotermin lisäksi toteutuneiden ennustevirheiden neliöiden viiveet, kutsutaan ARCH-prosesseiksi. Kun ehdollista varianssia selittävät myös varianssin omat viiveet, puhutaan GARCH-prosesseista. Yhtälöissä 3.3.1 on esitetty GARCH-prosessi yleisessä muodossaan:

$$y(t) = m(t) + e(t), \quad e(t) | I(t-1) \sim N[0, h(t)], \quad 3.3.1$$

jossa

$$h(t) = \text{par}(0) + \sum \text{par}(i) * e^2(t-i) + \sum \text{par}(j) * h(t-j),$$

$$i = 1, \dots, p \text{ ja } j = 1, \dots, n \text{ (Engle \& Bollerslev (1986))}.$$

Toisin sanoen selitettävän muuttujan y hetkellä t määrittelee vakio-termi $m(t)$ ja ennustevirhe $e(t)$. Ennustevirhe $e(t)$ on edellisellä periodilla käytettävissä olleen informaation perusteella jakautunut normaalisti odotusarvolla 0 ja varianssilla $h(t)$. Ennustevarianssin $h(t)$ määrittelevät puolestaan vakio $\text{par}(0)$ sekä e :n neliön että h :n painotetut viiveet.⁷

⁷Esitetään GARCH-mallin ehdollinen varianssi, $h(t)$, muodossa, joka havainnollistaa varianssin ARMA-rakennetta. Oletetaan esimerkin vuoksi, että $i=j=1$, eli kyseessä on GARCH(1,1)-tyyppinen prosessi (katso kappaleen 3.3 loppuosa). Olkoon siis $h(t) = \tau + \alpha e^2(t-1) + \beta h(t-1)$. Tämä voidaan esittää muodossa $h(t) = \tau + (\alpha + \beta)h(t-1) + \alpha[e^2(t-1) - h(t-1)]$ (Engle & Bollerslev (1986) käyttävät hieman toisenlaista muotoa). Termi $[e^2(t-1) - h(t-1)]$ kuvaa volatilititeetti-shokkia, ja kerroin α määrittelee sen vaikutuksen voimakkuuden tulevan periodin varianssiin. On huomattava, että GARCH-prosessin varianssin ARMA-määritelmässä on se ongelma, että termi $[e^2(t-1) - h(t-1)]$ on jakautunut välillä $[-h(t-1), \infty]$ (Engle & Mustafa (1989)).

ARCH- ja GARCH-mallien käyttö perustuu pikemminkin empiirisiin havaintoihin kuin eksakteihin teorioihin taloudellisten aikasarjojen käyttäytymisestä (Engle (1982)). On muun muassa havaittu, että prosessien suuret vaihtelut ja vastaavasti pienet vaihtelut liittyvät toisiinsa (McNees (1979)). Tietyn kokoinen yllätys lisää saman kokoisten yllätysten todennäköisyyttä. Jos taloudellisen aikasarjan tiedetään käyttäytyvän tällä tavoin, voidaan prosessin tulevaa varianssia ennustaa prosessin historian perusteella.

Alkuperäisen shokin vaikutus uusien shokkien syntyyn vähenee ajan myötä, ja ellei uusia yllätyksiä tapahdu, epävarmuutta kuvaava prosessin varianssi palautuu kohti pitkän aikavälin vakiota. Yhtälöissä 3.3.1 esiintyvät parametrit $\text{par}(i)$ määrittelevät sen, kuinka voimakkaasti yllätysten viiveet vaikuttavat seuraavan periodin varianssiin. Jos kaikki parametrit $\text{par}(i)$ ovat nolliä, yllätyksillä ei ole vaikutusta, ja siten prosessin varianssi on kiinteä. Parametrien $\text{par}(i)$ ja $\text{par}(j)$ summan suuruus määrittelee puolestaan sen, kuinka pitkään tapahtuneet yllätykset vaikuttavat tulevaan varianssiin.

Mikäli tapahtuneet yllätykset eivät häviä prosessin muistista, vaan ovat relevanttia informaatiota kaikille tuleville ennusteperiodeille, on GARCH-prosessi integroitunut varianssin suhteen. Prosessin varianssi ei palaudu kohti vakiota pitkällä aikavälillä, koska shokit systeemissä ovat pysyviä. Välttämätön ehto GARCH-prosessien integroituneisuudelle on se, että parametrien $\text{par}(i)$ ja $\text{par}(j)$ summa on yksi (Engle & Bollerslev (1986)).

Tarkastellaan mallia 3.3.1. Koska $h(t)$ voidaan esittää kaikkien siihen astisten ennustevirheiden painotettuna summana, kykenee tavallisesti seuraava GARCH(1,1)-malli kuvaamaan riittävällä osuvuudella todellista stokastista prosessia (Engle & Bollerslev (1986)):

$$\begin{aligned} y(t) &= m(t) + e(t), \quad e(t); I(t-1) \sim N[0, h(t)], \\ h(t) &= \text{par}(1) + \text{par}(2) * e^2(t-1) + \text{par}(3) * h(t-1) \end{aligned} \quad 3.3.2$$

Toisin sanoen ennustevirheen $e(t)$ ensimmäisen viiveen neliö ja ehdollisen varianssin ensimmäinen viive selittävät tyhjentävästi eh-

dollisen varianssin vaihtelun. Sovittamalla GARCH(1,1)-mallia osakkeiden ja osakeindeksien hintasarjoihin on havaittu, että parametrien $\text{par}(1)$ ja $\text{par}(2)$ summa on hyvin lähellä ykköstä (Engle & Mustafa (1989)). Integroitunut GARCH(1,1)-malli, eli IGARCH(1,1)-malli olisi siten muotoa:

$$h(t) = \text{par}(1) + \text{par}(2) \cdot e^2(t-1) + (1 - \text{par}(2)) \cdot h(t-1) \quad 3.3.3$$

Jos parametri $\text{par}(1)$ eroaa nolasta, sanotaan prosessin olevan integroitunut trendillä $\text{par}(1)$. Kuten seuraavassa kappaleessa huomataan, integroituneen GARCH(1,1)-mallin useamman periodin ennustemomentit voidaan ilmoittaa varsin yksinkertaisessa muodossa. Tämä helpottaa jatkossa option hinnoitteluongelman analysointia GARCH-prosessien tapauksessa. Valitettavasti integroituneisuuden tilastollista testaamista ei ole vielä lopullisesti selvitetty (Engle & Bollerslev (1986)).

GARCH-regressiomallin estimointi voidaan suorittaa joko pienimmän neliösumman (OLS) tai suurimman uskottavuuden (ML) menetelmää käyttäen. Tavallisesti käytetään ML-estimointia, jolla saavutetaan tiettyjä tehokkuusetuja (Engle (1982)). Luvun 5 liitteissä käsitellään hieman tarkemmin GARCH-mallien estimointiin liittyviä näkökohtia.

3.3.1 GARCH-in-mean

Osakehintojen aikasarjoista on löydetty evidenssiä sille, että ehdollinen varianssi $h(t)$ kykenee selittämään odotusarvoa (French, Schwert & Stambaugh (1987)). Termiä kutsutaan ARCH-in-mean tai GARCH-in-mean -termiksi sen mukaan, onko $h(t)$:n yhtälö ARCH- vai GARCH-muotoinen. Tällainen termi voidaan tulkita riskipreemioksi ja termin kerroin markkinoiden riskinkarttamisen astetta kuvaavaksi kertoimeksi. Kun selitettävä muuttuja, y , on tuottoaste, tulisi riskinkarttamiskertoimen olla positiivinen. Varianssin eli riskipitoisuuden noustessa sijoittajat vaativat korkeampaa tuottoa. Esimerkiksi GARCH(1,1)-in-mean -prosessin tapauksessa merkitään:

$$y(t) = m(t) + \text{par}(x) \cdot h(t) + e(t); I(t-1) \sim N[0, h(t)]$$

$$h(t) = \text{par}(0) + \text{par}(1) \cdot e^2(t-1) + \text{par}(2) \cdot h(t-1) \quad 3.3.1.1$$

Kun pyritään selittämään muutoksia laajapohjaisessa osakeindeksissä, jonka heilahtelut approksimoivat markkinariskiä, ARCH- ja GARCH-in-mean -termien käyttö on hyvin perusteltavissa. Sen sijaan yksittäisen osakesarjan hintakehityksen sisältävästä riskistä osa voidaan diversifioida pois ja vain osa johtuu markkinariskistä, jolta ei voida suojautua (Sharpe (1964)). Siten ei ole teoreettisesti oikein kytkeä yksittäisen osakesarjan ehdollista varianssia sijoittajien osaketuotoilta vaatiman riskipreemion vaihteluun.

ARCH- ja GARCH-prosessien ehdollinen varianssi, $h(t)$, on prosessin varianssin ennuste seuraavalle periodille. Varianssin ennuste pidemmille horisonteille riippuu ARCH- ja GARCH-termien viiverakenteesta ja kertoimista. Kysymys on siitä, että ehdollisen varianssin kasvu ei välttämättä ole pysyvää, vaan että ennustevarienssin odotetaan laskevan kohti jotakin vakiotasoa pitemmillä ennustehorisonteilla.⁸ Perinteinen, riskipreemiota käsittelevä portfolioteoria perustuu olettamukselle, että eri tuottokohteita kuvaavien prosessien varianssi- ja kovarianssirakenteet ovat stabiileja. ARCH- ja GARCH-in-mean -termien taloudellisessa tulkinnassa tulisi myös tästä syystä olla varovainen. Mikäli osakeindeksin muutoksia kuvaava GARCH-prosessi on integroitunut GARCH(1,1)-prosessi, GARCH-in-mean sopii kuitenkin varsin hyvin perinteiseen sijoituskohteiden hinnoitteluteoriaan (Engle & Bollerslev (1986), luku 9). Tämä johtuu siitä, että IGARCH(1,1)-prosessin ehdollisen varianssin odotusarvo kaikille horisonteille kasvaa lineaarisesti samaan tapaan kuin Ito-prosessin vakioinen varianssi.

⁸Paitsi integroituneen prosessin tapauksessa, katso ed. sivu.

3.4 Optioiden hinnoittelu GARCH-maailmassa

Monet tutkijat ovat käsitelleet optioiden hinnoittelua stokastisen volatiliteetin tapauksessa (Hull & White (1987), Wiggins (1987)). GARCH-maailmassa volatiliteetti on stokastinen, koska tulevaisuudessa toteutuvat ennustevirheet vaikuttavat volatiliteettiin. Stokastinen volatiliteetti tuo mukanaan riskikomponentin, jota vastaan ei voida suojautua käymällä jatkuvaa kauppaa optioilla ja perustana olevilla osakkeilla. Siten optioiden hinnoittelu arbitraasiperiaatteella ilman tietoa sijoittajien riskipreferensseistä ei ole mahdollista muuta kuin tietyissä erikoistapauksissa (Engle & Mustafa (1989)). Englen ja Mustafan (1989) esimerkkiä seuraten jatkossa lähdetään kuitenkin siitä, että riskipreferensseistä vapaan hinnoittelun soveltaminen on perusteltua.

GARCH-prosessin vähintään kahden periodin päähän ulottuva ehdollinen jakauma on huipukkaampi kuin normaalijakauma. Jakauman huipukkuus puolestaan vaikuttaa option teoreettiseen hintaan. Seuraavassa tarkastellaan Jarrow & Rudd -kaavan avulla option hinnoittelua integroituneen GARCH(1,1)-prosessin tapauksessa.

Engle & Bollerslev (1986) esittelevät artikkelissaan GARCH-prosessin ennustevirheiden ehdollisia, korkeampia momentteja. Näiden avulla voidaan tarkastella prosessin ennustevirheiden ehdollisen jakauman poikkeamista normaalijakaumasta. Jotta kyseisen artikkelin tuloksia voitaisiin käyttää Jarrow & Ruddin kaavassa, täytyisi GARCH-momentit kyetä ilmaisemaan lognormaalista jakaumaa vastaavina muunnoksina. Tämä johtuu siitä, että osakeindeksin logdifferenssien oletetaan noudattavan joko Ito-prosessia tai GARCH-prosessia. Osakeindeksin taso on Ito-prosessin tapauksessa jakautunut lognormaalisti, mutta GARCH-prosessin tapauksessa tasomuuttujan jakaumaa ei yleisesti ottaen tunneta. Osittain tästä johtuvista hankaluuksista jatkossa päädytään käyttämään Monte Carlo -simulointia eikä Jarrow & Rudd -kaavaa.

Ito-prosessin ja integroituneen GARCH(1,1)-prosessin momentteja voitaneen kuitenkin vertailla Jarrow & Rudd -mallin hengessä, jotta

saadaan karkea kuva siitä, mihin suuntaan jakauman GARCH-ominaisuudet muuttavat option hintaa. Seuraavassa tarkastelussa on syytä kiinnittää huomiota käsitteiden "prosessin ehdollinen momentti" ja "prosessin virhetermin ehdollinen momentti" eroon. Engle & Bollerslevin artikkelissa esitetään GARCH-prosessin virhetermin, $e(t+s)$, ehdolliset momentit hetkellä t käytettävissä olevan informaation perusteella, kun $s = 1, 2, \dots$. Prosessin ehdolliset momentit hetkellä t periodille $t + s$ saadaan virhetermien $e(t+i)$, $i = 1, \dots, s$, momenttien kumulatiivisina summina. Prosessin varianssin stokastisuuden takia ilmoitetut ehdolliset momentit ovat odotusarvoja.

Taulukossa 3.4.1 esitetään vertailu Ito-prosessin ja integroituneen GARCH(1,1)-prosessin toisen ja neljännen keskusmomentin odotusarvoista hetkellä t periodin s päähän. Koska molemmat jakaumat ovat symmetrisiä, kolmannet momentit ovat nollia.

TAULUKKO 3.4.1 Ito- ja IGARCH(1,1)-prosessien varianssit ja 4. keskusmomentit hetkellä t horisontille s , kun $\sigma^2 = h(t+1)$, eli prosessien hetkelliset varianssit on asetettu yhtäsuuriksi (Engle & Bollerslev (1986), luku 9).

	Varianssi	4. keskusmomentti ⁹
Ito	$\text{Var}[y(t)] = \sigma^2 s$	$E_t[\sum e^4(t+i)] = k\sigma^4 s$
IGARCH(1,1)	$\text{Var}[y(t)] = sh(t+1)$	$E_t[\sum e^4(t+i)] =$ $E_t\{\sum kE_t[h^2(t+s)]\},$

missä $E_t[h^2(t+s)] = k\{[1+(k-1)\alpha^2]^{s-1} h^2(t+1)\}$ ja $\alpha = \text{par}(2)$

IGARCH(1,1)-prosessin virhetermin ehdollisen varianssin odotusarvo on sama ennusteperiodista riippumatta, eli ($E_t[h(t+s)] = h(t+1)$). Siksi prosessin varianssi muodostuu samaksi kuin Ito-prosessin (Engle & Bollerslev (1986)). Sen sijaan IGARCH(1,1)-prosessin neljäs momentti muodostuu sitä suuremmaksi Ito-prosessin neljättä moment-

⁹Kaikki summukset (\sum) käyvät $i = 1, \dots, s$.

tia, mitä pitempi on ennustehorisontti. Koska prosessien varianssit ovat samat, on IGARCH(1,1):n ehdollinen jakauma huipukas.

IGARCH(1,1)-prosessin tapauksessa Jarrow & Rudd -kaavan toisiin ja kolmansiin momentteihin perustuvat korjaustermit tulevat nolliksi, mutta neljänsiin momentteihin perustuva korjaustermi saa nollasta poikkeavan arvon. Tämän termin etumerkki riippuu kertoimena olevan lognormaalisen tiheysfunktion toisen derivaatan arvosta. Kuten taulukosta 3.2.1 nähdään, kyseisen kertoimen arvo on tasaoptiolla negatiivinen, joten koko korjaustermin arvo on tällöin negatiivinen. IGARCH(1,1)-prosessin tapauksessa lähellä tasaoptiota olevien optioiden arvo muodostuu pienemmäksi kuin vastaava Black-76 -arvo, eli jakauman huipukkuus alentaa kyseisten optioiden hintaa. Ainoastaan vahvat miinus- ja plusoptiot saavat B76-hintaa korkeamman arvon, koska tällaisilla optioilla termi $a''(K)$ on positiivinen.

Mikäli integroitunut GARCH(1,1)-variassi sisältää vakiotermin, on $E_t[h(t+s)] = s \cdot \text{par}(1) + h(t+1)$.¹⁰ Prosessin virhetermin ehdollisen varianssin odotusarvo kasvaa sitä suuremmaksi mitä pitempi ennustehorisontti on. Prosessin ehdollisen varianssin odotusarvo kumuloituu periodin $t + s$ päähän suuremmaksi kuin ilman trendiä integroituneen GARCH(1,1)-prosessin ja verrattavan Ito-prosessin variassi. Jarrow & Rudd -kaavan varianssien erotukseen perustuva korjaustermi tulee positiiviseksi. Empiiristen tulosten perusteella osakesarjoja ja -indeksejä kuvaavien GARCH-prosessien varianssiyhtälöiden vakio-termit ovat kuitenkin yleensä hyvin lähellä nollaa (Engle & Mustafa (1989), luku 2).

3.5 Osakeindeksin muutosten autokorrelaatio ja sen vaikutus optioiden hinnoitteluun

Osakehintojen muutosten autokorrelaatiofunktio mittaa tietyn aikavälin päässä toisistaan olevien muutosten välistä riippuvuutta. Ha-

¹⁰Tällöin GARCH-prosessin sanotaan olevan integroituneen trendillä (integrated with trend).

vaittu positiivinen tai negatiivinen autokorrelaatio on perinteisesti tulkittu siten, että osakemarkkinat eivät ole täysin tehokkaat.¹¹ Toisaalta on esitetty argumentteja, joiden mukaan autokorrelaation ei välttämättä tarvitse merkitä tehottomuutta (Fama & French (1986a,b)). Seuraavassa käsitellään lyhyesti osakeindeksin autokorrelaatiosta tehtyjä huomioita.

Yksi syy siihen, miksi osakeindeksi saattaa olla autokorrelloitunut, vaikka yksikään siihen kuuluva osake ei osoittaisi autokorrelaatiota, on indeksin epäsynkronisuus. Tämä tarkoittaa sitä, että indeksin arvoon hetkellä t laskettavista osakkeiden noteerauksista osa saattaa olla peräisin hetkeltä $t-1$ tai sitäkin aiemmilta periodeilta. (Berglund, Liljebloom & Hedvall (1988)). Toisaalta on havaittu myös epäsynkronisuudesta riippumatonta autokorrelaatiota.¹²

Vaikka yksittäinen osakesarja olisikin täysin puhdas autokorrelaatiosta, saattavat eri osakesarjojen väliset riippuvuudet selittää osakeindeksin autokorrelaatiota (Lo & McKinley (1989)). Esimerkiksi suuryrityksen osakkeen keskimääräistä suurempi arvon nousu hetkellä t saattaa merkitä keskimääräistä suurempaa arvonnousua jonkin pienyrityksen osakkeessa hetkellä $t+1$. Kyse on siis positiivisesta, ristikkäisestä autokorrelaatiosta. Tämä löydös on merkittävä, sillä tähän astinen tutkimus on keskittynyt lähinnä yksittäisen osakkeen tai osakeindeksin tuottojen tarkasteluun (Lo & McKinley (1989)).

Kiintoisa osakekurssien autokorrelaatiota koskeva havainto liittyy viime aikoina kovasti huomiota saaneeseen mean reversion -hypotee-

¹¹Useimmat USA:n aineistolla tehdyt tutkimukset ovat itse asiassa havainneet osaketuottojen olevan autokorreloimattomia. Tämä on vastaavasti esitetty evidenssinä osakemarkkinoiden tehokkuuden puolesta (Fama (1970)).

¹²Suomen osakemarkkinoita koskevassa tutkimuksessa Berglund ja Liljebloom (1988) viittaavat siihen, että indeksin autokorrelaation syynä voi olla yksittäisten osaketuottojen autokorrelaatio. Toisaalta he huomauttavat, että julkihuutoon perustuva kaupankäyntijärjestelmä, jossa osakkeita huutokaupataan tietyn järjestyksen mukaan, on myös potentiaalinen autokorrelaation aiheuttaja. Yleisesti ottaen kaupankäynnin verraten vähäinen määrä on Suomen osakemarkkinoiden erityispiirre, jonka takia hinnanmuodostus saattaa olla epäluotettavaa.

siin (Poterba & Summers (1988)). Tämä tarkoittaa sitä, että osakekurssit seuraavat pitkällä aikavälillä jotakin keskimääräistä trendiä, mutta saattavat lyhyemmillä periodeilla poiketa tältä uralta. Ilmiö näkyy siten, että indeksimuutokset ovat positiivisesti autokorreloituneet lyhyillä viiveillä ja negatiivisesti autokorreloituneet hyvin pitkillä viiveillä. Poterba & Summersin (1988) tekemässä kansainvälisessä vertailussa Suomen aineistossa ei tosin voida havaita negatiivista autokorrelaatiota pitkillä viiveillä, mutta sen sijaan positiivista autokorrelaatiota lyhyillä viiveillä (heidän käyttämänsä markkinaindeksin kuukausittaiset tuotot olivat positiivisesti autokorreloituneet).

Poterba & Summers (1988) esittävät vaihtoehtoisia, taloudellisia selityksiä havaitsemalleen ilmiölle.¹³ Lo & Kinley (1989) tyytyvät puolestaan tekemänsä havainnon toteamiseen. Tässä työssä ei ole tarkoitus puuttua tarkemmin näiden löydösten taloudelliseen tulkintaan, vaan keskittyä pelkästään optioiden hinnoitteluun osakeindeksin ollessa autokorreloitunut.

Autokorreloituneelle osakeindeksille perustuvaa indeksifutuuria voidaan pitää alustavana mittarina sille, johtuuko osakeindeksin autokorrelaatio puhtaasti teknisistä syistä (kuten epäjatkovasta kaupankäynnistä tai kaupankäyntijärjestelmästä) vai mahdollisesti markkinoiden tehottomuudesta.¹⁴ Esimerkiksi Suomen Optiomeklarit Oy:n markkinoilla futuurilla käydään jatkuvaa puhelinvälitykseen perustuvaa kauppaa koko pörssipäivän ajan. Jos markkinat ovat tehokkaat, heijastuu uusi informaatio esteettä futuurin hintaan, vaikka se ei heijastuisikaan välittömästi täydellisenä osakeindeksin arvoon. Puhtaasti teknisistä syistä johtuvan osakeindeksin autokorrelaation ei siis pitäisi johtaa indeksifutuurin autokorrelaatioon. Mikäli osake- ja johdannaismarkkinoiden sijoittajajoukko oletetaan homogeeniseksi, toimii edellinen argumentti myös toiseen suuntaan: tehokas indeksi-

¹³Poterba ja Summers (1988) päätyvät tukemaan mean reversion -ilmiön tulkintaa, joka luopuu perinteisestä tehokkaiden markkinoiden olemuksesta.

¹⁴Katso alaviite no. 1 sivulla 7.

futuuri implikoi osakeindeksin autokorrelaation johtuvan pelkästään teknisistä ongelmista. Asiaa koskeviin empiirisiin tuloksiin palataan kappaleessa 5.2.

3.5.1 Autokorreloituneen prosessin odotusarvo

Berglund, Liljeblom ja Hedvall (1988) ovat käsitelleet autokorrelaation vaikutusta optioiden hintoihin sitä kautta, että indeksin odotettua muutosta voidaan ennustaa autokorrelaatorakenteen perusteella. Tämä merkitsee sitä, että hetkellä t , jota edeltää indeksin keskimääräistä suurempi, positiivinen muutos, optiosta kannattaa maksaa enemmän kuin sen hetkinen Black-76 -hintaa. Vastaavasti keskimääräistä suuremman negatiivisen indeksin muutoksen edeltäessä kannattaa maksaa B76-hintaa vähemmän. Berglund, Liljeblom & Hedvall eivät käsittele asiaa analyttisen kaavan avulla vaan pyrkivät selvittämään, tuottaako autokorrelaation huomioimiseen perustuva simuloitu kaupankäyntistrategia merkittäviä ylivoittoja.

Tarkastellaan integroitunutta, ensimmäisen asteen autoregressiivistä prosessia. Jos $\ln I(t) - \ln I(t-1) = y(t)$, missä I on osakeindeksin taso, ja

$$y(t) = \delta + \phi y(t-1) + \epsilon(t), \quad 3.5.1.1$$

missä $\epsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$, niin $y(t)$ noudattaa ARI(1,1,0)-prosessia. Prosessin ennuste tasomuuttujalle I hetkellä t periodin s päähän on:

$$\hat{I}(s) = I(t) + \hat{y}(t+1) + \hat{y}(t+2) + \dots + \hat{y}(t+s), \quad 3.5.1.2$$

missä symboli $\hat{}$ merkitsee odotusarvoa. Muuttujan I odotusarvo on siis lähtötaso plus tulevien periodien kumuloidut, odotetut muutokset. Odotettuihin muutoksiin vaikuttaa tietenkin viimeisin realisoitunut muutos, mutta tämän vaikutus häviää ennusteperiodin lähestyessä ääretöntä, sillä

$$\hat{y}(t+s) = \phi^s y(t) + (\phi^{s-1} + \dots + \phi + 1)\delta,$$

eli

3.5.1.3

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{y}(t+s) = \delta/(1-\phi)$$

Mikäli $y(t) = \delta/(1-\phi)$, eli vastaa keskimääräistä muutosta, on

$$\hat{I}(s) = I(t) + s\delta/(1-\phi).$$

3.5.1.4

Jos taas $y(t)$ on keskimääräistä muutosta joko suurempi tai pienempi, on ennuste, $\hat{I}(t+s)$, vastaavasti tietyn vakion verran korkeampi tai matalampi. Toisin sanoen, jos verrataan ARI(1,1,0)-prosessia ja Ito-prosessia, joiden trendit ovat samat, niiden tasomuuttujalle antamat ennusteet poikkeavat toisistaan. Poikkeaman suuruus ja etumerkki riippuvat differenssin edellisestä viiveestä sekä autoregressiivisen termin kertoimesta. Poikkeama lähestyy tiettyä vakiota ennustehorisontin kasvaessa äärettömäksi.

Kun option hinta ratkaistaan simuloinnilla, joka perustuu Cox & Ross -argumenttiin, voidaan autokorrelaation vaikutus indeksijakauman odotusarvoon ja sitä kautta option hintaan huomioida kontrolloidulla tavalla.

3.5.2 Autokorreloituneen prosessin varianssi

Tässä kappaleessa selvitetään lyhyesti, miten autokorrelaatio vaikuttaa indeksituottojen todennäköisyysjakauman hajontaan ja sitä kautta optioiden hintaan. Jos indeksin aikasarjan perättäiset muutokset ovat positiivisesti autokorreloituneet, kasvaa indeksitason ennusteen varianssi epälineaaraisesti ja nopeammin kuin puhtaan satunnaiskulkuprosessin varianssi. Jarrow & Rudd -kaavan ensimmäinen korjaustermi saa siten positiivisen arvon, joten todellinen option hinta on korkeampi kuin B76-hinta. Ilman Jarrow & Rudd -kaavan antamaa tulkintaakin voidaan B76-kaavan perusteella todeta, että option hinta muodostuu sitä korkeammaksi, mitä korkeampi on option päättymispäivään asti odotettu osakeindeksin volatilitteetti.

Edellisessä kappaleessa esitellyn ARI(1,1,0)-prosessin tasomuuttujan, I , ennustevarianssi on muotoa:¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(s)] &= \text{Var}[y(t+s)] \\ &= \{(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{s-1})\epsilon(t+1) + \dots + \\ &\quad (1 + \phi)\epsilon(t + s - 1) + \epsilon(t+s)\}^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=0}^{s-i} \phi^j \right)^2 \end{aligned} \quad 3.5.2.1$$

(Pindyck & Rubinfeld (1981), s. 566).

Tasomuuttujan varianssi kasvaa epälineaarisesti nopeammin kuin puhtaan satunnaiskulkuprosessin varianssi, joka kasvaa lineaarisesti suhteessa ennusteperiodin pituuteen, eli on $\sigma^2 s$. Prosessien varianssien suhteen kehittymistä ennustehorisontin pidentyessä käsitellään liitteessä 2.

Koska korkeampi varianssi implikoi yksiselitteisesti korkeampaa option hintaa, ovat option hinnat positiivisesti autokorreloituneen prosessin tapauksessa kauttaaltaan kalliimpia verrattuna tilanteeseen, jossa perustana oleva prosessi ei ole autokorreloitunut. Autokorrelaatio kykenee tarjoamaan siten rationaalisen selityksen havaittujen option hintojen näennäiseen yliarvostukseen.

¹⁵Koska $y(t+s) = I(s) - I(t)$, on $\text{var}[y(t+s)] = \text{var}[I(s)]$, sillä $I(t)$ on ennustettavan muutoksen vakioinen lähtötaso.

4 EMPIIRINEN TUTKIMUSONGELMA JA KÄYTETTÄVÄ AINEISTO

4.1 Empiirisen tutkimusongelman täsmentäminen

Työn tavoite oli alunperin kaksitahoinen. Toisaalta haluttiin käsitellä optioiden hinnoitteluongelmaa GARCH-prosessien tapauksessa ja toisaalta oli tarkoitus tutkia Suomen optiomarkkinoiden hintojen määräytymistä suhteessa teoreettisiin hintoihin. FOX-indeksissä havaittu autokorrelaatio-ongelma haluttiin ottaa selvitykseen mukaan, joten sen sekä ehdollisen heteroskedastisuuden yhteisvaikutusten tarkastelu johti lopulta Monte Carlo -simulointeihin.

Tutkimusongelma voidaan tiivistää seuraavasti: kuinka hyvin Black-76 -mallin antamat teoreettiset option hinnat vastaavat Suomen Optiomeklarit Oy:n noteeraamia, toteutuneita optioiden hintoja, kun teoreettiset hinnat lasketaan käyttämällä FOX-indeksin aikasarjasta es-timoitua päivittäistä volatilitteettiä?¹ Voidaanko toisenlaisella mallilla parantaa teoreettisten hintojen osuvuutta todellisiin hintoihin?

Aiemmassa selvityksessä on havaittu, että optioiden perustana olevasta osakeindeksistä laskettu historiallinen, päivittäinen volatilitteetti on ollut systemaattisesti alemmalla tasolla kuin optioista Black-76 -mallilla laskettu implisiittinen volatilitteetti (KOP (1988)).² Tämän työn empiirisen osan alussa vahvistetaan sama havainto. Tällainen tasoero voi johtua joko optioiden systemaattisesta ylihinnoittelusta, puutteellisesta hinnoittelumallista tai mallissa käytetyn volatilitteettiestimaatin harhaisuudesta.

Indeksimuutosten empiirisen prosessin pohjalta laskettuja teoreettisia option hintoja verrataan havaittuihin FOX-optioiden hintoihin. Vastaavasti verrataan Black-76 ja Black & Scholes -malleilla

¹päivittäisellä volatilitteetillä tarkoitetaan tässä liukuvan keskijohannon menetelmällä laskettua volatilitteettiä.

²KOP:n selvitys koski ajanjaksoa 2.5.1988 - 31.12.1988.

laskettuja optioiden hintoja havaittuihin hintoihin. Eri mallien tekemiä suhteellisia hinnoitteluvirheitä analysoidaan yksinkertaisin menetelmin.

4.2 Suomen Optiomeklarit Oy:n markkinoilla noteerattavat sijoitusinstrumentit

Tässä kappaleessa esitellään aluksi Suomen Optiomeklarit Oy:n markkinoilla kaupattavat indeksipohjaiset johdannaisinstrumentit. Sen jälkeen yksilöidään tutkimuksen empiirisessä työssä käytettävä data. Viimeisessä luvussa keskustellaan seikoista, jotka vaikuttavat datan tulkintaan ja tulosten analysointiin.

Suomen Optiomeklarit Oy:n eli SOMin standardoimat indeksioptiot ja -futuurit perustuvat FOX-osakeindeksiin. Indeksien muodostavat Helsingin Arvopaperipörssin 25 vaihdetuinta osaketta.³

FOX-indeksille noteerataan pitkää ja lyhyttä futuurisopimusta. Tämä on järjestetty siten, että markkinoiden alkaessa avattiin kaupankäynnille yksi neljä kuukautta ja yksi kaksi kuukautta voimassa ollut sopimus. Tämän jälkeen on kunkin futuurin erääntyessä avattu uusi, neljän kuukauden sopimus. Täten markkinoilla on aina kaksi FOX-futuuria, joiden jäljellä olevien voimassaoloaikojen ero on kaksi kuukautta.

Uutta indeksioptiota avattaessa avataan aina sekä osto- että myyntioptio, jotka ovat maturiteetiltaan ja toteuttamishinnaltaan identtiset. Markkinoilla on aina maturiteetiltaan kahdenlaisia indeksioptioita, joiden päättymispäivät ovat samat kuin indeksitermiineillä. Saman pituisia optioita on ollut yleensä neljästä kuuteen kappaletta. Nämä eroavat toisistaan toteuttamishintansa perusteella.

³FOX-indeksiin kuuluvat osakkeet päivitetään puolivuositain, jolloin indeksiin valitaan edeltävän puolivuotiskauden päivittäiseltä mediaanivaihdoltaan 25 vaihdetuinta osaketta. Mediaanin käytöllä kriteerinä keskiarvon sijaan pyritään siihen, että indeksiin kuuluu osakkeita, joilla tehdään kauppaja tasaisen vilkkaasti.

Toteuttamishinnat on porrastettu 20 indeksipisteen välein. Uusia optioita avattaessa yksi optio asetetaan toteuttamishinnaltaan mahdollisimman lähelle FOX-indeksin sen hetkistä arvoa ja kaksi optiota sen molemmille puolille.

Kaikki FOX-indeksille perustuvat optiot ja futuurit erääntyvät aina erääntymiskuukauden neljäntenä perjantaina. Mikäli tämä ei ole pörssipäivä, tapahtuu erääntyminen edellisenä pörssipäivänä. Erääntymisen jälkeen uusien sarjojen noteeraus aloitetaan seuraavana pörssipäivänä. Koska indeksi-optiot ovat eurooppalaisia, tapahtuu optioiden toteutus automaattisesti. Indeksioptiot ja -futuurit eivät oikeuta missään tilanteissa indeksin pohjana olevien osakkeiden omistusoikeuteen. Johdannaisinstrumenttien toteutus suoritetaan tässä tapauksessa nettoarvontilityksenä, eli instrumentin päättymispäivän indeksin arvon ja toteuttamishinnan (tai futuurilla indeksin ja futuurin kaupantekohinnan) välisenä erona.

4.3 Tilastoaineisto

Tutkimuksen kohteena oleva aineisto koostuu Suomen Optiomeklarit Oy:n markkinoilla noteerattavista indeksioptioiden ja -futuuriain hinoista sekä FOX-indeksin arvoista. Data käsittää päivittäiset sulkemiskurssit periodilta 2.5.1988 - 8.6.1989. Tarkasteltavana on siten karkeasti ottaen SOMin ensimmäinen toimintavuosi, sillä markkinat avattiin 2.5.1988.

Data sisältää FOX-indeksin sekä molemmat futuurisopimukset koko periodille. Optioiden hinnat muodostavat kolme paria aikasarjoja, joissa parin muodostavat toteuttamishinnaltaan ja maturiteetiltaan identtiset osto- ja myyntioptiot.⁴ Sarjojen muodostamisessa on noudatettu kahta periaatetta. Kahdella aikasarjaparilla on aina sama

⁴Ensimmäinen sarjapari sisältää koko tarkasteluperiodin 2.5.1988 - 8.6.1989, eli 2x282 havaintoa. Toinen sarjapari sisältää havainnot väliltä 25.5.1988 - 8.6.1989, eli 2x265 havaintoa, ja kolmas väliltä 27.6.1988 - 8.6.1989, eli 2x243 havaintoa. Sarjat sisältävät yhteensä 790 sekä osto- että myyntioption hintaa.

option maturiteetti siten, että pari vaihtuu, kun tätä maturiteettia on jäljellä noin kuukausi. Toiseksi, optiot on valittu aikasarjoihin siten, että niiden toteuttamishinnat pyrkivät aina "haarukoimaan" sen hetkisen FOX-indeksin arvon.

Kunkin option ja futuurin jäljellä oleva voimassaoloaika on koottu aikasarjaksi siten, että jäljellä oleva aika ilmaistaan kokonaisina päivinä. Kaavoissa tämä luku on jaettu 365:llä, jolloin yksi vuosi vastaa lukua yksi (1). Optioiden toteuttamishinnat on järjestetty vastaavasti aikasarjoiksi.

Kutakin optiohintojen aikasarjaparia vastaan on muodostettu futuurien hinnoista aikasarjat siten, että option ja futuurin maturiteetit ovat aina yhtä pitkä. Tämä on välttämätöntä B76-mallin käytön kannalta, sillä mallissa käytetyn option ja futuurin päättymispäivän tulee olla sama. Muuten ei voida sanoa, että futuuri heijastaa option jäljellä olevana voimassaoloaikana odotettuja osingonmaksuja.

Markkinoiden riskittömänä korkona käytetään yhden (1) kuukauden Helibor-korkoa. Toinen mahdollisuus olisi käyttää kolmen (3) kuukauden Heliboria.⁵ Näiden korkojen välinen marginaali on kuitenkin keskimäärin niin pieni, että valinta ei vaikuta juuri tuloksiin.

Jotta arvopaperin ja sille perustuvan johdannaisinstrumentin hintojen suhdetta voidaan luotettavasti tutkia, täytyy käytettävän aineiston olla synkronoitua. Tämä tarkoittaa sitä, että tutkittavat option tai futuurin noteeraukset todella heijastavat markkinoiden noteeraushetkellä käyttämiä osakeindeksin hintoja. Mikäli indeksin arvonmuutosten oletetaan heijastuvan ilman viivettä optioiden ja futuurien arvoon, käytettävien havaintojen tulisi olla täsmälleen samalta hetkeltä.

Tähän työhön käytettävissä olevat havainnot optioiden, futuurien ja indeksin hinnoista eivät ole täysin synkronoituja, vaikka ne kaikki

⁵Kuuden (6) kuukauden tai sitä pidempien markkinakorkojen käyttö ei ole perusteltua, koska optioiden ja futuurien pisin maturiteetti on neljä kuukautta.

ovat päivän päättäviä kurssseja. Indeksien ja johdannaisinstrumenttien välinen aikaero on 15 minuuttia siten, että edellinen on hetkeltä klo 15.15 ja jälkimmäiset hetkeltä 15.00. Koska lopullisessa tarkastelussa ollaan kiinnostuneita systemaattisesta tasoerosta todellisten ja teoreettisten option hintojen välillä, ei datan jonkin asteinen epäsynkronisuus välttämättä heikennä tulosten luotettavuutta.

5 FOX-INDEKSIIN EMPIIRINEN PROSESSI JA SEN VOLATILITEETTI

Siirrytään tarkastelemaan empiiristä aineistoa luvussa 3 käsitellyn teoriakehikon pohjalta. Aluksi estimoidaan FOX-indeksin stokastiset ominaisuudet olettaen, että se noudattaa GARCH(1,1)-prosessia. Indeksimuutosten autokorrelaatio huomioidaan sisällyttämällä prosessiin AR(1)-termi. Estimoidun prosessin volatiliteetin aikasarja on FOX-indeksin ex post laskettu päivittäinen volatiliteetti. Sitä verrataan yleisesti käytettyyn, liukuvan keskihajonnan menetelmällä laskettuun historialliseen volatiliteettiin. Tämän jälkeen lasketaan implisiittinen volatiliteetti optioiden hinnoista käyttämällä B76-kaavaa.

5.1 FOX-indeksin volatiliteetti

Ohessa on kuvio FOX-indeksin kehityksestä tarkasteluperiodilla 2.5.1988 - 8.6.1989. Tavanomaisin tapa mitata indeksin volatiliteettia, on laskea indeksin logaritmoitujen muutosten liukuva keskihajonta. Jos keskihajonta lasketaan tarkasteluhetkeä edeltävistä havainnoista, se on luonteeltaan historiallinen volatiliteetti. Menetelmän avulla saadaan kuva volatiliteetin vaihtelusta. Ongelmana on kuitenkin se, monestako edeltävästä havainnosta keskihajonta pitäisi laskea. Kaavan muodossa:

$$LK[y(t)] = \text{sqrt}\left\{\left[\frac{\sum y(t-i)^2}{k} - \left[\frac{(\sum y(t-i))}{k}\right]^2\right\}, \quad 5.1.1$$

$$i = 0, \dots, k-1,$$

jossa

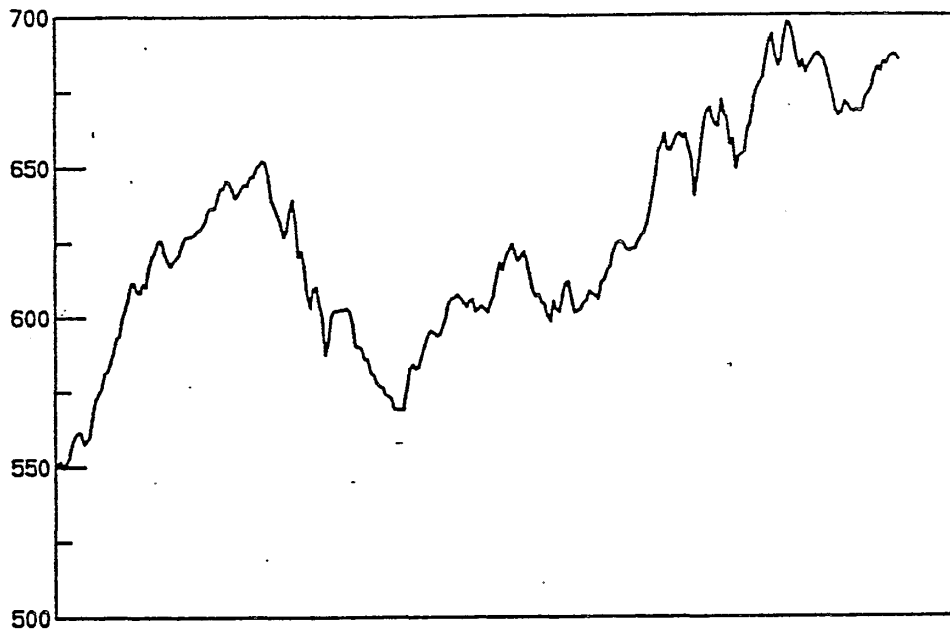
$y(t)$ = indeksin päivittäinen logaritminen muutos

k = liukuvan keskihajonnan jakso

sqrt = neliöjuurifunktio

KUVIO 5.1.1

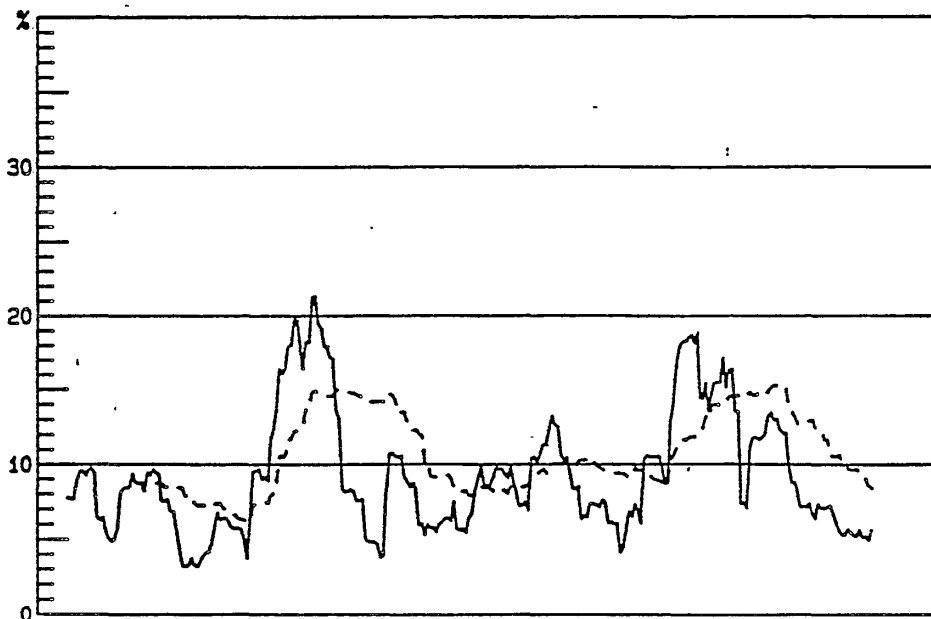
FOX-indeksi ajalta 2.5.1988 - 8.6.1989



KUVIO 5.1.2

FOX-indeksin päivittäisten muutosten historiallinen volatilitteetti¹ ajalta 2.5.1988 - 8.6.1989:

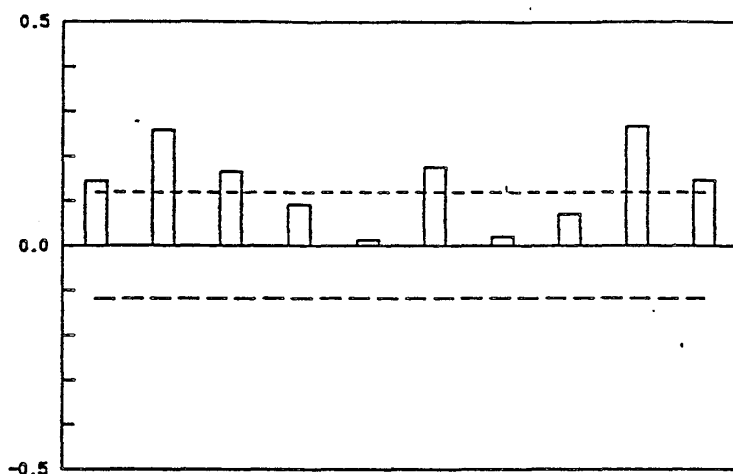
— 10 päivän liukuva keskihajonta
 - - - 40 päivän liukuva keskihajonta



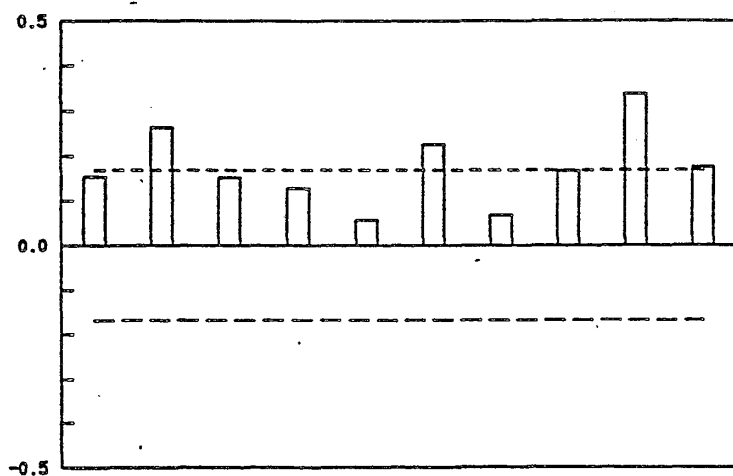
¹Jatkossa kaikki kuvioissa esiintyvät volatilitteettisarjat on ilmaistu vuositason keskihajontoina prosenttiyksiköissä.

TAULUKKO 5.1.2 FOX-indeksin päivittäisten muutosten neliöiden autokorrelaatiofunktio

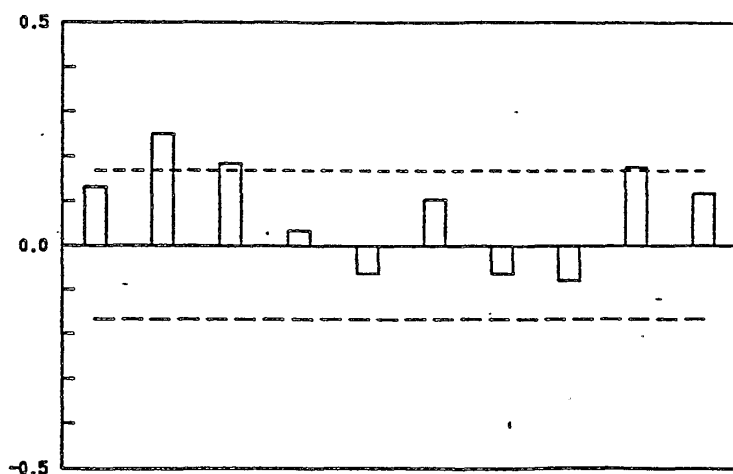
a) koko tarkasteluperiodi: 2.5.1988 - 8.6.1989,
5 %:n merkitsevyysrajat = +/- 0.1191



b) tarkasteluperiodin alkupuolisko: 2.5.1988 - 15.11.1988,
5 %:n merkitsevyysrajat = +/- 0.1684



c) tarkasteluperiodin loppupuolisko: 16.11.1988 - 8.6.1989
5 %:n merkitsevyysrajat = +/- 0.1684



FOX-indeksin liukuva keskihajonta tarkasteluperiodilla on laskettu seuraavassa sekä 10 että 40 päivän viivästetyllä liukumajaksolla.² Tulokset ilmoitetaan vuositason keskihajontana prosenttiyksiköissä (kuvio 5.1.2).

Kuten kuvioista 5.1.2 nähdään, pidemmällä liukumalla laskettu volatilititeetti muuttuu hitaammin kuin lyhyen liukuman volatilititeetti. Molempien kuvioiden tarkastelu viittaa siihen, että volatilititeetti ei ole vakio, kuten esimerkiksi B76-malli olettaa. Kuvion perusteella volatilititeettisarja vaikuttaa myös autokorreloituneelta. Tätä voidaan tutkia laskemalla indeksimuutosten neliöiden autokorrelaatiofunktio. Havaittu autokorrelaatio, mikä käy ilmi taulukosta 5.1.2, viittaa siihen, että prosessin ehdollinen varianssi ei ole vakio. Autokorrelaatiofunktion tarkastelu on tapa testata alustavasti, sisältääkö prosessi ARCH- tai GARCH-ominaisuuksia (formaali tapa testata prosessin ARCH-ominaisuuksia on esitetty artikkelissa Engle (1982)).

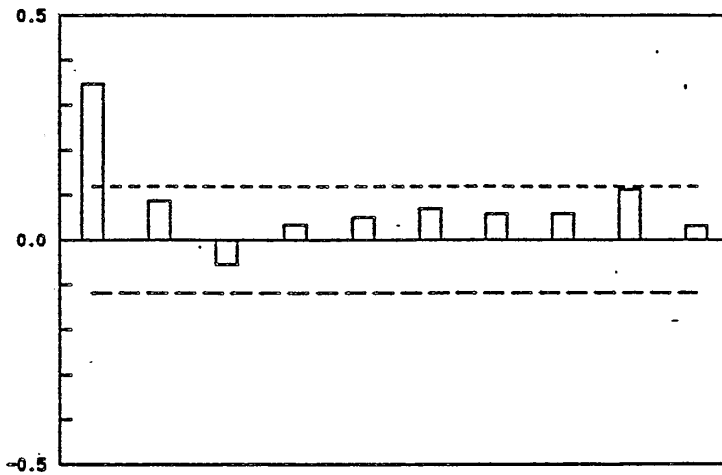
5.2 FOX-indeksin muutosten autokorrelaatio

Taulukossa 5.2.1 on laskettu FOX-indeksin päivittäisten muutosten otosautokorrelaatiofunktio, joka on todellisen autokorrelaatiofunktion estimaattori. Taulukosta havaitaan, että indeksimuutokset ovat varsin voimakkaasti autokorreloituneet ensimmäisen viiveensä suhteen. Liitteessä 3 on esitetty tulokset kahdesta suurimman uskottavuuden menetelmällä estimoidusta lineaariregressiosta, joista ensimmäisessä indeksimuutokset on oletettu valkoiseksi kohinaksi ja toisessa ensimmäisen asteen autoregressiiviseksi prosessiksi. Likelihood ratio -testin perusteella hylätään nollahypoteesi, jonka mukaan indeksimuutokset olisivat valkoista kohinaa. Myös t-testin perusteella indeksimuutosten AR(1)-termi on tilastollisesti merkitsevä.

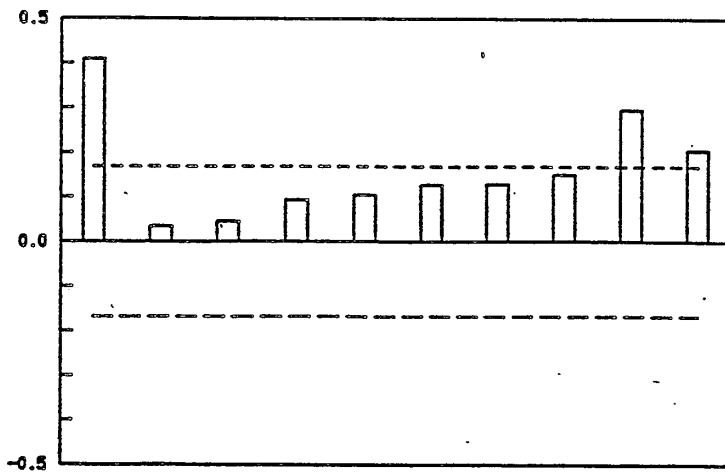
²Suomen indeksiopio- ja osakemarkkinoita koskevissa raporteissa historiallinen volatilititeetti on laskettu liukuvana keskihajontana yleensä 10, 40 tai 50 päivän jaksolla.

TAULUKKO 5.2.1 FOX-indeksin päivittäisten muutosten auto-korrelaatiofunktio

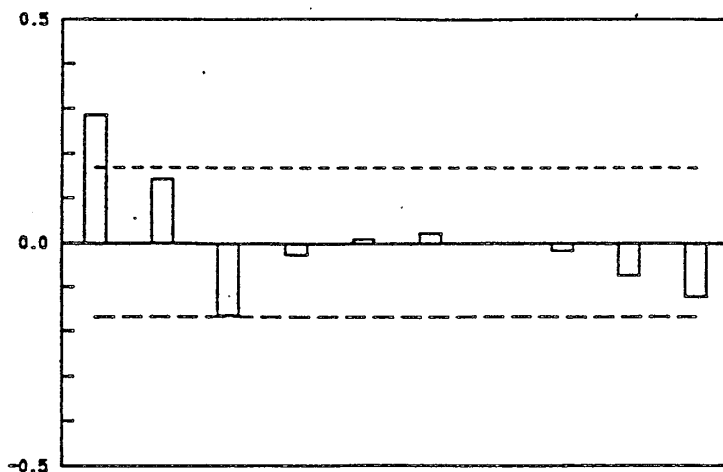
a) koko tarkasteluperiodi, 2.5.1988 - 8.6.1989,
5 %:n merkitsevyysrajat = +/-0.1191



b) tarkasteluperiodin alkupuolisko: 2.5.1988 - 15.11.1989,
5 %:n merkitsevyysrajat = +/- 0.1684

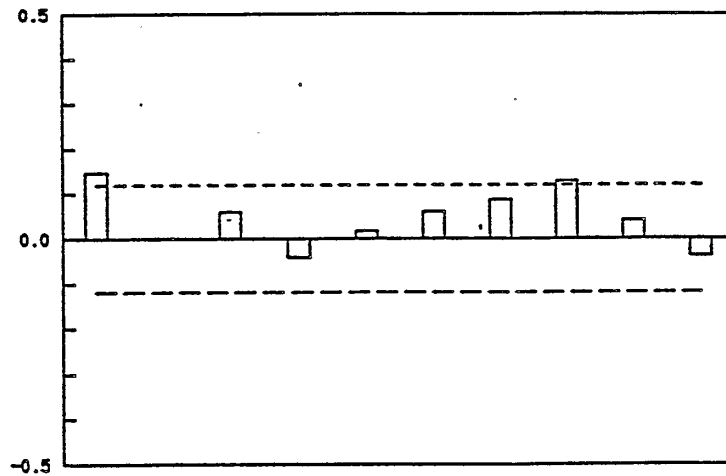


c) tarkasteluperiodin loppupuolisko: 16.11.1988 - 8.6.1989,
5 %:n merkitsevyysrajat = +/- 0.1684

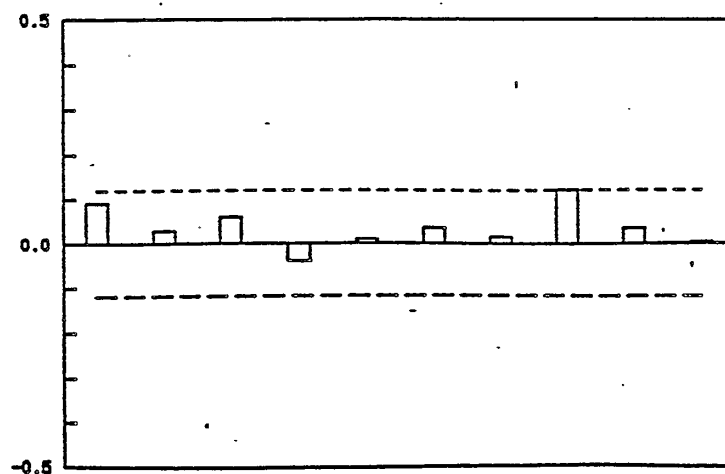


TAULUKKO 5.2.2 FOX-futuurien päivittäisten muutosten otosauto-korrelaatiofunktio ajanjaksolta 2.5.1988 - 8.6.1989, 5 %:n merkitsevyysrajat = -0.1191

a) 1. FOX-futuuri



b) 2. FOX-futuuri



Kuten kappaleessa 3.5 esitettiin, osake- ja indeksituottojen auto-korrelaatio merkitsee usein sitä, että hypoteesi osakemarkkinoiden tehokkuudesta hylätään, koska tulevia kurssimuutoksia voidaan ennustaa edellisten muutosten perusteella. On myös todettu, että nimenomaan osakeindeksin autokorrelaatio saattaa johtua puhtaasti epä-jatkuvaan kaupankäyntiin, ohuisiin markkinoihin ja kaupankäynti-

järjestelmiin liittyvistä ongelmista. Yksi tapa selvittää, kuinka suuri osa indeksimuutosten autokorrelaatiosta johtuu teknisistä syistä ja kuinka suuri osa markkinoiden mahdollisesta tehottomuudesta, on laskea vastaavan indeksifutuurin autokorrelaatiofunktio. Menetelmää on perusteltu kappaleessa 3.5.

Taulukossa 5.2.2 on laskettu kahden, SOMin markkinoilla noteerattavan, indeksifutuurin muutoksien autokorrelaatiofunktiot. Futuurit eroavat ainoastaan päättymispäivältään. Havaitaan, että toisen futuurin ensimmäisen asteen autokorrelaatiokerroin poikkeaa merkittävästi nolasta ja on positiivinen. Sen sijaan toisen futuurin kohdalla ei voida hylätä hypoteesia, jonka mukaan futuurin päivittäiset muutokset olisivat valkoista kohinaa. Futuurien tarkastelu viittaa siihen, että suuri osa FOX-indeksin autokorrelaatiosta johtuu indeksin päivittämiseen liittyvistä ongelmista. Merkittävämpää on kuitenkin se, että myös futuurin päivittäisissä muutoksissa esiintyy positiivista autokorrelaatiota. Tulos saattaa merkitä sitä, että markkinat eivät ole täysin tehokkaat. Tuloksen luotettavuutta tosin vähentää se, että futuurin kaupankäyntivolyymi SOMin markkinoilla on ollut varsin alhainen.

Seuraavaksi pyritään selvittämään, onko edellä havaitun FOX-indeksin autokorrelaation määrä ollut stabiili tarkasteluperiodilla. Taulukossa 5.2.1b) ja c) on laskettu FOX-indeksin muutosten otosautokorrelaatiofunktiot tarkasteluperiodin alku- ja loppupuoliskoilta. Autokorrelaatiokertoimia vertaamalla vaikuttaa siltä, että positiivisen autokorrelaation määrä on pienempi aineiston loppupuoliskolla.³

Autokorrelaation stabiilisuutta tarkastellaan edelleen estimoimalla indeksimuutosten vaihtuvaparametrinen ensimmäisen asteen autoregressiivinen malli. Estimoitava yhtälöpari on muotoa:

³Koska indeksimuutosten aikasarja on heteroskedastinen, otosautokorrelaatiofunktio on harhaton mutta ei tehokas estimaattori todelliselle autokorrelaatiofunktiolle. Lisäksi alku- ja loppupuoliskoilta laskettujen otosautokorrelaatiokerrointen vertailu on periaatteessa ehdollinen sille, että aikasarjan heteroskedastisuuden rakenne on stabiili. Näiden seikkojen takia tulosta on syytä pitää ainoastaan suuntaa antavana.

$$y(t) = \text{par}(t) \cdot y(t-1) + u(t)$$

$$\text{par}(t) = \text{par}(t-1) + e(t),$$

5.2.1

eli AR(1)-termin kertoimen oletetaan noudattavan satunnaiskulku-prosessia.⁴ Estimointi on suoritettu Suomen Pankin IAS-ohjelmistolla. Estimoitava malli on Kalman filtterin erikoistapaus (Harvey (1981)).

Kuviossa 5.2.1 on esitetty estimoidun AR(1)-termin kertoimen aikasarja luottamusväleinen. Kuvion perusteella ei voida sanoa, että autoregressiivisen termin kerroin pienenesi siirryttäessä tarkasteluperiodin loppua kohden. Vaihtuvaparametrisen autoregressiivisen mallin jäännöstermien varianssi on 0.30170, ja liitteessä 3 esitetyn kiinteäparametrisen autoregressiivisen mallin jäännöstermien varianssi on 0.30229. Koska vaihtuvaparametrisen mallin jäännöstermien varianssi on lähes sama kuin kiinteäparametrisen mallin, vaikuttaa siltä, että FOX-indeksin päivittäisten muutosten autokorrelaatio on varsin stabiili.⁵

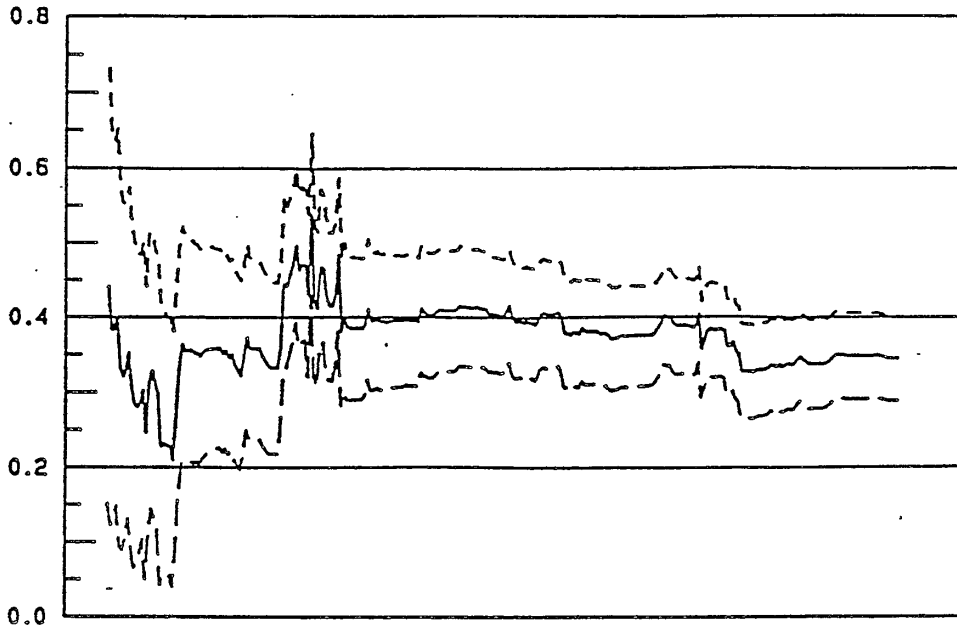
Vaihtuvaparametrisen autoregressiivisen mallin estimointi viittaa siihen, että FOX-indeksin päivittäisten muutosten positiivisen autokorrelaation määrä on stabiili tarkasteluperiodilla. On kuitenkin muistettava, että alaperiodeilta laskettujen autokorrelaatiofunktioiden perusteella indeksimuutosten autokorrelaation määrä ei ole täysin stabiili. Kysymykseen palataan kappaleessa 6.3 teoreettisten ja havaittujen optiohintojen vertailun yhteydessä.

⁴Mallin oletuksena on virhetermien $u(t)$ homoskedastisuus. Toisaalta tässä tutkimuksessa osoitetaan FOX-indeksin muutosten prosessin olevan heteroskedastinen. Siten vaihtuvaparametrisen mallin estimointiin on suhtauduttava varauksin.

⁵Tässä yhteydessä ei suoriteta formaaleja testejä autoregressiivisen termin kertoimen stabiilisuudelle. Testaamisen suurin ongelma on vaihtoehdoisen hypoteesin valinta. Edellä estimoitu tapaus, jossa regressiokerroin noudattaa satunnaiskuluprosessia, on vain yksi tapa mallittaa vaihtuvaa parametria. Muita mahdollisia hypoteeseja ovat esimerkiksi diskreetti muutos (Chow (1960)) tai stationaarinen AR(1)-prosessi (Watson & Engle (1984)).

KUVIO 5.2.1

FOX-indeksin muutosten ARI(1,1,0)-mallin autoregressiivisen termin kertoimen vaihtelu luottamusväleineen ajalta 2.5.1988 - 8.6.1989, jäännöstermien varianssi = 0.30170.



5.3 FOX-indeksin päivittäisten muutosten stokastinen prosessi

Seuraavaksi pyritään täsmentämään FOX-indeksin muutoksia kuvaava stokastinen prosessi olettaen, että prosessin ehdollinen varianssi on muuttuva. Varianssin oletetaan riippuvan sekä omasta viiveestään että edellisellä periodilla tapahtuneesta ennustevirheestä, jolloin FOX-indeksi noudattaisi GARCH(1,1)-prosessia. Kyseessä on ex post tarkastelu, koska estimoinnissa käytetään koko periodin aineistoa.

Kappaleen 5.2 tarkastelujen perusteella lisätään indeksimuutoksen ensimmäinen viive selittäjäksi estimoitavan mallin odotusarvoyhtälöön. Estimoitava malli on siten muotoa:^{6,7}

$$y(t) = m(t) + e(t), e(t); I(t-1) \sim N[0, h(t)], \quad 5.3.2$$

jossa

$$m(t) = \text{par}(1) + \text{par}(2) * y(t-1) \text{ ja}$$

$$h(t) = \text{par}(3) + \text{par}(4) * \text{sq}[e(t-1)] + \text{par}(5) * h(t-1).$$

Estimoitu ja malli ja sen diagnostiikka on esitetty taulukossa 5.3.1.

Mallin diagnostiikassa käytettyjen testien avulla testattavat hypoteesit ovat seuraavat: 1. prosessin odotusarvo ja varianssi ovat vakioita, 2. termin $\text{sq}[e(t-2)]$ lisääminen selittäjäksi varianssiyhtälöön ei paranna mallin osuvuutta, 3. mallin normalisoidut jäännöstermit eivät ole autokorreloituneet ja 4. normalisoitujen jäännöstermien neliöt eivät ole autokorreloituneet. Lisäksi laskeaan normalisoitujen jäännöstermien jakauman vinous- ja huipukkuusmitta.

Hypoteesi osakeindeksin muutosten odotusarvon ja varianssin vakioisuudesta hylätään peräti 0.1 prosentin merkitsevyydestä. Tulos puoltaa vahvasti jo graafisen tarkastelun pohjalta tehtyä havaintoa ja vaatii siten varianssin vaihtelun mallittamista. Hypoteesi yhden ARCH-termin riittävydestä jää testin perusteella voimaan. Toisin sanoen, toisen ARCH-termin lisääminen varianssiyhtälöön ei tuo merkittävästi uutta informaatiota ehdollisen varianssin käyttäytymisestä.

⁶Estimointi ja mallin diagnosointi on suoritettu EZARCH-ohjelmalla, joka on yhden selitettävän muuttujan ARCH- ja GARCH-estimointiin soveltuva ohjelma. Ohjelmasta vastaa Robert Engle; ja se on tilattavissa yliopistosta University of California, San Diego.

⁷Liitteessä on suoritettu Likelihood-ratio -testi AR(1)-termin merkitsevyydelle estimoimalla sekä GARCH(1,1)- että GARCH(1,1)/ARI(1,1,0) -malli.

TAULUKKO 5.3.1

FOX-indeksin päivittäisistä muutoksista
ajalta 2.5.1988 - 8.6.1989 estimoitu
GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-malli⁸

$$y(t) = 0.0761 + 0.3833y(t-1) + e(t); e(t):I(t-1) \sim N[0, h(t)]$$

(2.85) (6.85)

$$h(t) = 0.0139 + 0.1656e^2(t-1) + 0.7877h(t-1)$$

(1.50) (3.08) (12.72)

Loglikelihood-funktion arvo = -207.1467

Diagnostiikka:

LR(3)-testisuureen arvo

(H_0 : odotusarvo ja varianssi ovat vakioita)
= 80.7034 (P = 0.00 %)

LM(1)-testisuureen arvo

(H_0 : termi $e(t-2)$ ei lisää mallin selityskykyä)
= 0.6647 (P = 41.49 %)

Normalisoitujen jäännöstermien vinouskerroin = -0.1557

Normalisoitujen jäännöstermien huipukkuuskerroin = 3.2905

Ljung-Box(12) -testisuureen arvo

(normalisoitujen jäännöstermien autokorrelaatio)
= 7.5200 (P = 82.14 %)

Ljung-Box(12) -testisuureen arvo

(normalisoitujen jäännöstermien neliöiden autokorrelaatio)
= 24.0835 (P = 1.98 %)

Kolmas hypoteesi jää myös selkeästi voimaan, eli mallin normalisoidut jäännöstermit ovat mitä todennäköisimmin valkoista kohinaa. Tämä merkitsee sitä, että estimoitu vakio ja ensimmäisen asteen autoregressiivinen termi riittävät kuvaamaan FOX-indeksin ehdollisen odotusarvon varsin tyhjentävästi. Sitä vastoin neljäs hypoteesi

⁸Suluissa olevat luvut ovat t-testisuureiden arvoja. Mallin diagnostiikassa esiintyvät Lagrange multiplier (LM), Likelihood ratio (LR) ja Ljung-Box -testisuureet ovat khi-toiseen -jakautuneita. Suluissa ilmoitetut luvut ovat vapausasteiden määriä. Testisuureiden arvojen perässä suluissa esitetyt luvut ovat marginaalisia merkitsevyytasoja. Kyseiset testit on esitetty teoksessa Krämer & Sonnberger (1986).

neliöityjen jäännöstermien autokorrelaatiomuudesta hylätään viiden prosentin merkitsevyystasolla, mutta jätetään voimaan yhden prosentin merkitsevyystasolla. Tämä implikoi sitä, että GARCH-dynamiikka ei ehkä kykene täysin selittämään ehdollisen varianssin vaihtelua, vaan jättää tilaa esimerkiksi eksogeenisille selittäjille. Yksi tekijä, jonka on usein huomattu selittävän osakkeiden tai osakeindeksien volatilitiiteetin vaihtelua, on osakekurssien hintataso. Tälle on olemassa myös mielekäs taloudellinen tulkinta (Schmalensee & Trippi (1978), Black (1975)). Tässä tutkimuksessa ei kuitenkaan edetä tähän suuntaan.

Normalisoitujen jäännöstermien vinousmitta on lähellä nollaa ja huipukkuusmitta varsin lähellä kolmesta. Nolla ja kolme ovat kyseisten mittojen arvot normaalijakauman tapauksessa, joten prosessin ehdollisten virhetermien jakauma näyttää olevan lähellä normaalijakaumaa. Kuten jo kappaleessa 3.4 todettiin, ehdollisten virhetermien jakauman huipukkuusmitta vaikuttaa neljännen momentin ennustamiseen useamman periodin päähän.

Vaikka jäännöstermien ja niiden neliöiden autokorrelaatiotestit ovat luonteeltaan konservatiivisia, eli ne eivät helposti hylkää nollassa hypoteesia, voidaan estimoitua mallia pitää osuvuudeltaan tyydyttävänä.

Parametrien 4 ja 5 summa on noin 0.95, eli varsin lähellä ykköstä. Jos todellisten parametrien (joita ei voida havaita) summa on yksi, GARCH-prosessi on integroitunut.⁹ Aikaisemmat tutkimukset ovat todenneet osakekurssija ja osakeindeksejä kuvaavien GARCH-prosessien olevan hyvin lähellä integroituneita. GARCH-parametrien summa on ollut jopa suurempi kuin 0.99 (Engle & Mustafa (1989)). Näihin tuloksiin verrattuna tämän tutkimuksen tulos viittaa siihen, että FOX-indeksin muutosten varianssi ei ole integroitunut. Pitkällä aikavälillä prosessin varianssi on stationaarinen, eli se hakeutuu kohti

⁹Kuten luvussa 3 todettiin, menetelmät GARCH-mallin integroituneisuuden testaamiseksi eivät ole vielä täysin selvillä (Engle & Bollerslev (1986)).

vakioista tasapainotasoa. Prosessissa tapahtuneiden shokkien vaikutus tulevaan varianssiin ei siten jää pysyväksi.¹⁰

Kuten kappaleen alussa todettiin, liukuvan keskihajonnan menetelmää käytettäessä ongelmana on liukumajakson valinta. Lisäksi kaikki liukumajakson havainnot saavat saman painon laskettavassa keskihajonnassa. Sen sijaan GARCH-prosessia estimoitaessa haetaan kaikille edeltäville keskipoikkeamille sellaista painorakennetta, joka todennäköisimmin tuottaa prosessissa havaitun keskihajonnan vaihtelun. Siten valitun GARCH-mallin varianssia voidaan perustellusti pitää parempana estimaattina FOX-indeksin muutosten todelliselle volatiliteteille kuin liukuvan keskihajonnan menetelmällä laskettuja volatilitetteja.

Kuviossa 5.3.1 on esitetty GARCH(1,1)-mallin avulla estimoidun yhden periodin ennustevarianssin, $h(t)$, aikasarja. Vertailussa huomataan, että GARCH-volatiliteetin profiili on hyvin lähellä 10 päivän jaksolla lasketun liukuvan keskihajonnan sarjan profiilia. Niiden korrelaatio on korkea: lähes 0.9. Sitä vastoin 40 päivän jaksolla laskettu liukuva keskihajonta korreloi selvästi huonommin GARCH-volatiliteetin kanssa. Jos volatiliteetti lasketaan liukuvan keskihajonnan menetelmällä, on siten suositeltavampaa käyttää 10 päivän kuin 40 päivän liukumajaksoa. Kuten alaviitteessä 8 todettiin, hetkellinen GARCH-volatiliteetti - ja sitä approksimoiva historiallinen volatiliteetti - ei kuitenkaan yleisesti ottaen toimi hyvänä ennusteena tulevien periodien varianssille.¹¹

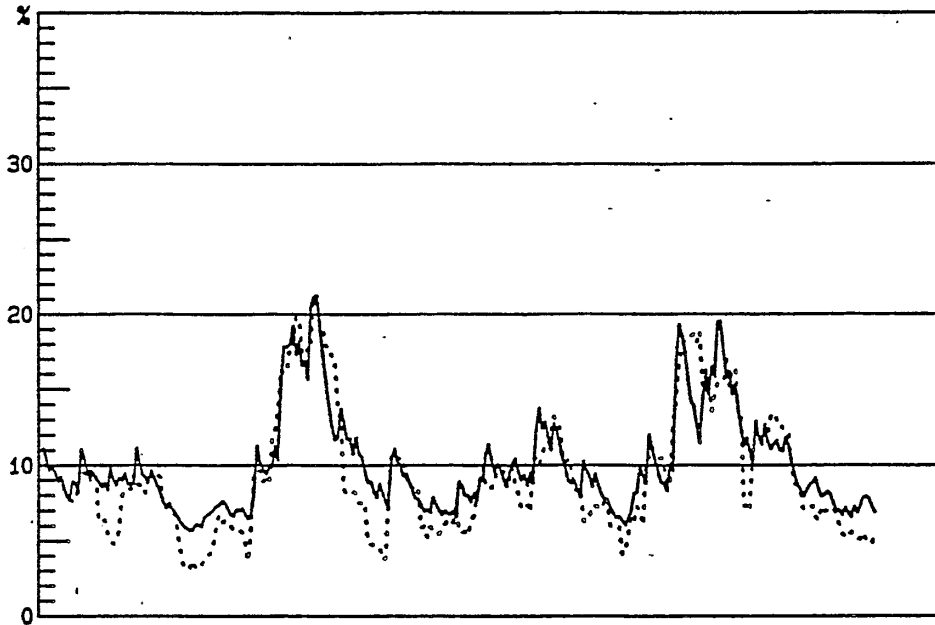
¹⁰Tätä johtopäätöstä tukee vahvasti myös luvun 6 tulos, jonka mukaan autokorrelaatiokorjattu GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-mallin hetkellinen varianssi ennustaa huonosti tulevien periodien varianssia. Tulos saadaan vertaamalla kyseisellä varianssiestimaatilla laskettuja teoreettisia optiohintoja havaittuihin optiohintoihin. Tulos osoittaa, että varianssin stationaarisuus pitkällä aikavälillä on oleellista ottaa huomioon ennustettaessa optioiden jäljellä olevan voimassaoloajan volatiliteettia.

¹¹pitkällä aikavälillä stationaarisen GARCH-mallin (ja sitä approksimoivan liukuvan keskihajonnan) hetkellinen varianssi on sitä huonompi ennuste pitkille ennustehorisonteille, mitä kauempana se on varianssin pitkän aikavälin vakiotasolta.

KUVIO 5.3.1

GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-mallin hetkellinen
keskihajonta
10 päivän liukuva keskihajonta

—————
.....



2.5.1988 - 8.6.1989

Havaituista optioiden hinnoista voidaan implisiittisen volatilitiitin sijaan johtaa GARCH-mallin parametrit, kun varianssiprosessin muoto oletetaan tunnetuksi (Engle & Mustafa (1989)). Tämä perustuu optioiden hinnoittelun riskineutraalisuusoletukseen ja on itse asiassa käänteinen menettely tämän työn luvussa 6 suoritettavalle optiohintojen simuloinnille. Engle & Mustafa (1989) huomasivatkin, että implisiittinen GARCH-prosessi kykeni ennustamaan paremmin lokakuun 1987 pörssiromahduksen jälkeisen volatilitiitin persistenssin kuin historiallisesta datasta estimoitu GARCH-prosessi, jossa käytettiin romahdusta edeltävää aineistoa. Romahduksen jälkeisestä aineistosta estimoitu GARCH-malli vahvisti option hintojen implikoiman tuloksen, että romahduksen aiheuttama volatilitiettishokki unohtui nopeammin kuin historiallinen GARCH-malli antoi odottaa.

5.3.1 GARCH-in-mean

Edellinen malli estimoitiin myös siten, että indeksin muutosta selitettiin AR(1)-termin lisäksi GARCH-in-mean termillä. Termin kertoimeksi saatiin -0.15 , jonka etumerkki on riskin ja tuoton välisen riippuvuuden kannalta väärä. Tosin t-testin perusteella kertoimen ei voitu sanoa poikkeavan nolasta. Myöskään muun diagnostiikan valossa GARCH-in-mean -termi ei parantanut mallin osuvuutta (liite 5). Siten päiväaineistolla saadut tulokset viittaavat siihen, että sijoittajien riskipremio ei ole vaihtuva.

5.4 Implisiittinen volatilitteetti

Ennen kuin implisiittinen volatilitteetti lasketaan B76-mallin avulla, on pohdittava sen tulkintaa maailmassa, jossa todellinen volatilitteetti ei ole kiinteä. Mikäli sijoittajat ovat riskineutraaleja, volatilitteetin stokastisuus ei vaikuta option hintaan. Ainoastaan tulevien periodien volatilitteetin odotusarvolla on merkitystä. Tällöin kiinteän volatilitteetin olettavalla B76-mallilla laskettu implisiittinen volatilitteetti vastaa markkinoiden odottamaa volatilitteettia option jäljellä olevalle voimassaoloajalle. Toisin sanoen, implisiittinen volatilitteetti vastaa option päättymispäivän indeksijakauman varianssin odotusarvoa. Tehokkailla markkinoilla implisiittinen volatilitteetti noudattaa puhdasta satunnaiskulkuprosessia, koska muutoin sen avulla voitaisiin ennustaa tulevia option hintoja.

Implisiittinen volatilitteetti lasketaan iteroimalla, koska ratkaistava volatilitteetti parametri, σ , esiintyy option hinnoitteluyhtälössä normaalijakauman kertymäfunktion argumentissa, eikä kertymäfunktiota voida ratkaista analyttisesti. Käytettävää numeerista ratkaisumenetelmää selostetaan tarkemmin liitteessä 6.

Implisiittinen volatilitteetti (ISD) lasketaan käyttäen B76-mallia. ISD:n aikasarja lasketaan aluksi kaikista kuudesta tarjolla olevasta optiohintasarjasta. Kuten luvussa neljä todettiin, poikkileikkauksessa on aina kaksi osto- ja kaksi myyntioption hintaa, joilla kes-

kenään on yhtä pitkät jäljellä olevat voimassaoloajat. Näistä, yhteensä neljästä, lasketusta ISD:stä aggregoidaan estimaatti todelliselle ISD:lle.

Vanhimmat implisiittistä volatilitteettia käsittelevät tutkimukset aggregoivat ISD-estimaatin optioista, joilla on eri päättymispäivä (Latane & Rendelman (1976)). Tulokset saattavat antaa väärän kuvan, koska option hinta heijastaa markkinoiden käsitystä tulevasta volatilitteetista ainoastaan option voimassaoloajalta (Day & Lewis (1988)). Jos esimerkiksi ennakkoon tunnettu, osakekursseihin vaikuttavan informaation julkistamispäivä sattuu kahden option päättymispäivien väliin, saattaa pidemmän option implisiittinen volatilitteetti heijastaa suurempaa epävarmuutta tulevasta kurssikehityksestä kuin lyhyemmän option.

Vastaavasti futuurihinnat heijastavat odotuksia osingonmaksusta futuurin päättymispäivään asti. Siten myös futuurin ja option päättymispäivän tulee olla sama, kun lasketaan implisiittistä volatilitteettia.

Kirjallisuudessa on pohdittu paljon sitä, mikä on oikea tapa johtaa implisiittisen volatilitteetin estimaatti useista optioista (Day & Lewis (1988)). Kaikki samalle osakkeelle tai osakeindeksille perustuvat osto- ja myyntioptiot, jotka päättyvät samana päivänä, heijastavat samaa volatilitteettia. Laskettaessa syntyvät erot johtuvat mittausvirheistä, hinnoitteluvirheistä tai käytettävän hinnoittelumallin puutteista (Latane & Rendelman (1976)). Kun optioita on suuri määrä, kannattaa aggregoinnissa käyttää kehittyneimpiä tapoja. Toisaalta on todettu, että tasaoptiosta laskettu implisiittinen volatilitteetti toimii yksinään hyvänä estimaattina (Beckers (1980)).

Koska tässä työssä ISD-estimaatti aggregoidaan ainoastaan neljästä optiosta, valitaan lopulliseksi estimaatiksi havaintojoukon mediaani. Mediaani valitaan keskiarvon asemesta, jotta mahdollisten poikkeavien havaintojen vaikutus voidaan näin eliminoida. Tasaoptioista laskettua ISD-estimaattia ei voida käyttää, koska aineisto ei sisällä riittävästi tähän tarvittavia havaintoja.

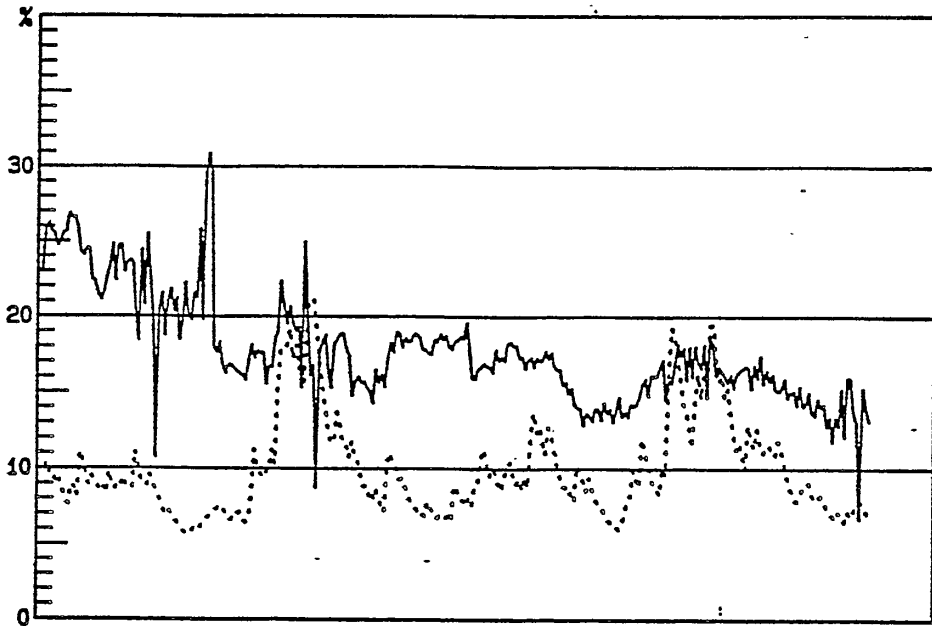
ISD:n laskeminen on mahdollista ainoastaan silloin, kun havaittu option hinta on arbitraasin määrittelemän ylä- ja alarajan välissä. Muussa tapauksessa suoritettava iterointi ei konvergoi. Tutkittaessa arbitraasiehtojen paikkansa pitävyyttä havaittiin, että etenkin option päättymispäivän välittömässä läheisyydessä option hinnan alarajan arbitraasiehto rikkoutui usein. Toisaalta havaitun option hinnan poikkeamat teoreettisesta hinnasta korostuvat päättymispäivien läheisyydessä, koska jakajana esiintyvä aikamuuttuja lähestyy nolaa. Siten pienenkin hinnoitteluvirheen vaikutus päättymispäivän läheisyydessä näkyy epärealistisen suurena tai pienenä implisiittisen volatilitietin arvona. Tämä ongelma ei vaivaa mainittavasti aggregoitua ISD-sarjaa, sillä kultakin ajanhetkeltä valituilla optioilla on ollut vähintään noin kuukausi voimassaoloaika jäljellä.

Kuviossa 5.4.1 vertaillaan tuotettua ISD-estimaatti -sarjaa ja GARCH(1,1)-mallin hetkellisen volatilitietin sarjaa. On huomattava, että GARCH-prosessin hetkellinen varianssi vastaa implisiittistä volatilitietettä ainoastaan silloin, kun GARCH-prosessi on integroitunut. Tällöin prosessin ehdollinen varianssi on sama ennusteperiodista riippumatta. Koska FOX-indeksin muutoksiin sovitettu GARCH(1,1)-prosessi ei todennäköisesti ole integroitunut, ei prosessin yhden periodin ehdollinen volatilitietetti ole täysin vertailukelpoinen implisiittisen volatilitietetin kanssa. Kysymys on siitä, että implisiittisen volatilitietetin tulisi ennakoida prosessissa tapahtuneiden shokkien "unohtuminen" prosessin varianssista. Siten implisiittisen volatilitietetin ei pitäisi reagoida yhtä voimakkaasti tapahtuneisiin shokkeihin kuin GARCH-prosessin hetkellisen varianssin.

KUVIO 5.4.1

Implisiittinen volatilitiitti
GARCH/ARI-mallin hetkellinen keskihajonta

—
•••••



2.5.1988 - 6.6.1989

Implisiittisen volatilitiitin ja GARCH-prosessin hetkellisen volatilitiitin välinen korrelaatio voidaan kuitenkin laskea, jotta saadaan alustava kuva havaittujen option hintojen tehokkuudesta.¹² Sarjoille on laskettu korrelaatiot koko tarkasteluperiodilta sekä kahteen yhtä suureen osaan jaetulta alaperiodilta. Koko periodin ja ensimmäisen puoliskon korrelaatiot ovat sangen heikot, mutta jälkimmäisen alaperiodin korrelaatio on luokkaa 0.6. Tämä viittaa siihen, että toteutuneet option hinnat vastaavat huomattavasti paremmin teoreettisia hintoja periodin jälkipuoliskolla kuin alkupuoliskolla.

Merkittäväntä kuviossa 5.4.1 on kuitenkin se, että lukuunottamatta kahta lyhyttä, korkean volatilitiitin periodia ISD- ja GARCH-volatilitiitti -sarjan välillä näyttää olevan systemaattinen tasero.¹³ Implisiittinen volatilitiitti on ollut keskimäärin lähes

¹²Korrelaatiovertailuista kts. Latane & Rendelman (1976).

¹³Tämä havainto on tehty myös aikaisemmassa Suomen optiomarkkinoita koskevassa katsauksessa (KOP (1988)).

kaksinkertainen GARCH-prosessin hetkelliseen varianssiin verrattuna. Tämä voi merkitä sitä, että joko optiot ovat olleet systemaattisesti ylihinnoiteltuja tai implisiittisen volatilitietin laskemiseen käytettävä hinnoittelukaava ei huomioi kaikkia hintoihin vaikuttavia tekijöitä.

Implisiittinen volatilitietti laskettiin myös käyttämällä osinkokorjaamatonta Black & Scholes -mallia. Ongelmaksi muodostuivat kuitenkin jaksot, joilla iterointi ei konvergoinut eikä implisiittiselle volatilitietille saatu arvoa. Laskettua sarjaa ei voitu luotettavasti verrata indeksin aikasarjasta laskettuihin volatilitieteihin. BS-mallin antamien teoreettisten hintojen osuvuutta havaittuihin optiohintoihin tarkastellaan kappaleessa 6.2.1 suhteellisten hinnoitteluvirheiden avulla.¹⁴

Seuraavassa luvussa paneudutaan option hintojen laskemiseen Monte Carlo -simulointimenetelmällä. Tulokset osoittavat, että edellä havaittu systemaattinen tasoero toteutuneessa ja B76-kaavalla laskettussa implisiittisessä volatilitietissa on selitettävissä FOX-indeksin päivittäisten muutosten autokorrelaatiolla. Samalla tarkastellaan prosessin GARCH-ominaisuuksien vaikutusta optioiden hintaan.

¹⁴Itse asiassa tällöin huomataan, että markkinat käyttävät option hinnoittelun perustana futuurin hintaa. Siksi BS-malli ei sovi implisiittisen volatilitietin laskemiseen.

6 AUTOKORRELAATION JA HETEROSKEDASTISUUDEN VAIKUTUKSEN TARKASTELU OPTIOIDEN HINTAAN: TARKASTELU MONTE CARLO -SIMULOINNIN AVULLA

Tässä luvussa lasketaan optioiden teoreettiset hinnat simuloimalla luvussa 5 spesifioitua FOX-indeksin stokastista prosessia Monte Carlo -menetelmällä. Kappaleessa 6.2 simulointia käytetään autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vaikutusten erittelyyn, jotta saadaan käsitys näiden stokastisten ominaisuuksien suhteellisesta merkityksestä option hinnoittelussa. Kappaleessa 6.3 simulointihinnoittelumenetelmää verrataan perinteisiin menetelmiin. Empiiriset tulokset osoittavat markkinoiden huomioivan FOX-indeksin autokorrelaation vaikutuksen optioiden hintoihin. Kappaleessa 6.4 tehdään johtopäätökset lukujen 5 ja 6 empiirisistä tuloksista.

6.1 Monte Carlo -simulointi

Mikäli option hinnalle ei voida määrittää analyttistä ratkaisua, voidaan oikea teoreettinen hinta löytää numeerisin menetelmin. Osakeindeksin todennäköisyysjakauma option päättymispäivänä simuloidaan. Option hinta ratkeaa option hinta kyseisen todennäköisyysjakauman perusteella Cox & Ross -argumenttia noudattaen (Boyle (1976)).

Tarvittava todennäköisyysjakauma voidaan tuottaa niin kutsutulla Monte Carlo -simuloinnilla. Riittää, kun tunnetaan (estimoidaan) osakeindeksin kehitystä kuvaava stokastinen prosessi. Kysymys on siitä, että tuotetaan niin monta tätä prosessia noudattavaa osakeindeksin realisaatiota, että näiden muodostaman otoksen todennäköisyysjakauma noudattaa vaaditulla luotettavuudella todellista jakaumaa. Eri realisaatiot tuotetaan tietokoneen avulla siten, että indeksin kehitystä kuvaavassa yhtälössä stokastisen termin paikalle sijoitetaan sopivan satunnaislukugeneraattorin avulla tuotettuja satunnaislukuja. Jos esimerkiksi halutaan laskea tuhat osakeindeksin realisaatiota yhden ennusteperiodin päähän, ratkaistaan yhtälö tuhat kertaa sijoittamalla joka kerta riippumaton, samalla satunnaislukugeneraattorilla tuotettu luku satunnaisterman paikalle.

Todellisen jakauman keskusmomentteja approksimoivat keskusmomentit lasketaan tuotetuista realisaatiosta, eli $k(i) = (1/N) \sum [x(j) - \mu]^i$, missä $j = 1, \dots, N$ ja N on simuloitujen realisaatioiden lukumäärä ja μ niiden keskiarvo. Käytännössä laskutyötä lisää vielä se, että stokastista prosessia simuloidaan useamman periodin horisontilla.

Numeerinen ratkaisumenetelmä korvaa tarkkuudeltaan ja luotettavuudeltaan analyttisen menetelmän, mutta tähän vaadittavien realisaatioiden määrä riippuu simuloitavan prosessin luonteesta. Koska luotettavien tulosten saaminen vaatii ainakin tuhannen realisaation otosten tuottamista (Boyle (1976), Engle & Mustafa (1989)), vaatii suuren aineiston käsittely paljon tietokonekapasiteettia.

Monte Carlo -simuloinnin avainkohtaan, sopivien satunnaisluku-generaattorien rakentamiseen, ei paneuduta tässä työssä. Analyysiin käytetty tietokoneohjelma sisälsi valmiina sopivan generaattorin. Generaattorin toimivuus tarkistettiin simuloimalla standardoitu normaalijakauma, jonka tunnusluvut voitiin todeta oikeiksi. Boyle käsittelee artikkelissaan sopivan generaattorin muodostamista matemaattisena ongelmana (Boyle (1976)).

Syyt, miksi tässä työssä päädyttiin Monte Carlo -simuloinnin käyttöön, liittyvät vaikeuksiin johtaa analyttisesti tutkittujen stokastisten prosessien jakaumat. Jos käytettäisiin luvussa 3 esitettyä Jarrow & Rudd -kaavaa, riittäisi johtaa kyseisten prosessien jakaumien momentit. Engle & Bollerslev esittävät katsauksessaan GARCH-prosessien (ja etenkin integroituneen GARCH(1,1)-prosessin) virhetermien ehdolliset momentit, joista kumuloimalla saadaan prosessin ehdolliset momentit. Yhdistetyn GARCH(1,1)- ja ARI-prosessin momenttien johtaminen saattaa olla kuitenkin työläämpää. Toinen, ehkä suurempi, ongelma liittyy selitettävän muuttujan muotoon. Optio- ja osakemarkkinoita koskevassa teoriassa oletetaan yleensä, että osake- tai indeksihintojen logaritmiset differenssit noudattavat esimerkiksi Ito-prosessia tai jotakin GARCH-prosessia. Ito-prosessin tapauksessa tasomuodossa esitetyt hinnat ovat siten lognormaalisti jakautuneita. Jarrow & Rudd -kaava, jonka lähtökohtana on todellisen jakauman vertaaminen lognormaaliin jakaumaan, vaatisi siten vastaavaa

transformaatiota GARCH-prosessin generoimalle jakaumalle tai Engle & Bollerslevin esittämille momenteille. Tämän suorittaminen saattaisi olla analyttisessä muodossa hankalaa. Sen sijaan numeerisella menetelmällä se ei tuota ongelmia. Tarvittavat realisaatiot voidaan laskea logaritimuodossa, ja sen jälkeen jokainen saatu luku voidaan muuntaa erikseen tasomuotoon (liite 7).

Suoritettavien simulointien avulla tarkastellaan autokorrelaation ja GARCH-ominaisuuksien erillis- ja yhteisvaikutusta option hintaan. Yhteisvaikutuksen tarkastelu kulminoituu kolmeen suureen simulointiin, joissa kutakin osto-optiosarjaa¹ kohden simuloidaan vastaava määrä keinotekoisia option hintoja sekä niitä vastaava volatiliti, joka on simuloidun jakauman toinen keskusmomentti. Selvitettävä ongelma on, asettuuko näin tuotettu volatilitiisarja lähemmäs Black-76 -kaavasta laskettua implisiittistä volatilitiisarjaa kuin GARCH(1,1)-mallin antama volatilitiisarja. On myös syytä verrata suoraan todellisia ja teoreettisia optiohintoja, koska pelkien volatilitiisarjojen vertaaminen ei anna välttämättä täsmällistä kuvaa todellisten ja teoreettisten optiohintojen suhteesta.

6.2 Autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vaikutusten erittely

Ennen optionhintasarjojen tuottamista simuloidaan esimerkinomaisesti eri prosessien tuottamia osakeindeksin hintajakaumia ja lasketaan vastaavat tasaoptioiden hinnat. Näin voidaan alustavasti analysoida indeksimuutosten prosessin GARCH- ja autokorrelaatio-ominaisuuksien kvantitatiivista merkitystä optioiden hinnoittelussa.

Simulointi suoritetaan siten, että jakaumien odotusarvot ovat samat. Kun simuloiduista jakaumista lasketaan 2., 3. ja 4. keskusmomentit,

¹Jatkossa tarkastellaan ainoastaan osto-optioiden teoreettisia hintoja, koska niiden määrä (790 kappaletta) riittää analyysin pohjaksi. Simuloituja osto-optioiden hintoja vastaavat myyntioptioiden hinnat voidaan kuitenkin helposti laskea kappaleessa 2.3 esitetyllä put-call -pariteetilla, joka on hinnoittelumallista riippumaton yleinen artibraasi.

voidaan Jarrow & Rudd -kaavan avulla eritellä autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vaikutuksia optioiden hintaan. Kaavan soveltamista varten yksi simuloitavista jakaumista on lognormaali jakauma.

Seuraavassa on esitetty vaihtoehtoiset, simuloituvat prosessit. Kaikki simuloinnit on suoritettu 117 päivän horisontilla, joka on lähellä Suomen optiomarkkinoilla esiintyvien optioiden maksimi voimassaoloaikaa. Kunkin prosessin jakauma simuloidaan tuottamalla tuhat (1 000) kappaletta indeksin realisaatioita.

1. Ito-prosessi 6.2.1

$$y(t) = m(t) + \sqrt{h} * e(t), \quad e(t) \sim N(0,1), \text{ missä}$$

$$m(t) = (1+r)/(1+d) \text{ ja}$$

$$h = \text{vakio}$$

2. GARCH(1,1)-prosessi 6.2.2

$$y(t) = m(t) + \sqrt{h(t)} * e(t), \quad e(t) \sim N(0,1), \text{ missä}$$

$$m(t) = (1+r)/(1+d) \text{ ja}$$

$$h(t) = \text{par}(3) + \text{par}(4) * \text{sq}[e(t-1)] + \text{par}(5) * h(t-1)$$

3. ARI(1,1,0)-prosessi² 6.2.3

$$y(t) = \text{par}(1) + \text{par}(2) * y(t-1) + \sqrt{h} * e(t),$$

$$e(t) \sim N(0,1), \text{ missä}$$

$$\text{par}(1) = [1 - \text{par}(2)] * [(1+r)/(1+d)] \text{ ja}$$

$$h = \text{vakio}$$

4. Yhdistetty GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-prosessi 6.2.4

$$y(t) = \text{par}(1) + \text{par}(2) * y(t-1) + \sqrt{h(t)} * e(t),$$

$$e(t) \sim N(0,1), \text{ missä}$$

$$\text{par}(1) = [1 - \text{par}(2)] * [(1+r)/(1+d)] \text{ ja}$$

$$h(t) = \text{par}(3) + \text{par}(4) * \text{sq}[e(t-1)] + \text{par}(5) * h(t-1)$$

²Odotusarvon suhteen autoregressiivisten prosessien, 3 ja 4, parametri par(1) on asetettu siten, että prosessien pitkän aikavälin odotusarvot ovat samat kuin prosesseilla 1 ja 2. Simuloitaessa prosessien 3 ja 4 alkuarvo y(t-1) asetetaan siten, että kaikkien neljän prosessin jakaumien ensimmäiset momentit muodostuvat samoiksi.

Muuttuja $y(t)$ on sadalla kerrottu logaritminen differenssi FOX-indeksin perättäisistä arvoista, eli $y(t) = 100 * \{ \ln[FOX(t)] - \ln[FOX(t-1)] \}$. FOX-indeksin lähtötasoksi, jolta muutoksia lähdetään simuloimaan, on valittu ajankohdan 2.5.1988 indeksin arvo.

Parametrien arvot vastaavat Fox-indeksin muutosten empiirisen prosessin parametreja. Prosessi 2 simuloidaan lisäksi integroituneena GARCH(1,1)-prosessina siten, että $\text{par}(3) = 0$, $\text{par}(4) = 0.2$ ja $\text{par}(5) = 0.8$. Empiirisestä prosessista poiketen indeksimuutosten odotusarvo, $y(t) = m(t)$, on asetettu vastaamaan markkinoiden riskitöntä korkoa. Tämä on välttämätöntä riskineutraalisuuden oletettavan lähestymistavan takia (Engle & Mustafa (1989)).

Kaikkien prosessien ehdollisen varianssin lähtötasoksi on asetettu estimoiduilla parametreilla laskettu GARCH(1,1)-prosessin varianssin pitkän aikavälin tasapainoarvo.³ Tällöin Ito-prosessin varianssi sekä GARCH(1,1)- että integroituneen GARCH(1,1)-prosessin varianssin odotusarvo koko simulointihorisontille on sama. Verrattaessa näitä kolmea prosessia keskenään Jarrow & Rudd -mallin avulla, mallin ensimmäinen korjaustermi on nolla ja kolmas korjaustermi voidaan tulkita suoraan jakaumien huipukkuuksien eroksi.⁴ Sen sijaan odotusarvon suhteen autoregressiivisten prosessien, 3 ja 4, koko simulointihorisontin varianssi muodostuu suuremmaksi kuin muiden prosessien. Tässä tapauksessa Jarrow & Rudd -mallin ensimmäinen korjaustermi dominoi.

Taulukossa 6.2.1 on laskettu myös kutakin simuloitua jakaumaa vastaava tasaoption hinta. Tasaoption tapauksessa Jarrow & Rudd -mallin toinen korjaustermi on aina nolla, koska termin kerroin on nolla. Tasaoption ja varianssien standardoinnin avulla saadaan syntymään simulointiasetus, jossa verrattavien Ito- ja GARCH-prosessien jakaumien Jarrow & Rudd -mallin ensimmäinen ja toinen korjaustermi

³Tämä on muotoa $E(\epsilon^2) = \text{par}(3) / [1 - \text{par}(4) - \text{par}(5)]$, jonka olemassaolon välttämätön ehto on $\text{par}(4) + \text{par}(5) < 1$.

⁴Katso kappale 3.2.

ovat nolliä. Näin päästään havainnollistamaan GARCH-prosessin jakauman huipukkuuden vaikutusta option hintaan verrattuna Black-76 -hintaan.

TAULUKKO 6.2.1 Simuloitujen indeksijakaumien vertailu

	2. keskus- momentti	3. keskus- momentti	4. keskus- momentti
Ito-prosessi	1.162	6.113	3.840.377
GARCH(1,1)-prosessi	1.171	16.674	5.695.834
IGARCH(1,1)-prosessi	1.062	116.467	56.330.412
ARI-prosessi	3.053	43.392	27.145.668
Yhd. prosessi	2.905	52.861	29.751.140
	vinous	huipukkuus	tasaoption arvo
Ito (vastaa Black-76 -hintaa)	.15	2.84	12.73
GARCH	.42	4.15	12.04
IGARCH	3.37	49.95	8.29
ARI	.26	2.91	21.75
Yhd.	.34	3.53	20.87

GARCH(1,1)- ja IGARCH(1,1)-prosessien momenttien simulointi toistetaan useita kertoja, jotta saadaan käsitys momenttien stokastisuuden aiheuttamasta variaatiosta simulointituloksissa. Koska GARCH(1,1)-prosessin varianssi on pitkällä aikavälillä stationaarinen, ovat prosessin simuloitujen momenttien arvot varsin stabiileja toistetuissa simuloinneissa. Taulukkoon on valittu sen toistokerran arvot, jolloin toinen keskusmomentti eli varianssi on lähimpänä Ito-prosessin simuloitua varianssia. Myös option hinta käyttäytyi stabiilisti toistokerrasta riippumatta. GARCH(1,1)-prosessista ratkaistu tasaoption hinta on noin neljä prosenttia (4 %) pienempi kuin Ito-prosessista ratkaistu hinta (,joka vastaa Black-76 -hintaa). Tämä johtuu prosessien neljänsien momenttien positiivisesta erotuksesta, joka tekee Jarrow & Rudd -mallin kolmannesta korjaustermistä negatiivisen (kuten edellä on perusteltu, kaksi ensimmäistä korjaustermiä ovat tässä tapauksessa nolliä). GARCH(1,1)-prosessin jakauman huipukkuus alentaa tasaoption teoreettista hintaa Black-76 -hintaan verrattuna.

Koska integroituneen GARCH(1,1)-prosessin pitkän aikavälin varianssi ei ole stationaarinen, on simuloitujen momenttien eri toistokerroilla havaittu variaatio paljon suurempi kuin stationaarisen GARCH(1,1)-prosessin. Option hinta pysyy kuitenkin suhteellisen stabiilina toistokerrasta riippumatta. Toistetusta viidestä (5) simuloitukerrasta on taulukkoon valittu jälleen ne arvot, joissa toinen keskusmomentti on lähimpänä Ito-prosessin toista keskusmomenttia. Kuten neljännen keskusmomentin suuruusluokka ja huipukkuuden tunnusluku osoittavat, on integroituneen GARCH(1,1)-prosessin jakauma selvästi huipukkaampi kuin stationaarisen GARCH(1,1)-prosessin jakauma. Simuloidusta jakaumasta lasketun tasaoption arvo (8.29) muodostuu jo yli kolmanneksen (noin 35 %) pienemmäksi kuin vastaava Black-76 -arvo.

Kuten taulukossa 3.5.1 esitetystä integroituneen GARCH(1,1)-prosessin neljännen momentin odotusarvon kaavasta nähdään, kyseisen momentin suuruus, ja siten jakauman huipukkuus, riippuu parametrin α arvosta. Simulointikoe, jossa IGARCH(1,1)-prosessi simuloitiin parametreilla $\alpha = 0.1$ ja $\beta = 0.9$, osoitti, että huipukkuus vähentyi ja tasaoption arvo muodostui vastaavasti suuremmaksi.

Edellä esitettyä tulosta GARCH-prosessin integroituneisuuden vaikutuksesta option hintaan voidaan pitää taloudellisesti varsin merkittävänä, kun muistetaan, että Engle & Mustafan (1989) GARCH-estimoinnit USA:n aineistolla viittasivat osake- ja osakeindeksituottojen noudattavan integroituneita GARCH(1,1)-prosesseja. Tulos on kiinnostava myös valuuttaoptioiden hinnoittelun kannalta, koska tiettyjen valuuttakurssien muutosten prosessien on todettu olevan lähellä integroituneita GARCH(1,1)-prosesseja (Engle & Bollerslev (1986)).

Tarkastellaan seuraavaksi ARI- ja yhdistetyn ARI/GARCH(1,1)-prosessin simuloituja momenteja. Prosessien hetkelliset varianssit ovat samat kuin Ito-prosessilla. Kuten kappaleessa 3.4 on osoitettu, positiivisesti autokorreloituneiden indeksimuutosten prosessin varianssi kasvaa Ito-prosessin varianssia nopeammin horisontin pidentyessä. Taulukosta 6.2.1 nähdään, että 117 päivän horisontilla ja AR(1)-termin kertoimen arvolla 0.38 prosessien varianssit kasvavat

lähes kolminkertaiseksi verrattuna Ito-prosessin varianssiin. Jarrow & Rudd -mallin varianssien erotukseen perustuva korjaustermi on positiivinen ja dominoi itseisarvoltaan muita korjaustermejä. Tämän vahvistavat sekä ARI- että ARI/ GARCH(1,1)-prosessin jakaumista lasketut tasaoption arvot, jotka ovat melkein kaksinkertaisia Black-76 -hintaan verrattuna. ARI- ja ARI/GARCH(1,1)-prosessin jakauman huipukkuutta ei voida verrata suoraan lognormaalin jakauman huipukkuuteen Jarrow & Rudd -kaavan kolmannen korjaustermin avulla, koska kyseisten prosessien koko periodin varianssit eivät ole samat. Huipukkuuden vaikutusta voidaan tarkastella kuitenkin simuloituista momenteista laskettujen huipukkuusmittojen avulla. Ito- ja ARI-prosessin huipukkuusmitat, 2.84 ja 2.91, ovat varsin lähellä toisiaan. Sen sijaan yhdistetyn ARI/ GARCH(1,1)- eli FOX-indeksin muutosten empiirisen prosessin, jakauma on huipukkaampi kuin edelliset. Koska suoritettussa simuloinnissa ARI- ja ARI/GARCH(1,1)-prosessin koko periodin varianssit pitäisi todellisuudessa olla samat, voidaan todeta, että vastaavissa tasaoption hinnoissa havaittava ero johtuu ARI/GARCH(1,1)-prosessin jakauman suuremmasta huipukkuudesta.

Tämän kappaleen esimerkkisimuloinneilla voitiin vahvistaa niitä päätelmiä, joita tehtiin luvussa 3 positiivisen autokorrelaation ja GARCH-ominaisuuksien vaikutuksista optioiden hintaan. Indeksimuutosten positiivinen autokorrelaatio kasvattaa option hintaa suhteessa Black-76 -hintaan, koska tällöin prosessin varianssi muodostuu vähintään kahden periodin horisontilla suuremmaksi kuin Ito-prosessin. Suurempi varianssi lisää kaikkien optioiden hintaa, koska varianssien erotukseen perustuva Jarrow & Rudd -mallin ensimmäinen korjaustermi on positiivinen riippumatta option toteuttamishinnan ja indeksin lähtötason välisestä suhteesta.

Indeksimuutosten prosessin GARCH-ominaisuudet sen sijaan alentavat tasaoption hintaa suhteessa Black-76 -hintaan, koska tällaisen prosessin jakauma on huipukkaampi kuin log-normaalijakauma. Huipukkuus kasvaa (ja tasaoption hinta laskee), jos GARCH-prosessi on integrointunut. Huipukkuuden määrä riippuu lisäksi GARCH-parametrin, α , suuruudesta. On muistettava, että esitetty huipukkuuden vaikutus pätee ainoastaan tasaoptioille ja niitä lähellä oleville optioille.

Miinus- ja plusoptioilla huipukkuuden vaikutus kääntyy päinvastaiseksi (katso taulukko 3.2.1). Tällöin täytyisi tarkastella myös Jarrow & Rudd -mallin toisen korjaustermin vaikutusta.⁵

6.3 Teoreettisten optiohintojen simulointi

Empiirisen tarkastelun lopuksi vertaillaan indeksimuutosten täsmennyillä, estimoidulla prosessilla simuloituja teoreettisia option hintoja havaittuihin option hintoihin. Vertailussa käytetään sekä implisiittisen ja aikasarjasta estimoidun volatilitietin eroa että teoreettisten option hintojen suhteellisia poikkeamia havaituista hinnoista. Myös optioiden Black-76 -hinnat lasketaan käyttäen eri volatilitietiestimaatteja, jotta simuloitumallin suorituskykyä voidaan verrata Black-76 -malliin. Muutamilla ristiintaulukoinneilla pyritään tarkastelemaan eri mallien tekemien suhteellisten hinnoitteluvirheiden riippuvuutta hinnoiteltavan option ominaisuuksista, Yksinkertaisen keskiarvotestin avulla testataan hinnoitteluvirheiden keskiarvon poikkeamista nolasta.

Yhtälöissä 6.3.1 on esitetty simuloitava FOX-indeksin muutosten empiirinen prosessi. Kyseessä on siis yhdistetty GARCH(1,1)/ARI(1,1,0) -prosessi. Estimointituloksista poiketen prosessin trendinä käytetään markkinoiden riskitöntä korkoa, joka on jaettu futuurin implikoimalla odotetulla osinkovirralla. Efektiivisesti tämä vastaa futuurin hinnan käyttöä indeksin asemasta option hinnoittelussa (vertaa BS- ja B76-malleja). Kuten kappaleessa 6.2 on jo todettu, Cox & Ross -malli, johon optiohintojen simulointi perustuu, edellyttää riskittömän koron käyttöä estimoidun keskimääräisen indeksituoton sijaan.

⁵Esimerkkisimulointien perusteella havaitaan, että integroituneen GARCH(1,1)-prosessin jakauma on myös selvästi vinompi oikealle kuin lognormaalijakauma.

$$y(t) = \text{par}(1) + 0.3833*y(t-1) + \sqrt{h(t)}*e(t), \quad 6.3.1$$

$$e(t) \sim N(0,1),$$

missä

$$\text{par}(1) = [1 - 0.3833]*[(1+r)/(1+d)]$$

ja

$$h(t) = 0.0139 + 0.1656*\text{sq}[e(t-1)] + 0.7877*h(t-1)$$

Simuloimalla tuotetaan kolmea osto-optiohintasarjaa vastaavat teoreettiset optioiden hinnat sekä näitä vastaavat volatilitteettisarjat. Simuloinnin alkuarvoina käytetään estimoidun prosessin todellisia arvoja. Aineiston kutakin optiohintahavaintoa kohden tuotetaan tuhat (1 000) indeksin realisaatiota siten, että ne on simuloitu kyseisen option jäljellä olevan voimassaoloajan loppuun. Simuloitu option hinta lasketaan tuotetuista realisaatioista käyttämällä vastaavan todellisen option toteuttamishintaa. Kutakin simuloitua option hintaa vastaava volatilitteetti on tuotetun realisaatiojoukon varianssi. Tietokoneajoissa käytetyt kaavat on esitetty tarkemmin liitteessä 7.

Kuviossa 6.3.1 on esitetty kolmesta simuloidusta volatilitteettisarjasta aggregoitu sarja, joka vastaa aikaisemmin aggregoitua implisiittistä volatilitteettisarjaa.⁶ Lisäksi kuviossa on kyseinen ISD-sarja sekä FOX-indeksiin sovitettun GARCH/ARI-prosessin päivittäinen volatilitteetti. Markkinoiden ensimmäisiä kuukausia lukuunottamatta simuloitu volatilitteetti ja B76-mallin antama implisiittinen volatilitteetti liikkuvat lähes samalla tasolla. Tämä tarkoittaa karkeasti ottaen sitä, että vastaavat optionhinnat ovat samalla tasolla. Näyttää siis siltä, että empiirisellä jakaumalla simuloidut teoreettiset optioiden hinnat vastaavat tasoltaan havaittuja optiohintoja. Tämä viittaa vahvasti siihen, että markkinat tuntevat FOX-indeksin.

⁶Jotta sarjojen toisiaan vastaavat volatilitteettihavainnot olisivat vertailukelpoisia, ne on laskettu samanpituisille horisonteille.

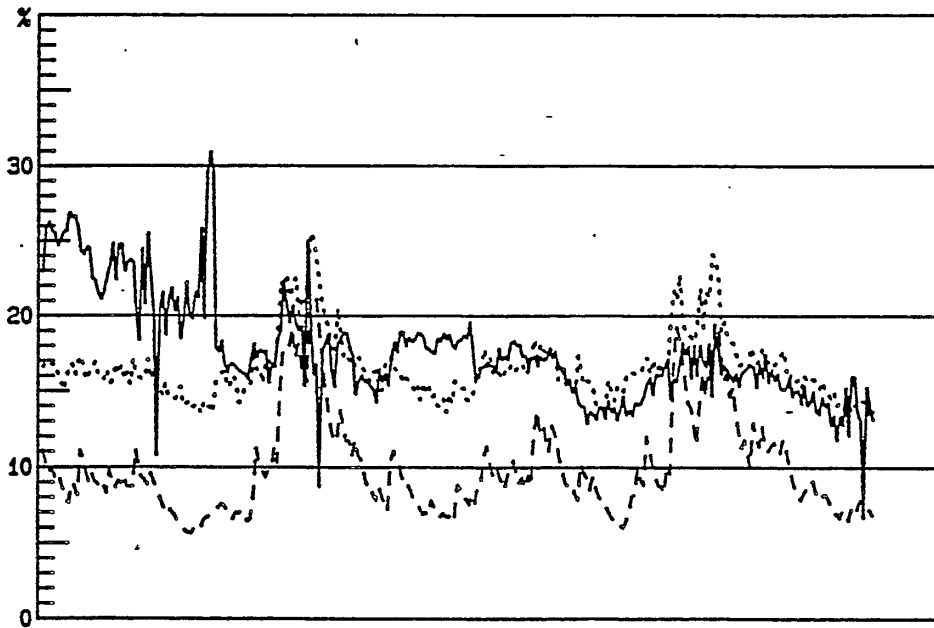
todellisen volatilitiitin tason, joka on relevantti optioiden hinnoittelussa. FOX-indeksin muutosten positiivisen autokorrelaation takia päivittäisistä havainnoista laskettu volatilitiitti mittaa harhaisesti indeksin pidemmän aikavälin vaihtelua.

KUVIO 6.3.1

Implisiittinen volatilitiitti

GARCH/ARI-mallin simuloitu volatilitiitti

GARCH/ARI-mallin hetkellinen volatilitiitti



2.5.88 - 8.6.89

Markkinoiden ensimmäisinä kuukausina, jolloin implisiittinen volatilitiitti on sekä estimoitua että simuloitua volatilitiittia selvästi korkeammalla, näyttää esiintyneen todellista ylinhinnoittelua. Jäljempänä laskettujen suhteellisten hinnoitteluvirheiden perusteella ylinhinnoittelu olisi hävinnyt vielä nopeammin kuin volatilitiittien vertailu antaa ymmärtää.

Kuviossa 6.3.1 näkyvä kevään 1989 korkean volatilitiitin periodi on mielenkiintoinen. Tuolloin simuloitu volatilitiitti nousee selvästi korkeammalle kuin implisiittinen volatilitiitti. Mikäli oletetaan implisiittisen volatilitiitin ennustavan paremmin tulevaa volatilitiittia, saattaa kysymyksessä olla FOX-indeksistä estimoidun

GARCH(1,1) -prosessin epästabiilisuus tai se, että todellinen GARCH-prosessi on epälineaarinen. Näitä tulkintamahdollisuuksia tukevat Engle & Mustafan tulokset vuoden 1987 pörssiromahduksen aiheuttaman volatilitteettishokin persistenssistä (Engle & Mustafa (1989), katso myös s. 58). Toisin sanoen, tapahtuneen shokin suhteellinen vaikutus tulevaan volatilitteettiin on sitä pienempi, mitä suurempi shocki on. Kyseessä saattaa olla tällöin epälineaarinen GARCH-prosessi (Engle & Bollerslev (1986)).

Tarkastellaan kuvion avulla kappaleessa 3.5.2 käsiteltyä ARI- ja Ito-prosessien varianssien eroa. Prosessin varianssien erotus kasvaa ennustehorisontin pidentyessä, kun prosessien hetkelliset varianssit ovat samat. Kuten kappaleessa 3.5.2 todettiin, erotus kasvaa epälineaarisesti.

Asiaa havainnollistaa kuvion 6.3.2 ristiintaulukointi, jossa pystyakselilla on esitetty simuloitun empirisen prosessin ja Ito-prosessin varianssien erotus. Vaaka-akselilla on option jäljellä oleva voimassaoloaika, jolle varianssi on laskettu. Erotus kasvaa nopeasti nolasta tietylle tasolle, jonka jälkeen se kasvaa hitaasti aikaperiodin pidentyessä. Kun optiolla on voimassaoloaikaa vain yksi päivä, pitäisi erotuksen olla nolla. Siten myös ISD-sarjassa tulisi olla "notkahdus" sellaisissa kohdissa, joissa taustalla olevan option päättymispäivä on lähellä.⁷

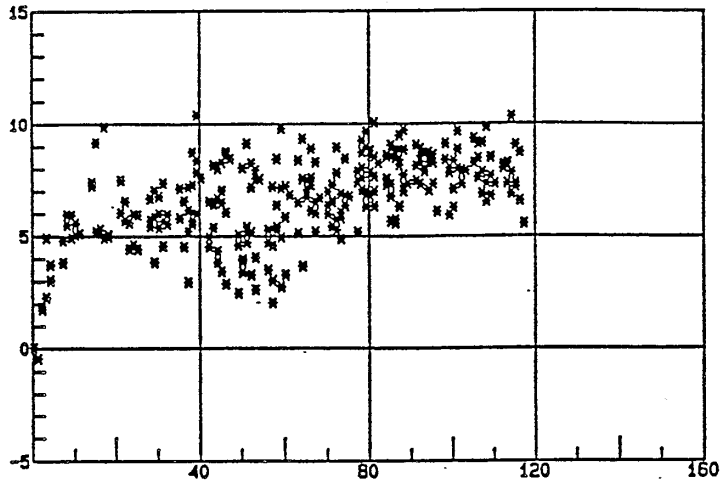
Kuviossa 6.3.2b on havaittavissa erotusten pieneneminen aikaperiodin ollessa väliltä 80 - 120 päivää. Tämä johtuu siitä, että 80 - 120 päivän maturiteeteilla lasketut volatilitteetit sattuvat kyseisellä maturiteettisarjalla siten, että volatilitteetin alkuarvoina oli kaksi korkean volatilitteetin periodia. Koska empirisen prosessin

⁷Käytännössä tämä vaatisi ISD-estimaatin aggregoimista hyvin suuresta määrästä optioita, koska päättymispäivän läheisyydessä ISD:n laskeminen on herkkä pienillekin markkinahinnoissa esiintyville hinnoittelu- ja mittausvirheille. Yleensä käy niin, että aivan voimassaoloajan lopussa ISD-iterointi ei konvergoi. Siten esimerkiksi tässä tutkimuksessa aggregoitu ISD-sarja sisältää vähintään kuu-kauden mittaiselle voimassaoloajalle laskettuja implisiittisiä volatilitteetteja.

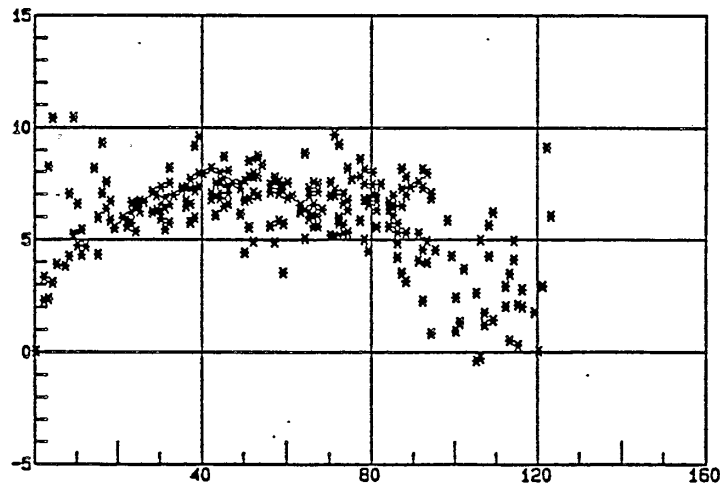
KUVIO 6.3.2

Simuloidun GARCH/ARI-prosessin ja Ito-prosessin keskihajontojen erotuksen riippuvuus option voimassaoloajasta (erotus prosenttiyksikköinä, ajan pituus päivinä)

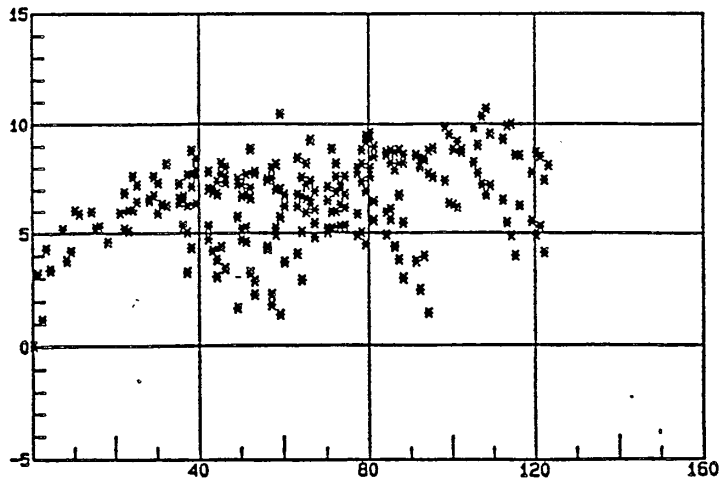
a) 1. optiohintasarja



b) 2. optiohintasarja



c) 3. optiohintasarja



GARCH-volatiliteetti ei ole täysin integroitunut, volatiliteetti laskee korkealta lähtötasoltaan suhteellisen nopeasti kohti pitkän aikavälin arvoa ja dominoi siten koko ennustevolatiliteettia. (Tilanteissa, joissa volatiliteetin lähtöarvo on lähempänä pitkän aikavälin vakiota, autokorrelaation aiheuttama varianssin lisäys dominoi.)

6.3.1 Teoreettisten option hintojen suhteellinen virhe

Esitetyn teoriakehikon pohjalta tiedetään, että myös indeksijakauman korkeammat momentit vaikuttavat option hintaan. Siten pelkkä volatiliteettisarjojen vertaaminen ei välttämättä anna oikeaa kuvaa vastaavien optiohintojen suhteesta. Koska eri momenttien erotusten vaikutus riippuu option toteuttamishinnan ja indeksin odotusarvon suhteesta, vaikeutuu sellaisen aineiston tulkinta, joka sisältää myös muita kuin tasaoptioita.

Näistä syistä on seuraavassa laskettu B76- ja BS-mallin sekä simuloitujen option hintojen prosentuaalinen hinnoitteluvirhe suhteessa todellisiin optioiden hintoihin. B76- ja BS-malleja laskettaessa on käytetty indeksimuutosten empiirisen prosessin päivittäistä volatiliteettia. B76-malli on laskettu myös siten, että volatiliteetti-estimaattina on käytetty empiirisen prosessin simuloitua volatiliteettia sekä futuurin logdifferenssien aikasarjasta laskettua 10 päivän liukuvaa keskihajontaa. Edellä luetellut tavat laskea annetun hinnoittelumallin suhteelliset hinnoitteluvirheet ovat ex post-tarkasteluja. B76-mallin hinnoitteluvirheet lasketaan ex ante käyttämällä edellisen periodin implisiittistä volatiliteettia. Lisäksi lasketaan B76-mallin hinnoitteluvirheet, käyttämällä indeksimuutosten empiirisen prosessin päivittäistä volatiliteettia, joka on autokorrelaatiokorjattu liitteessä lasketun kertoimen avulla.

Prosentteina ilmaistu suhteellinen hinnoitteluvirhe on muotoa $\epsilon = 100 * [C(m) - C(o)] / C(o)$, missä m viittaa teoreettisen mallin antamaan option hintaan ja o havaittuun option hintaan. Kun malli ylihinnoittelee suhteessa havaittuun hintaan, saa ϵ positiivisen arvon. Mallin

alihinnoittelussa on ϵ negatiivinen. Hinnoitteluvirheet on laskettu ainoastaan sellaisista optioista, joissa havaittu hinta on suurempi kuin neljä (4) markkaa. Tämä johtuu siitä, että option hinnan ollessa hyvin alhainen on transaktiokustannusten aiheuttama poikkeama teoreettisesta hinnasta dominoiva.

Taulukossa 6.3.1.1 on esitetty eri mallien tekemien suhteellisten hinnoitteluvirheiden keskiarvot ja keskihajonnat. Luvut on esitetty koko tarkasteluperiodilta sekä kahtia jaetun aineiston alku- ja loppuperiodilta. Keskimääräinen hinnoitteluvirhe ja sen keskihajonta on yhdistetty teoreettisten hintojen osuvuutta kuvaavaan MSE-lukuun. Tämä lasketaan kaavasta $MSE = \mu^2(\epsilon) + \sigma^2(\epsilon)$. Mitä pienempi on MSE-luku, sitä paremmin teoreettiset hinnat vastaavat havaittuja hintoja. MSE-luku kelpaa ainoastaan eri teoreettisten hintojen osuvuuden keskinäiseen vertailuun, eikä sen perusteella voida sanoa, noudattaako markkinoiden hinnoittelu todella tarkasteltavaa teoreettista mallia.

TAULUKKO 6.3.1.1⁸ Teoreettisten optiohintojen suhteelliset hinnoitteluvirheet

Hinnoittelumalli	€(S)			€(BS)			€(B76)		
Periodi	μ	σ	MSE	μ	σ	MSE	μ	σ	MSE
2.5.88 - 8.6.89	1.38	13.7	190	1.36	27.6	765	-23.9	24.6	1179
2.5.88 - 15.11.88	-3.63	13.6	198	-6.48	27.4	791	-28.0	27.3	1530
16.11.88 - 8.6.89	5.56	11.1	153	8.03	23.7	626	-16.0	19.1	622
	€(B76/S)			€(B76/F)			€(B76/ISD)		
	μ	σ	MSE	μ	σ	MSE	μ	σ	MSE
2.5.88 - 8.6.89	-2.91	12.0	153	-10.86	17.1	411	-1.25	11.2	127
2.5.88 - 15.11.88	-7.26	13.0	223	-10.79	20.7	546	-0.94	12.1	148
16.11.88 - 8.6.89	1.36	8.1	67	-10.92	13.2	293	-1.32	9.3	89
	€(B76/A)								
	μ	σ	MSE						
2.5.88 - 8.6.89	-4.95	24.1	607						
2.5.88 - 15.11.88	-9.66	27.3	840						
16.11.88 - 8.6.89	-0.06	17.6	309						

⁸Taulukossa käytetään eri hinnoittelumenetelmistä seuraavia tunnuksia edellä määriteltyjen lisäksi: S - simulointimalli; B76/S - Black-76 -malli, jossa volatilitteettiestimaattina on käytetty GARCH/ARI-prosessin simuloitua volatilitteettiä; B76/F - Black-76 -malli, jossa volatilitteettiestimaattiin on käytetty futuurin kymmenen päivän liukuvaa keskihajontaa; B76/ISD - Black-76 -malli, jossa on käytetty edellisen periodin implisiittistä volatilitteettiä; B76/A - Black-76 -malli, jossa volatilitteettiestimaattina on käytetty liitteessä lasketulla kertoimella autokorrelaatiokorjattua GARCH(1,1)/A-RI(1,1,0) -prosessin päivittäistä volatilitteettiä.

B76-malli

B76-mallin keskimääräinen virhe vahvistaa sen, että indeksin aikasarjasta estimoidulla päivittäisellä volatiliteetilla lasketut teoreettiset hinnat ovat liian alhaisia havaittuihin hintoihin verrattuna. Virhehinnoittelun syyksi on edellä esitetty päivittäisten indeksimuutosten positiivinen autokorrelaatio.

BS-malli

Tarkastellaan BS-mallin hinnoitteluvirheitä. Koko periodilta laskettu keskimääräinen hinnoitteluvirhe on lievästi positiivinen. Tämä on outoa, koska myös BS-hinnat on laskettu harhaisella volatiliteetti-estimaatilla, ja siten niiden pitäisi tehdä keskimäärin negatiivisia hinnoitteluvirheitä. Hinnoitteluvirheiden keskihajonta on kuitenkin samaa suuruusluokkaa kuin B76-mallilla. Ilmiön todennäköinen selitys on se, että markkinat käyttävät option hinnan perustana futuuria eivätkä indeksiä. Koska futuurin hinta on ollut pitkiä aikoja teoreettisen hintansa alapuolella, muodostuu BS-mallin hinta korkeammaksi kuin esimerkiksi B76-hinta. Toisaalta harhainen volatiliteetti-estimaatti alentaa BS-mallin hintaa, joten näiden kahden seikan yhteisvaikutuksesta BS-mallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe on lähellä nollaa. BS-mallin hinnoitteluvirheen ja futuurin alihinnoittelun välistä riippuvuutta havainnollistaa kuvion 6.3.1.1 ristiintaulukointi.

Simulointimalli

Siirrytään simuloitujen option hintojen tarkasteluun. MSE-luvuilla mitattuna simuloitujen hinnat osuvat havaittuihin hintoihin selvästi paremmin kuin B76- tai BS-mallin antamat teoreettiset hinnat. Koko periodilta laskettu keskimääräinen hinnoitteluvirhe on 1.38 prosenttia ja hinnoitteluvirheiden keskihajonta 13.7 prosenttiyksikköä.

Kuviossa 6.3.1.2 on ristiintaulukoinnin avulla esitetty simulointimallin hinnoitteluvirheiden riippuvuus option toteuttamishinnan ja

futuurin arvon suhteesta. Kuvion perusteella ei voida havaita selvää riippuvuutta muuttujien välillä. Sen sijaan hinnoitteluvirheiden hajonta on sitä suurempi mitä pienempi on futuurin ja toteuttamishinnan erotus. Tämä johtunee siitä, että tasaoption hinta on kaikkein herkin parametrien arvoille (Cox & Rubinstein (1985), s. 215). Herkkyys vähenee siirryttäessä miinusoptyoihin. Toisaalta miinusoptyoiden hinnoitteluvirheiden hajonta on suuri transaktiokustannusten vaikutuksesta.

Simulointimalli ja B76/S-malli

Kiintoisa tulos on se, että simuloitulla volatiliteteetilla laskettu Black-76 -malli (B76/S) osuu MSE-vertailussa paremmin havaittuihin option hintoihin kuin simulointimalli (kuvio 6.3.1.3). Nämä hinnoittelumallit ovat periaatteessa muuten samanlaiset, mutta B76-malli olettaa indeksin olevan lognormaalisti jakautuneen, kun taas simuloitujen option hinnat käyttävät indeksin empiiristä jakaumaa. Lisäksi jakaumien odotusarvot poikkeavat toisistaan, koska simuloituissa hinnoissa indeksin autokorrelaation huomioon ottaminen vaikuttaa indeksijakauman odotusarvoon. Jakaumien hajonnat ovat kuitenkin samat.

Se, että B76/S-mallin hinnoitteluvirheiden keskihajonta, $\sigma(\epsilon)$, on pienempi kuin simulointimallin $\sigma(\epsilon)$, voi johtua kahdesta seikasta. Markkinat saattavat olla osittain tehottomat, eivätkä kykene käyttämään hyväkseen tietoa indeksin todellisesta jakaumasta. Tällainen vaihtoehto pitäisi ehdottomasti testata ex ante siten, että tutkitaan simulointimallin tuottamia voittoja sopivasti valitulla kaupankäyntistrategialla.

Todennäköisempi syy keskihajontojen eroon on se, että simulointimallin hinnat sisältävät enemmän kohinaa kuin B76/S-hinnat. Yksi kohinan lähde on itse simulointi, joka toistokokeiden äärellisen lukumäärän vuoksi tuottaa parhaimmillaankin vain approksimaation todellisesta empiirisen prosessin jakaumasta. Kappaleessa 6.1 on todettu, että juuri jakauman korkeammat momentit ovat herkimpiä simuloinnista johtuville virheille.

Toinen ilmeinen virhelähde on se, että simuloituissa optioiden hinnoissa autokorrelaation vaikutus indeksijakauman odotusarvoon on liian voimakas. Autokorrelaatio otetaan huomioon indeksimuutosten prosessissa. Samalla käytetään kuitenkin futuurin kautta laskettua implisiittistä osinkovirtaa prosessin trendin määrittelyssä. Koska futuurihintojen muutosten prosessi ei ole yhtä voimakkaasti autokorreloitunut kuin indeksin prosessi,⁹ on osa indeksiin vaadittavasta autokorrelaatiokorjauksesta jo mukana futuurin hinnassa. Siten simuloinnissa käytetyn empiirisen prosessin sisältämän AR(1)-termin kerroin on itse asiassa liian suuri.

Simuloidulla volatilititeetilla lasketun B76/S-mallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe on runsaat neljä (4) prosenttiyksikköä pienempi kuin simulointimallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe. Ero pysyy varsin stabiilina, kun tarkastellaan erikseen aineiston alku- ja loppuperiodia. Lisäksi kyseisten mallien hinnoitteluvirheiden korrelaatio on korkea, noin 0.85. Havaittu keskimääräinen ero saattaa johtua ex post siitä, että koko tarkasteluperiodilla FOX-indeksi on noussut yli kolmekymmentä prosenttia.¹⁰ Simulointimallissa käytetty kasvuvauhti - riskitön korko jaettuna implisiittisellä osinkotuotolla - on huomattavasti alhaisempi.¹¹ Siksi positiivisesta autokorrelaatiosta johtuva korjaus indeksijakauman odotusarvoon on keskimäärin positiivinen. Kuten edellä on esitetty, simulointimalli tekee toisaalta ylisuuren autokorrelaatiokorjauksen indeksijakauman odotusarvoon. Simulointimallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe on saattanut siten muodostua B76/S-mallin keskimääräistä virhettä korkeammaksi.

B76/S-malli ei ota huomioon empiirisen jakauman korkeampia momenteja, kuten simulointimalli. Korkeammat momentit poikkeavat lognormaa-

⁹Katso kappale 5.2.

¹⁰FOX-indeksin päivittäisten suhteellisten muutosten keskiarvo tarkasteluperiodilla 2.5.1988 - 8.6.1989 on noin 33 prosenttia vuositasolla ilmaistuna.

¹¹Kuten kappaleessa 6.2 on todettu, Cox & Ross -malliin perustuva simulointi edellyttää riskittömän koron käyttöä simuloitavan prosessin trendinä (Engle & Mustafa (1989)).

lin jakauman arvoista empiirisen prosessin GARCH-ominaisuuksien takia. Se, että B76S-mallin osuvuus havaittuihin optioiden hintoihin on jopa parempi kuin simulointimallin, viittaa siihen että, kyseisillä jakaumaominaisuuksilla ei ole käytännössä ollut suurta merkitystä optioiden hinnoittelussa Suomen indeksioptiomarkkinoilla. Syy tähän lienee se, että FOX-indeksin muutosten GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-prosessi ei ole integroitunut varianssin suhteen, jolloin prosessin jakauman huipukkuus ei ole kovin merkittävää. Kappaleen 6.2 tuloksiin viitaten on kuitenkin muistettava, että GARCH-prosessin integroituneisuus ja sen aiheuttama huipukkuuden lisäys alentavat selvästi tasaoption teoreettista hintaa.

Hinnoitteluvirheet, autokorrelaation stabiilisuus ja epälineaariset GARCH-parametrit

Kaikkien taulukossa 6.3.1.1 esiintyvien mallien hinnoitteluvirheiden keskihajonnat ovat pienentyneet alkuperiodilta loppuperiodille siirryttäessä. Yksi syy keskihajontojen pienentymiseen on se, että alkuperiodi sisältää enemmän miinusoptioita kuin loppuperiodi. Kuten kuvioista 6.3.1.4 nähdään, markkinoiden ensimmäiset optioiden hinnat ovat lähteneet liikkeelle selvästi teoreettisten hintojen yläpuolelta, mutta hakeutuneet varsin nopeasti kohti teoreettisten hintojen tasoa. Tämä ylihinnoittelu lisää alkuperiodin hinnoitteluvirheiden keskihajontaa. Myös kuvion 5.2.1 volatilitteettisarjojen vertailu viittaa siihen, että hinnanmuodostus on stabiloitunut markkinoiden vanhetessa. Siten markkinoiden nuoruuden ja alkuperiodin sisältämien miinusoptioiden takia tarkasteluperiodin loppujaksoa on pidettävä hinnanmuodostukseltaan luotettavampana.

Lukuun ottamatta B76/ISD-menetelmää taulukon 6.3.1.1 malleille on yhteistä se, että niiden keskimääräiset hinnoitteluvirheet ovat muuttuneet positiivisemmiksi alkuperiodilta loppuperiodille siirryttäessä.¹² Samaan ilmiöön viittaa myös kuviossa 6.3.1 simuloitun ja

¹²B76/F-mallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe pysyy karkeasti ottaen samana molemmilla alajaksoilla.

implisiittisen volatilitiitin vertailu. Ilmiö on konsistentti kappaleessa 5.2 käsitellyn mahdollisuuden kanssa, että FOX-indeksin muutosten autokorrelaatio on epästabiili. Jos positiivisen autokorrelaation määrä todella vähenee tarkasteluperiodin kuluessa, muodostuvat B76I:ä lukuunottamatta kaikkien mallien keskimääräiset hinnoitteluvirheet positiivisemmiksi aineiston loppupuoliskolla kuin alkupuoliskolla. Tosin kappaleessa 5.2 esitetyn evidenssin perusteella näyttää pikemminkin siltä, että autokorrelaation määrä on ollut varsin stabiili.

Yksi mahdollinen tekijä, joka saattaa selittää hinnoittelumallien taipumusta yliarvostaa optioita tarkasteluperiodin loppupuoliskolla verrattuna alkupuoliskoon, on todellisten GARCH-parametrien epälineaarisuus. Tätä mahdollisuutta on jo käsitelty kappaleessa 5.3. Tämä merkitsisi sitä, että suurten volatilitiittishokkien vaikutus prosessin tulevaan volatilitiettiin olisi suhteellisesti vähäisempi kuin pienempien shokkien. Estimoitu GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-malli antaisi siten liian korkeita volatilitiettiinusteita suurten volatilitiittishokkien perusteella.¹³

B76/A-malli

B76/A-mallin keskimääräinen hinnoitteluvirhe tarkasteluperiodin loppupuoliskolla ei poikkea merkitsevästi nolasta. Sen sijaan hinnoitteluvirheiden keskihajonta on selvästi suurempi kuin esimerkiksi simulointimallilla ja B76/S-mallilla. B76/A-mallissa on käytetty volatilitiettiinestimaattina numeerisen kertoimen avulla auto-

¹³Sekä tarkasteluperiodin alku- että loppupuoliskolla on esiintynyt suurten volatilitiittishokkien jakso (katso kuvio 6.3.1). Alkupuoliskon jakso on liittynyt osakekurssien voimakkaaseen laskuun, kun taas loppupuoliskolla on ollut voimakas nouseva trendi (kuvio 5.1.1). Alkupuoliskon laskevalla jaksolla optiot ovat olleet miinusoptioita, joten niiden hinnoitteluvirheiden hajonta on ollut hyvin suuri. Sen sijaan loppupuoliskon jaksolla optiot ovat olleet lähellä tasaoptioita, joihin volatilitiittiparametrien valinta vaikuttaa herkästi. Estimoidun lineaarisen GARCH-mallin perusteella lasketut teoreettiset optiohinnat ovat siten saattaneet olla ylihintaisia, jos todellinen GARCH-malli onkin epälineaarinen.

korrelaatiokorjattua FOX-indeksin GARCH/ARI-prosessin hetkellistä keskihajontaa.

B76/A-malli toimii keskimäärin hyvin, koska sen laskemiseen on käytetty autokorrelaatiokorjattua volatiliteettiestimaattia. Hinnoitteluvirheiden keskihajonta kasvaa kuitenkin suureksi, koska malli ei kykene ottamaan huomioon volatiliteetin GARCH-ominaisuuksia. Toisin sanoen, mallissa käytetty volatiliteettiestimaatti on alaspäin harhainen negatiivisten volatiliteettishokkien yhteydessä ja ylöspäin harhainen positiivisten shokkien yhteydessä (katso kapale 3.3).¹⁴ Kun prosessin hetkellinen volatiliteetti on lähellä stationaarista, pitkän aikavälin vakiota, se toimii autokorrelaatiokorjattuna hyvin tulevan volatiliteetin ennustamisessa.

B76/ISD-malli

Kaikkein parhaiten havaittuihin optiohintoihin osuvat Black-76 -mallilla lasketut teoreettiset hinnat, joissa volatiliteettiestimaattina on käytetty edellisen periodin implisiittistä volatiliteettia. Tulos ei ole yllätys aikaisempien tutkimusten valossa (Jarrow & Wiggings (1989)). Se viittaa siihen, että markkinoilla on riski-odotuksia koskevaa informaatiota, joka ei välttämättä sisälly osakekurssien historialliseen hintakehitykseen. Esimerkki tällaisesta informaatiosta on tieto tulevasta, ei kausittain toistuvasta ajankohdasta, jolloin julkistetaan osakekursseihin vaikuttavia taloudellisia tunnuslukuja. Implisiittisellä volatiliteetillä varustetun Black-76 -mallin suorituskyky vahvistaa myös sitä käsitystä, että odotetun indeksijakauman hajonnalla on huomattavasti suurempi vaikutus FOX-option hintaan kuin indeksijakauman korkeammilla momenteilla.

¹⁴Se, että mallin tekemät hinnoitteluvirheet ovat keskimäärin negatiivisia sekä koko tarkasteluperiodilla että periodin alkupuoliskolla, johtuu aineistossta pois jätetyistä vahvoista miinusoptioista, joista suurin osa sijoittuu periodin alkupuoliskon suurten, positiivisten volatiliteettishokkien jaksoon.

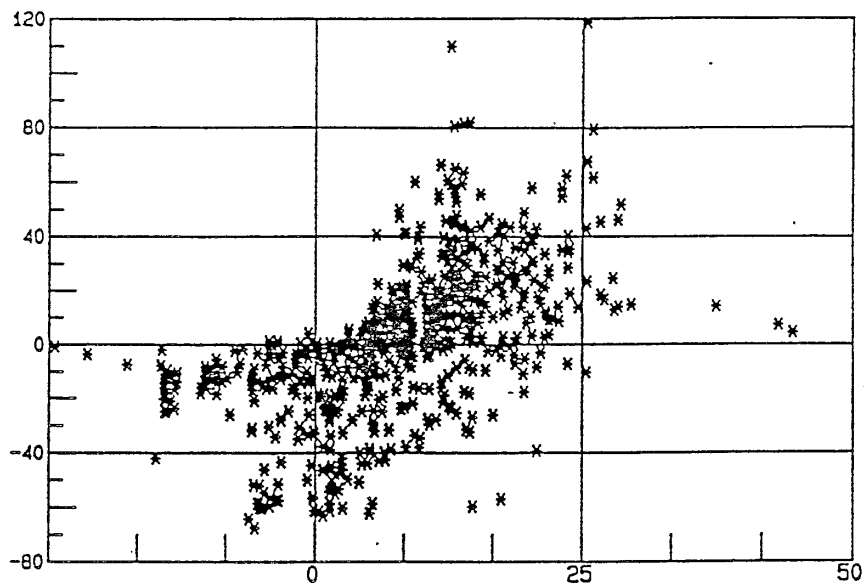
Johtopäätös simulointimallin ja B76/S-mallin perusteella

Simulointimallin koko periodin keskimääräinen hinnoitteluvirhe on lievästi positiivinen (1.36) ja B76S-mallin vastaavasti jonkin verran negatiivinen (-2.91 %). Molemmat keskiarvot poikkeavat merkittävästi nollostä. Molempien mallien keskimääräiset hinnoitteluvirheet ovat tarkasteluperiodin alkupuoliskolla negatiivisia ja loppupuoliskolla positiivisia. Myös kaikki nämä arvot poikkeavat merkittävästi nollostä. Edellä on esitetty joitakin näkökohtia, jotka saattavat selittää mallien tekemien keskimääräisten hinnoitteluvirheiden poikkeamista nollostä.

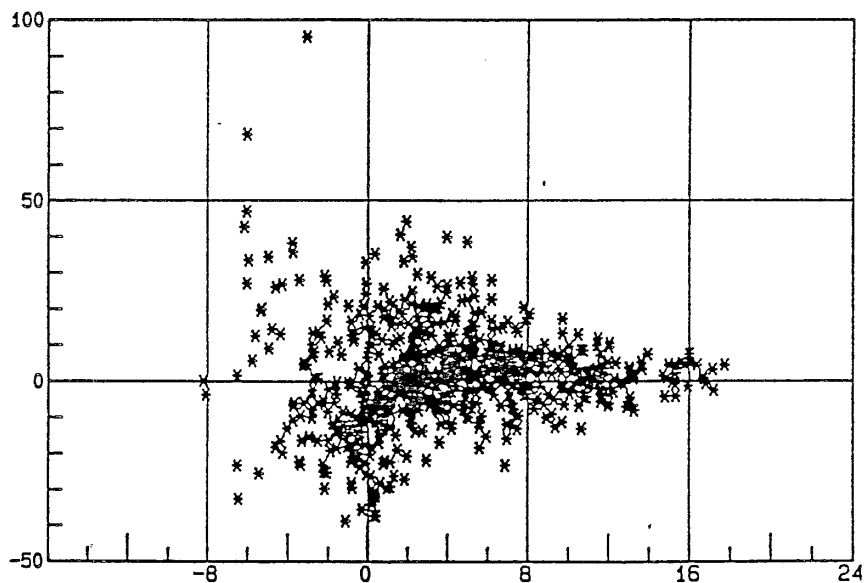
Vertailevien tulosten valossa voidaan kuitenkin sanoa, että markkinat ovat huomioineet keskimäärin varsin hyvin FOX-indeksin päivittäisten muutosten autokorrelaation ja GARCH-ominaisuuksien vaikutuksen prosessin volatilitettiin ja sitä kautta optioiden hintoihin. Tätä vahvistaa myös taulukkoon 6.3.1.1 lasketut B76F-hinnat, joissa volatilitettiin estimaattina on käytetty futuurin päivittäisten muutosten liukuvaa keskihajontaa.¹⁵ Koska myös futuurin päivittäiset muutokset ovat positiivisesti autokorreloituneet, on niistä laskettu volatilitettiin systemaattisesti liian alhainen estimaatti todelliselle volatilitetille. B76F-mallin teoreettiset hinnat ovat selvästi keskimäärin alhaisempia kuin havaitut optioiden hinnat.

¹⁵Futuurin hinnanmuutosten liukuva keskihajonta on laskettu 10 päivän liukumajaksolla.

KUVIO 6.3.1.1 BS-mallin suhteellisen hinnoitteluvirheen (%) riippuvuus poikkeamasta futuurin ja indeksin välisessä pariteetissa¹⁶



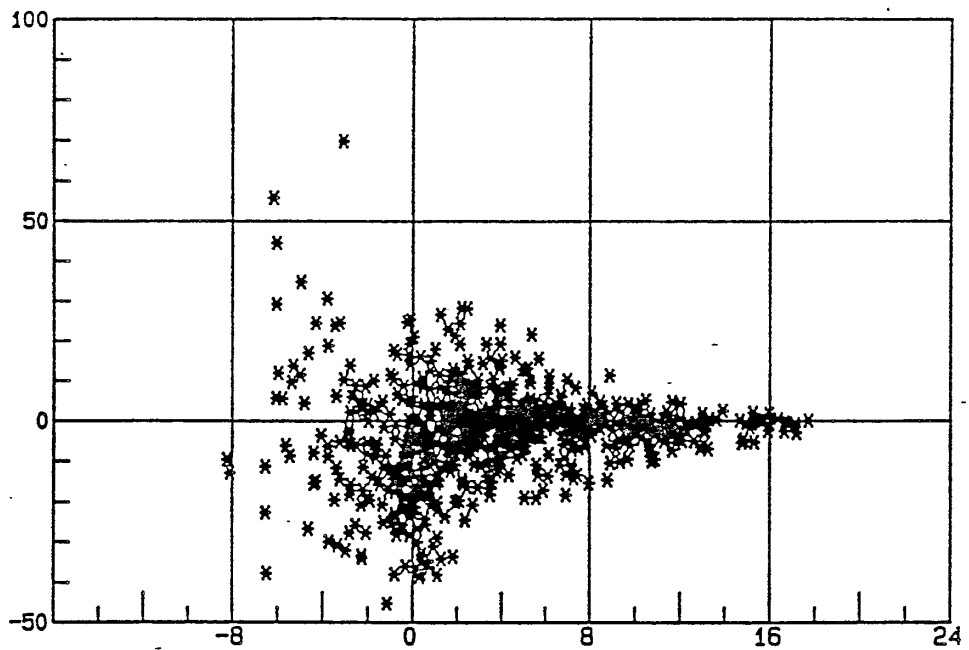
KUVIO 6.3.1.2 Simulointimallin suhteellisen hinnoitteluvirheen (%) riippuvuus option hinnan ja toteuttamishinnan välisestä suhteesta.¹⁷



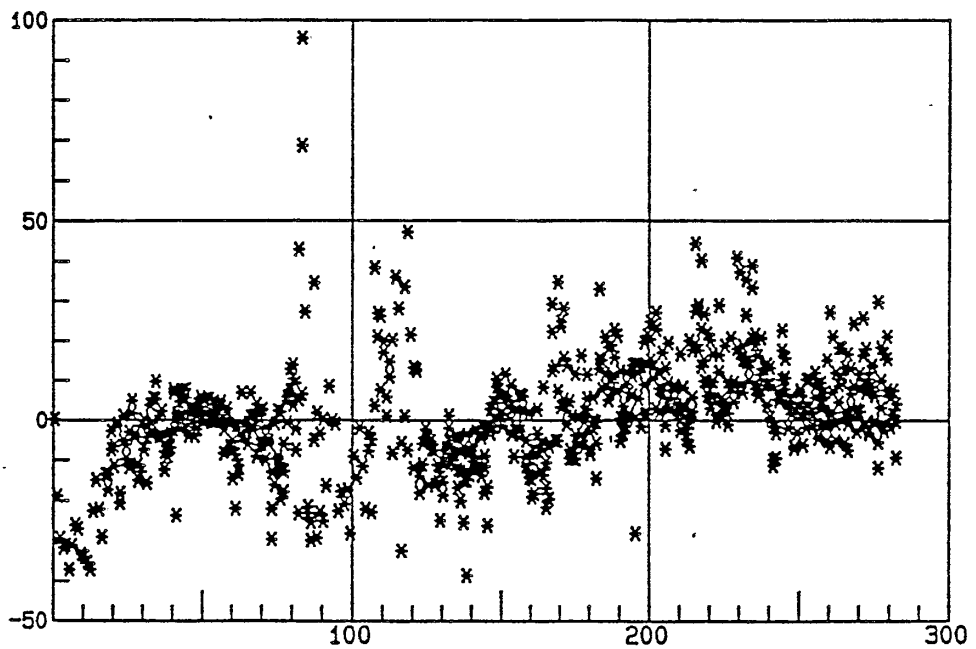
¹⁶poikkeamaa futuurin ja indeksin välisessä pariteetissa mitataan tässä implisiittisellä osinkotuotolla, joka ilmaistaan prosenteissa (liite 7, alaviite).

¹⁷Option hinnan ja toteuttamishinnan suhdetta vastaa muoto $100 \cdot (F - K) / K$, jossa F on futuurin hinta ja K option toteuttamishinta (vertaa Jarrow & Rudd (1982a)). Suhde ilmaistaan prosenteina.

KUVIO 6.3.1.3 B76/S-mallin suhteellisen hinnoitteluvirheen riippuvuus option hinnan ja toteuttamishinnan suhteesta



KUVIO 6.3.1.4 Simulointimallin suhteellisen hinnoitteluvirheet aikajärjestyksessä ajanjaksolla 2.5.88 - 8.6.89



6.4 Johtopäätökset empiirisistä tuloksista

Tässä tutkimuksessa on selvinnyt, että Suomen Optiomeklarit Oy:n ylläpitämällä johdannaismarkkinoilla indeksimuutosten autokorrelaation huomioiminen poistaa systemaattisen tasoeron optioiden impliittisen volatilitiitin ja indeksin aikasarjasta estimoidun volatilitiitin väliltä ajanjaksolta 2.5.1988 - 8.6.1989. Autokorrelaatio voidaan ottaa huomioon indeksijakauman simulointiin perustuvassa optionhinnoittelumenetelmässä.

Teoreettisten option hintojen ja havaittujen hintojen välisten poikkeamien perusteella voidaan sanoa, että markkinat kykenevät huomioimaan todellisen autokorrelaation suuruuden. Sama voidaan todeta vertaamalla optioiden impliittistä volatilitiettä ja autokorrelaatiokorjattua, FOX-indeksin aikasarjasta estimoitua volatilitiettä. Markkinat eivät käytä volatilitiestimaattorina esimerkiksi päivittäisten futuurihintojen muutosten liukuvaa keskijajontaa, joka myös on autokorreloituneiden futuurin hinnanmuutosten takia harhainen. Sen sijaan hinnoitteluvirheiden tarkastelun valossa jää epäselväksi, ottavatko markkinat huomioon autokorrelaation vaikutuksen indeksin odotusarvoon ja sitä kautta optioiden hintoihin.¹⁸

Markkinat kykenevät ottamaan huomioon myös FOX-indeksin muutosten GARCH-prosessin pitkän aikavälin stationaarisuuden tulevan volatilitiitin ennustamisessa. Tämä voitiin todeta vertaamalla hinnoittelumalleja, joista toisessa huomioitiin sekä autokorrelaation että GARCH-ominaisuuksien vaikutus volatilitiettiin, mutta toisessa ainoastaan autokorrelaation vaikutus.

Sen sijaan prosessin GARCH-ominaisuuksien aiheuttama indeksijakauman huipukkuus ja sen vaikutus optioiden hinnoitteluun näyttää käytännössä vähäiseltä. Kysymys on kuitenkin jätettävä avoimeksi. Kuten

¹⁸Markkinoiden kykyä huomioida autokorrelaation vaikutus indeksijakauman odotusarvoon ja sitä kautta option hintaan voitaisiin tutkia simuloimalla sopiva kaupankäytistrategia (Berglund, Hedvall, Liljebloom (1988)).

simulointikokeissa kappaleissa 6.2 havaittiin, GARCH-ominaisuuksien vaikutus jakauman huipukkuuteen ja sitä kautta optioiden hintaan on huomattavasti suurempi, jos GARCH-prosessi on integroitunut. Vastavasti vaikutus option hintaan on sitä suurempi, mitä voimakkaammin toteutuneet volatiliteettishokit vaikuttavat prosessin tulevaan volatiliteettiin.¹⁹ Koska FOX-indeksin GARCH-volatiliteetti on pitkällä aikavälillä stationaarinen, sen vaikutus option hintaan todettiin suhteellisen vähäiseksi.

Eri teoreettisilla malleilla lasketut optioiden hinnat vastaavat parhaiten havaittuja hintoja tarkasteluperiodin loppupuoliskolla, eli 16.11.1988 - 8.6.1989. Aivan ensimmäiset optionoteeraukset markkinoiden alkaessa ovat todennäköisesti olleet ylihintoja. Suurin osa tarkastelujakson alkupuoliskon hinnoitteluvirheiden hajonnasta johtuu kuitenkin aineiston sisältämistä miinusoptioista.

B76-malli, jossa autokorrelaation vaikutusta volatiliteetin estimointiin ei huomioitu, alihinnoitteli optioita. Black & Scholes -mallin hinnoitteluvirheiden tarkastelu vahvisti puolestaan, että markkinat käyttävät futuurin hintaa option hinnoittelun perustana.

Black-76 -malli, jossa on käytetty indeksin empiirisellä prosessilla simuloitua volatiliteettiestimaattia, vastasi paremmin havaittuja optioiden hintoja kuin FOX-indeksin empiiriseen jakaumaan perustuva simulointimalli. Tämä johtunee siitä, että simulointimalli ylimerkitsee indeksin odotusarvoon tehtävän autokorrelaatiokorjauksen. Tästä johtuva hinnoitteluvirhe estää myös havaitsemasta, parantaako empiirisen prosessin GARCH-ominaisuuksien huomioon ottaminen mainittavasti teoreettisten hintojen osuvuutta havaittuihin hintoihin. Toinen selitys voisi olla äärellisistä toistokoemääristä johtuva satunnaisuus simulointituloksissa.

Simulointimallia voitaisiin edelleen kehittää estimoimalla futuurin empiirinen prosessi ja simuloimalla tämän avulla optioiden hinnat.

¹⁹Toisin sanoen, mitä suurempi on parametri α .

Näin toteutetussa simuloinnissa autokorrelaation vaikutus jakauman odotusarvoon olisi huomioitu oikein. Vasta tämän jälkeen voitaisiin luotettavasti verrata simulointimallia B76-malliin, jossa käytettäisiin jälleen simuloitua volatiliteettia.

Kun Black-76 -mallissa käytetään volatiliteettiestimaattina edellisen periodin implisiittistä volatiliteettia, saadut teoreettiset optiohinnot vastaavat parhaiten havaittuja hintoja. Tulos viittaa vahvasti siihen, että markkinoiden riskiodotusten muodostumista on vaikea mallittaa pelkästään osakekurssien historiallisen aineiston perusteella.²⁰

Optiomarkkinoita käsittelevässä tilastomateriaalissa on tapana julkaista osakemarkkinoiden historiallinen volatiliteetti (kts. esim. Kauppalehti Optio, Suomen Kuvalehti, Helsingin Sanomat: "Rahan liikkeet"). Tämän vuoksi käsitellään lopuksi tulevan volatiliteetin ennustamista kyseisen menetelmän avulla.

Tutkimuksessa on todettu, että sekä päivittäisten indeksimuutosten autokorrelaatio että niiden ehdollinen heteroskedastisuus aiheuttavat ongelmia volatiliteetin ennustamiselle historiallisen aikasarjan perusteella. On todettu, että pelkkä autokorrelaatiokorjauksen tekeminen päivittäisistä muutoksista laskettuun historialliseen volatiliteettiin ei ole tyydyttävää, koska indeksimuutosten varianssi vaihtelee, mutta pyrkii palaamaan kohti pitkän aikavälin vakiota. Yksinkertaisin keino tuottaa kohtuullisen harhaton estimaatti tulevalle volatiliteetille historiallisen aineiston avulla, on käyttää riittävän pientä frekvenssiä (esimerkiksi viikottaisia havaintoja) ja riittävän suurta havaintomäärää (katso myös Berglund, Hedvall & Liljebloom (1990)). Tällä tavalla tuotettu estimaatti ei käytännöllisesti katsoen sisällä autokorrelaation aiheuttamaa harhaa (vertaa liite 2), vaan estimoi volatiliteetin todellista, pitkän aikavälin

²⁰Implisiittisen volatiliteetin antaman estimaatin paremmuutta korostaa se, että tutkimuksessa käytetty FOX-indeksin muutosten stokastinen prosessi on estimoitu ex post käyttämällä koko tarkastelu-periodin dataa.

keskimääräistä tasoa. Menetelmän suurin puute lienee siinä, että se saattaa antaa huonoja ennusteita lyhyille horisonteille. Edelliset näkökohdat esitetään lisäksi sillä varauksella, että tutkimuksessa käytetyn tarkasteluperiodin pituus on ehkä aivan liian lyhyt johtopäätösten tekoon volatiliteetin käyttäytymisestä pitkällä tähtäyksellä.

7 YHTEENVETO

Tässä työssä on tarkasteltu indeksioptioiden hinnoittelua tapauksessa, jossa osakeindeksi heijastaa informaatiota tehottomasti ja jossa markkinavolatiliteetti on heteroskedastinen. Indeksimuutoksia generoi tällöin yhdistetty GARCH/ARI-prosessi, eli sekä muutosten odotusarvo että varianssi ovat autoregressiivisiä. On osoitettu, että osakeindeksin muutosten positiivinen autokorrelaatio, jonka mahdollisuus on viime aikaisissa tutkimuksissa todennettu sekä empiirisesti että teoreettisesti, nostaa teoreettista option hintaa. Autokorreloituneen prosessin ennustevarianssi kasvaa horisontin pidentyessä suuremmaksi kuin autokorreloimattoman prosessin. Option hinta puolestaan on sitä suurempi mitä korkeampi on indeksimuutosten varianssi.

Autokorrelaatio vaikuttaa myös osakeindeksin odotusarvoon. Kun indeksiä kuvaava prosessi on positiivisesti autokorreloitunut, keskimääräistä suurempi (pienempi) osakeindeksin muutos nostaa (alentaa) odotusarvoa verrattuna autokorreloimattomaan prosessiin. Osto-option hinta nousee indeksin odotusarvon noustessa, ja myyntioption laskee.

Ehdollisen heteroskedastisuuden eli niin sanottujen GARCH-ominaisuuksien vaikutusta option hintaan voidaan niin ikään tarkastella osakeindeksin todennäköisyysjakauman kautta. Erot Black & Scholes - tai Black-76 -mallin antamaan teoreettiseen hintaan syntyvät siitä, että GARCH-prosessin varianssi ei ole vakio ja että kyseisen prosessin generoiman jakauman neljäs momentti poikkeaa BS- ja B76-kaavojen oletuksena olevan lognormaalin jakauman vastaavasta momentista. Tehdyt simulointikokeet osoittivat, että integroituneiden GARCH-prosessien vaikutus tasaoption teoreettiseen hintaan saattaa olla huomattava.

Jos tarkasteltava prosessi on sekä ehdollisesti heteroskedastinen että autokorreloitunut, on prosessin todennäköisyysjakauman analyytinen johtaminen työlästä. Jakauma voidaan kuitenkin simuloida riittävällä tarkkuudella Monte Carlo -menetelmän avulla. Option teoreettisen hinnan approksimaatio lasketaan simuloidusta indeksirealisatioiden joukosta.

Empiirinen GARCH/ARI-prosessi estimoitiin tässä tutkimuksessa Suomen Optiomeklarit Oy:n laskeman FOX-osakeindeksin päivän lopun pisteluvuista periodilta 2.5.1988 - 8.6.1989. Prosessi oli GARCH(1,1)-tyyppiä, mutta hyvin todennäköisesti pitkällä aikavälillä stationaarinen varianssin suhteen. Prosessin AR(1)-termin kerroin oli voimakkaasti positiivinen.

Simuloidut optiohinnat olivat keskimäärin korkeampia kuin Black-76-mallin antamat teoreettiset hinnat ja lähempänä todellisia option hintoja. Ero Black-76 -hintoihin syntyi pääosin siitä, että voimakkaasti, positiivisesti autokorreloituneen prosessin ennustevarianssi on selvästi suurempi kuin Black-76 -mallin oletettaman Ito-prosessin ennustevarianssi.

Tulosten mukaan autokorrelaation huomioiminen optioiden hinnoittelussa selittää näennäisen ylihinnittelun, joka havaitaan vertaamalla historiallisella volatilititeettiestimaatilla laskettuja Black-76 -hintoja toteutuneisiin hintoihin. Päivämuutoksista lasketut liukuvat hajonnat ovat siis alaspäin harhaisia tulevan volatilititeetin mittareita. Osinkokorjaamattomalla Black & Scholes -mallilla lasketut teoreettiset hinnat vahvistavat käsitystä siitä, että markkinat käyttävät indeksifutuurin hintaa option hinnan perustana indeksin asemasta. Markkinat eivät kuitenkaan käytä lievästi autokorreloituneen futuuriprosessin historiallista volatilititeettiä optioiden hinnoittelussa, joka myös on alaspäin harhainen estimaatti todennäköiselle volatilititeetille. Implisiittisen ja historiallisen volatilititeetin sekä teoreettisten ja havaittujen optiohintojen vertailu osoittaa, että markkinat kykenevät huomioimaan autokorrelaation vaikutuksen volatilititeetin ennustamiseen keskimäärin oikein.

Myös FOX-indeksin muutosten varianssin pitkän aikavälin stationaarisuus osoittautui oleelliseksi tekijäksi ennustettaessa tulevaa volatilititeettiä. Teoreettisten ja havaittujen optiohintojen välisten suhteellisten poikkeamien tarkastelu osoitti, että markkinat kykenevät huomioimaan myös varianssin pitkän aikavälin stationaarisuuden optioiden hinnoittelussa.

Optiomarkkinoiden empiirisessä tarkastelussa on se ongelma, että teoreettiset hinnoittelumallit ovat huomattavasti kehittyneempiä, kuin niiden tilastolliseen testaamiseen vaadittavat menetelmät (Galai (1982)). Analyysiä vaikeuttaa se, että joudutaan testaamaan yhtä aikaa useita hypoteeseja. Lisäksi monet teorian edellyttämät riippuvuudet ovat epälineaarisia. Näiden vaikeuksien edessä on todettava, että FOX-indeksin prosessin GARCH-ominaisuuksien aiheuttaman huipukkuuden empiiriseen merkitykseen FOX-optioiden hinnoittelussa ei voida ottaa kantaa.

Black-76 -malli puolustaa paikkaansa käytännön optiomarkkinoilla helppokäyttöisyytensä ansiosta. Kuten Jarrow ja Wiggings ovat todenneet, mallin osuvuutta voidaan parantaa tekemällä korjauksia valittavaan volatilititeettiestimaattiin. Käytännössä edellisen päivän implisiittinen volatilititeetti tarjoaa usein parhaan välineen tulevan todennäköisyysjakauman approksimointiin (Jarrow & Wiggings (1989)). Koska autokorrelaation vaikutus option hintaan tulee suurelta osin kasvaneen volatilititeetin kautta, implisiittisellä volatilititeetillä varustettu Black-76 -kaava toimii todennäköisesti varsin hyvin myös autokorreloituneilla markkinoilla.

LIITE 1

Iton Lemma

Muuttujan S suhteellinen muutos ajan suhteen noudattaa Ito-prosessia, eli $dS/S = \mu dt + \sigma dz$. Olkoon funktio $G(S)$ jatkuvasti differentioituva. Tällöin jos $x = G(S)$, niin

$$dx = G' dS + 1/2 G'' (dS)^2. \quad \text{L1.1}$$

Ratkaistaan Ito-prosessista dS ja sijoitetaan se yhtälöön L1.1, jolloin saadaan $dx = G' [\mu dt S + \sigma dz S] + 1/2 G'' [\mu dt S + \sigma dz S]^2$. Sievennettäessä edellistä tulosta voidaan dt :n ykköstä suuremmat potenssit tulkita nolliksi. Koska $(dz)^2 = dt$, saadaan

$$dx = [G' \mu S + 1/2 G'' \sigma^2 S^2] dt + G' S \sigma dz. \quad \text{L1.2}$$

Edellä esitetyt tulokset on todistettu teoksessa Malliaris & Brock (1985).

LIITE 2

Varianssin autokorrelaatiokorjaus numeerisen kertoimen avulla

Olkoon $y(t+1) = I(t+1) - I(t)$ ja $y(t+1) = \phi y(t) + e(t+1); e(t+1) \sim N(0, \sigma^2)$. Tällöin

$$\text{Var}[I(s)] = \text{Var}[y(t+s)] = \sigma^2 \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=0}^{s-i} \phi^j \right)^2 \quad (\text{katso kappale 3.5}).$$

Olkoon $z(t+1) = J(t+1) - J(t)$ ja $z(t+1) = e(t+1); e(t+1) \sim N(0, \sigma^2)$. Tällöin

$$\text{Var}[J(s)] = \text{Var}[z(t+s)] = s\sigma^2$$

$$\text{Nyt } \text{Var}[I(s)] = \text{Var}[y(t+s)] = \{ \text{Var}[I(s)] / s\sigma^2 \} * s\sigma^2 = \left\{ \left[\sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=0}^{s-i} \phi^j \right)^2 \right] / s \right\} * s\sigma^2.$$

Seuraavassa taulukossa on kertoimien $\left\{ \left[\sum_{i=1}^s \left(\sum_{j=0}^{s-i} \phi^j \right)^2 \right] / s \right\}$ arvoja laskettuna eri ϕ :n ja s :n arvoilla.

TAULUKKO L2.1

ϕ									
0.5000	1	1.27	1.45	1.57	1.65	1.75	1.89	1.96	1.99
0.4000	1	1.22	1.34	1.42	1.47	1.52	1.60	1.64	1.66
0.3833 ¹	1	1.21	1.32	1.39	1.44	1.49	1.56	1.60	1.62
0.3000	1	1.16	1.24	1.29	1.32	1.35	1.39	1.41	1.42
0.2000	1	1.10	1.15	1.17	1.19	1.21	1.23	1.24	1.25
0.1000	1	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11
s	1	2	3	4	5	7	15	40	120

¹Kertoimen ϕ arvo "0.3833" on FOX-indeksin päivittäisistä muutoksista estimoidun GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)-prosessin AR(1)-termin kerroin.

LIITE 3

FOX-indeksin päivittäisten muutosten estimointi suurimman uskottavuuden menetelmällä olettaen, että a) prosessi on valkoista kohinaa b) prosessi on ensimmäisen asteen autoregressiivinen prosessi

$$\text{a) } y(t) = 0.0860 + e(t); e(t) \sim N(0, \sigma^2),$$

(2.45)

$$\text{jossa } \sigma^2 = 0.3258$$

$$\text{Loglikelihood-funktion arvo} = -247.6577$$

$$\text{b) } y(t) = 0.0560 + 0.3424y(t-1) + e(t); e(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

(1.64) (7.87)

$$\text{jossa } \sigma^2 = 0.3023$$

$$\text{Loglikelihood-funktion arvo} = -229.8883$$

Suoritetaan likelihood-ratio -testi nollahypoteesille:

H(0): FOX-indeksin päivittäisten muutosten prosessi on valkoista
(malli a)

H(1): FOX-indeksin päivittäisten muutosten prosessi sisältää ensimmäisen asteen autoregressiivisen termin (malli b).

Testisuure $2[\text{LogL}(b) - \text{LogL}(a)]$ on khi-toiseen -jakautunut vapausastein yksi, koska malli b sisältää yhden lisäparametrin malliin a verrattuna. Testisuureen arvo on 35.52, jonka marginaalinen merkitsevyystaso kahden desimaalin tarkkuudella on 0.00 %. Siten nollahypoteesi hylätään jo 0.01 prosentin merkitsevyystasolla.

Edellisiä hypoteeseja testataan myös t-testillä, joka johtaa nollahypoteesin hylkäämiseen viiden prosentin merkitsevyystasolla (mallissa b suluissa esitetty t-testin arvo on 7.87).

LIITE 4

FOX-indeksin päivittäisten muutosten estimointi olettaen, että
a) prosessi on GARCH(1,1), b) prosessi on GARCH(1,1)/ARI(1,1,0)

$$a) \quad y(t) = 0.1267 + e(t); e(t):I(t-1) \sim N[0, h(t)]$$

(4.27)

$$h(t) = 0.0167 + 0.7652h(t-1) + 0.1912e^2(t-1)$$

(1.69) (11.90) (3.39)

Loglikelihood-funktion arvo = -227.5272

Ljung-Box(12) -testisuureen arvo (normalisoitujen jäännös-
termien autokorrelaatio) = 48.5335

b) Mallin estimointi on esitetty kappaleessa 5.3 sivulla 55.

Suoritetaan likelihood-ratio -testi seuraavalle nollahypoteesille:

H(0): FOX-indeksin muutosten odotusarvo ei ole autoregressiivinen
(malli a)),

H(1): FOX-indeksin muutosten odotusarvo on autoregressiivinen
(malli b)).

Likelihood-ratio -testisuureen (katso liite 3) arvo on 40.74, jonka marginaalinen merkitsevyytaso on 0.00 %. Nollahypoteesi voidaan hylätä jo 0.01 prosentin merkitsevyytasolla. Nollahypoteesi hylätään myös mallin a lopussa esitetyn Ljung-Box -testin perusteella sekä mallissa a suluissa esitetyn t-testin perusteella. Kahdessa viimeksi mainitussa testissä hylkäämisperusteena on käytetty kii-toiseen jakauman kriittistä arvoa viiden (5) prosentin merkitsevyyt-
tasolla.

LIITE 5

FOX-indeksin päivittäisistä muutoksista ajalta 2.5.88 - 8.6.89
estimoitu GARCH(1,1)-in-mean/ARI(1,1,0) -malli

$$y(t) = 0.1122 - 0.1510h(t) + 0.3825y(t-1) + e(t); e(t):I(t-1)$$

(1.96) (-0.69) (6.54) ~ N[0,h(t)]

$$h(t) = 0.0131 + 0.1691e^2(t-1) + 0.7938h(t-1)$$

(1.39) (12.60) (3.02)

Loglikelihood-funktio arvo = -206.9840

Diagnostiikka (Krämer & Sonnberger (1986)):

- LR(4)-testisuureen arvo (H0: odotusarvo ja varianssi ovat vakioita) = 81.0289 (P = 0.00 %)
- LM(1)-testisuureen arvo (H0: termi e(t-2) ei lisää mallin selityskykyä) = 0.8054 (P = 36.95 %)
- Normalisoidujen jäännöstermien vinouskerroin = -0.1586
- Normalisoidujen jäännöstermien huipukkuuskerroin = 3.2559
- Ljung-Box(12) -testisuureen arvo (normalisoidujen jäännöstermien autokorrelaatio) = 7.6255 (P = 81.37 %)
- Ljung-Box(12) -testisuureen arvo (normalisoidujen jäännöstermien neliöiden autokorrelaatio) = 24.6083 (P = 1.68%)

Suoritetaan LR-testi seuraavalle nollahypoteesille:

H(0): GARCH-in-mean -termi ei selitä FOX-indeksin päivittäisiä muutoksia.

H(1): GARCH-in-mean -termi kykenee selittämään FOX-indeksin päivittäisiä muutoksia.

LR-testisuureen arvo on 0.3254, jonka marginaalinen merkitsevyytaso on 56.84 %. Nollahypoteesi jää selkeästi voimaan kaikilla perinteisillä merkitsevyytasoilla.

LIITE 6

Implisiittisen volatilitiitin laskeminen iterointimenetelmällä käyttäen Black-76 -mallia

Implisiittisen volatilitiitin laskeminen iteroimalla perustuu menetelmään, jossa funktion arvoa tietyssä pisteessä approksimoidaan kaavalla

$$F[x] = F[x(0)] + F'[x(0)][x - x(0)], \quad L6.1$$

jossa $x(0)$ on mielivaltainen lähtöpiste ja F' on funktion ensimmäinen derivaatta. Implisiittisen volatilitiitin iterointia varten ratkaistaan kaava muotoon

$$x = x(0) + \{F[x] - F(x(0))\}/F'[x(0)]. \quad L6.2$$

Toisin sanoen, approksimoidaan pistettä x , kun tunnetaan $F[x]$.

Merkitään seuraavasti:

- $F[x]$ = havaittu option hinta (jonka oletetaan noudattavan Black-76 -mallia)
- x = implisiittinen volatilitietti, eli volatilitiitin, σ , arvo, jolla Black-76 -mallin antama option teoreettinen hinta vastaa havaittua option hintaa, (muut Black-76 -hinnan laskemiseen tarvittavat parametrit ovat tunnettuja)
- $x(0)$ = mielivaltainen volatilitiitin arvo
- $F[x(0)]$ = volatilitietillä $x(0)$ laskettu Black-76 -hintaa
- F' = Black-76 -mallin ensimmäinen derivaatta volatilitiitin suhteen ($\partial C/\partial \sigma = S/TN'(d_1)$), jossa N on normaalijakauman kertymäfunktio)
- $F'[x(0)]$ = F' :n arvo pisteessä $x(0)$

Iterointi aloitetaan sijoittamalla kaavaan L .2 sopiva $x(0)$:n alkuarvo. Tulokseksi saatua x :n arvoa käytetään seuraavana $x(0)$:n arvo-

na. Iteroinnin kehittymistä seurataan laskemalla $F[x]:n$ ja $F[x(0)]:n$ suhteellinen poikkeama. Kun tämä poikkeama osuu asetettujen rajojen sisäpuolelle (esimerkiksi $|\{F[x] - F[x(0)]\}/F[x]| < 0.001$) lopetetaan iterointi, ja viimeisin $x(0)$ hyväksytään $x:n$, eli implisiittisen volatilitietin approksimaatioksi. Tässä työssä implisiittisen volatilitietin laskemiseen on käytetty Suomen Pankin RAL-ohjelmaa.

LIITE 7

Monte Carlo -simulointi RAL-ohjelmalla

```

00000100GET FOXINXS,STRFOX1C,AIKAFOX1C,KORKO1H,GARCH.E,GARCH.H,
          FOXLOGS,IMPDIV1
00000200X=VECTOR(FOXINXS)
00000300K=VECTOR(STRFOX1C)
00000400FOX=LN(X)
00000500T=VECTOR(AIKAFOX1C)
00000600R=VECTOR(KORKO1H)
00000700EG=VECTOR(GARCH.E)
00000800HG=VECTOR(GARCH.H)
0000090001=RESTRUCTURE(*,282)
00001000SIMVOL=RESTRUCTURE(*,282)
00001100SIMVAR=RESTRUCTURE(*,282)
00001200F=VECTOR(FOXLOGS)
00001300D=VECTOR(IMPDIV1)
00001400FOR I=1 TO 282 DO BEGIN
00001500M=0
00001600N=0
00001700L=0
00001800P=0
00001900LO=0
00002000PO=0
00002100N=N+1
00002200E=EG(I)
00002300H=HG(I)
00002400Y=F(I)
00002500FX=FOX(I)
00002600FOR J=1 TO T(I) DO BEGIN
00002700H=.0139+(.1656*(E**2))+(.7877*H)
00002800E=(H**5)*RANDNORM(1)
00002900Y=(100*((1+R(I))/(1+D(I)))**(1/365))-100*(1-.3833)+.3833*Y+E
00003000FX=FX+(Y/100)
00003100END
00003200C=EXP(FX)-K(I)

```

```

00003300IF C GTR 0 THEN C=C ELSE C=0
00003400M=M+C
00003500L=L+EXP(FX)
00003600P=P+(EXP(FX))**2
00003700LO=LO+FX
00003800PO=PO+FX**2
00003900IF N LSS 1000 THEN GO TO 2100 ELSE GO TO 4300
0000400001(I)=(M/N)/((1+R(I))**(T(I)/365))
00004100EFX=L/N
00004200ESQFX=P/N
00004300SIMVAR(I)=ESQFX-EFX**2
00004400ELFX=LO/N
00004500ELSQFX=PO/N
00004600SIMVOL(I)=ELSQFX-ELFX**2
00004700END

```

Tunnukset FOXINXS, STRFOX1C, AIKAFOX1C, KORKO1H, GARCH.E, GARCH.H, FOXLOGS ja IMPDIV1 merkitsevät seuraavien muuttujien aikasarjoja (kussakin sarjassa on 282 havaintoa):

FOX-indeksi, osto-option toteuttamishinta, option jäljellä oleva voimassaoloaika päivinä, 1 kuukauden Helibor-korko, estimoidun GARCH(1,1)/ARI(1,1,0) -mallin termin $e(t)$:n aikasarja sekä $h(t)$:n aikasarja, FOX-indeksin edellisestä päivästä tarkastelupäivään las-kettu logdifferenssi, FOX-futuurin implikoima odotettu osinko-tuotto.¹ Rivillä 2800 esiintyvä RANDNORM(1) on RAL-ohjelman satun-naislukugeneraattori, joka tuottaa standardoitua normaalijakaumaa noudattavia satunnaislukuja.

¹Futuurin hinnan implikoima osinko-odotus lasketaan futuurin ja in-deksin välisen arbitraasiehdon perusteella. Toisin sanoen, $F = S + S(r-d)T$, josta $d = 1/T + r - F/ST$. On huomattava, että ratkais-tuun d :hen sisältyy mahdollinen poikkeama futuurin ja indeksin välisestä arbitraasiehdosta. Siten d :n käyttö simuloinnissa vastaa efektiivisesti futuurin hinnan käyttöä indeksin asemesta (vertaa Black-76 - ja Black & Scholes -malli).

LÄHTEET

BECKERS, S. (1981): Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability, Journal of Banking and Finance, 5, 363 - 381.

BERGLUND, T. & LILJEBLOM, E. (1988): Market Serial Correlation on a Thin Security Market: A Note, Journal of Finance, Vol. 43, No. 4.

BERGLUND, T. & LILJEBLOM, E. & HEDVALL, K. (1988): Market Serial Correlation and Valuation of Index Options, Swedish School of Economics and Business Administration Working Papers, 185.

BERGLUND, T. & LILJEBLOM, E. & HEDVALL, K. (1990): julkaisematon työpaperi, Elinkeinoelämän tutkimuslaitoksen keskustelualoitteita.

BLACK, F. (1975): Forecasting Variance of Stock Prices for Option Trading and Other Purposes, Seminar on the Analysis of Security Prices, University of Chicago, November.

BLACK, F. (1976): The Pricing of Commodity Contracts, Journal of Financial Economics, Vol. 3, January/February, 167 - 179.

BLACK, F. & SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, May/June, 637 - 654.

BOYLE, P. (1977): Options: A Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, No. 4, 323 - 338.

COPELAND, T. & WESTON, F. (1988): Financial Theory and Corporate Policy, Addison-Wesley, 3. painos.

COX, J. & ROSS, S. (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, No. 3, 145 - 166.

COX, J. & RUBINSTEIN, M. (1985): Options Markets, Englewood-Cliffs.

DAY, T. & LEWIS, C. (1988): The Behaviour of The Volatility Implicit in the Prices of Stock Index Options, Journal of Financial Economics, 22, 103 - 122.

EKLUND, J. (1989): Vuosikatsaus 1988: Johdannaismarkkinat, Kansallis-Osake-Pankki.

ENGLE, R. (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, 50, 987 - 1007.

ENGLE, R. & BOLLERSLEV, T. (1986): Modelling the Persistence of Conditional Variances, Econometric Reviews, 5, 1 - 50.

ENGLE, R. & MUSTAFA, C. (1989): Implied ARCH Models from Options Prices, julkaisematon käsikirjoitus.

- FISHER, L. (1966): Some New Stock Market Indexes, Journal of Business, Vol. 38, January, 191 - 225.
- FRENCH, K. & SCHWERT, W. & STAMBAUGH, R. (1987): Expected Stock Returns and Stock Market Volatility, Journal of Financial Economics, 19, 3 - 30.
- GALAI, D. (1983): A Survey of Tests of Option-Pricing Models, kirjassa Option Pricing: Theory and Applications, Lexington Books.
- HARVEY, A.C. (1981): Econometric Analysis of Time Series Models, Oxford.
- HULL, J. & WHITE, A. (1987): The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, Journal of Finance, 42, 271 - 301.
- INGERSOLL, J. (1987): Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield.
- JARROW, R. & RUDD, A. (1982a): Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes, Journal of Financial Economics, 10, 347 - 369.
- JARROW, R. & RUDD, A. (1982b): Tests of an Approximate Option Valuation Formula, kirjassa Option Pricing: Theory and Applications, Lexington Books.
- JARROW, R. & WIGGINS, J. (1989): Option Pricing and Implicit Volatilities, Journal of Economic Surveys, Vol. 3, No. 1.
- KENDALL, M. & STUART, A. (1977): The Advanced Theory of Statistics, Vol 1: Distribution Theory, MacMillan, 4. painos, s. 73.
- KRÄMER, W. & SONNBERGER, H. (1986): The Linear Regression Model Under Test, Physica-Verlag.
- LATANE, H. & RENDELMAN R., Jr. (1976): Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices, Journal of Finance, Vol. 31, No. 2, 369 - 381.
- LO, A. & MacKINLEY, C. (1989): When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?, NBER Working Paper, No. 2977.
- MALLIARIS & BROCK (1985): Stochastic Methods in Economics and Finance, North-Holland, 3. painos.
- McKEAN, H.P.Jr. (1967): A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, Industrial Management Review, No. 6, 32 - 39.
- McNEES, S. (1979): The Forecasting Record for 1970's, New England Economic Review, September/October, 33 - 53.
- PINDYCK, R. & RUBINFELD, D. (1981): Econometric Models and Economic Forecasts, McGraw-Hill, 2. painos.

POTERBA, J. & SUMMERS, L. (1988): Mean Reversion in Stock Prices, Journal of Financial Economics, 22, 27 - 59.

SCHMALENSEE, R. & TRIPPI, R. (1978): Common Stock Price Volatility Expectations Implied by Option Premia, Journal of Finance, 33, 129 - 147.

SHARPE, W. (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance, September, 425 - 442.

SUOMEN OPTIOMEKLARIT OY (1989): Säännöt ja Tuotemääritykset.

WATSON, M. & ENGLE, R. (1984): Testing for Regression Coefficient Stability with a Stationary AR(1) Alternative, The Review of Economics and Statistics, September, 341 - 346.

WIGGINS, J. (1987): Option Values under Stochastic Volatility, Journal of Financial Economics, 19, 351 - 372.

SUOMEN PANKIN KESKUSTELUALOITTEITA

ISSN 0785-3572

- 1/90 JUHA TARKKA - ALPO WILLMAN Financial markets in the BOF4 model of the Finnish economy. 1990. 57 s. (ISBN 951-686-234-9)
- 2/90 JUHA TARKKA - HANNA-LEENA MÄNNISTÖ - ALPO WILLMAN Macroeconomic foundations and simulation properties of the BOF4 quarterly model of the Finnish economy. 1990. 57 s. (ISBN 951-686-235-7)
- 3/90 PETER BIRCH SÖRENSEN Tax harmonization in the European Community: problems and prospects. 1990. 70 s. (ISBN 951-686-238-1)
- 4/90 PETER BIRCH SÖRENSEN Issues in the theory of international tax coordination. 1990. 83 s. (ISBN 951-686-239-X)
- 5/90 ESKO AURIKKO Floating exchange rates and capital mobility. 1990. 25 s. (ISBN 951-686-242-X)
- 6/90 PERTTI HAAPARANTA - TARJA HEINONEN Re-opening of banks' certificates of deposit market. 1990. 16 s. (ISBN 951-686-244-6)
- 7/90 JUHA TARKKA - ALPO WILLMAN Income distribution and government finances in the BOF4 model of the Finnish economy. 1990. 46 s. (ISBN 951-686-246-2)
- 8/80 CAMILLA GUSTAVSSON Taxation of personal interest income in 18 OECD countries. 1990. 54 s. (ISBN 951-686-247-0)
- 9/90 PERTTI HAAPARANTA Whether to join EMS or not: signalling and the membership. 1990. 17 s. (ISBN 951-686-249-7)
- 10/90 TOM KOKKOLA Kontantpenningefterfrågan, betalningsmedel och teknisk utveckling. 1990. 96 s. (ISBN 951-686-250-0)
- 11/90 ERKKI KOSKELA - MATTI VIRÉN Monetary policy reaction functions and saving-investment correlations: some cross-country evidence. 1990. 24 s. (ISBN 951-686-251-9)
- 12/90 ERKKI KOSKELA - MATTI VIRÉN Government size and economic growth: some evidence from a market price approach. 1990. 21 s. (ISBN 951-686-252-7)
- 13/90 ESA JOKIVUOLLE Suomalaisten Fox-indeksiöptioiden hinnoittelu Monte Carlo -simulointia käyttäen. 1990. 107 s. (ISBN 951-686-253-5)