Antti Ilmanen
Suomen Pankin markkinaoperaatioiden osasto
24.5.1989 18/89

DURAATIOANALYYSIN KÄYTTÖ JOUKKOVELKAKIRJAN KORKORISKIN ARVIOINNISSA JA HALLINNASSA

Suomen Pankin monistuskeskus
Helsinki 1989
ISBN 951-686-204-7
ISSN 0785-3572

TIIVISTELMÄ

Tutkimuksessa pyritään arvioimaan vaihtoehtoisia tapoja mitata joukkovelkakirjan korkoriskiä. Erityisesti käsitellään duraatioanalyysin käyttöä korkoriskin hallinnassa; yhtäältä verrataan erilaisia duraatiokäsitteitä toisiinsa ja muihin korkoriskin mittareihin, toisaalta kuvataan duraatioanalyysin erilaisia sovellutuksia korkoriskin hallintastrategioissa. Taustaksi esitellään velkakirja-analyysin perusteita ja korkorakenteen määräytymistä ja dynamiikkaa koskevia teorioita. Lisäksi kuvataan duraatioanalyysin suhdetta portfolioteoriaan, duraatioanalyysin kritiikkiä ja kehittämisyrityksiä sekä empiiristen tutkimusten tuloksia.

Duraatioanalyysi soveltuu parhaiten luottoriskittömien kiinteäkorkoisten velkakirjojen korkoriskin tarkasteluun. Macaulay-duraatio on velkakirjan maksusuoritusten nykyarvopainotettu keskimääräinen juoksuaika. Macaulay-duraation modifioitu versio mittaa velkakirjan arvon korkoherkkyyttä. Tietyn suunnittelujakson nimellistuotto voidaan tietyin oletuksin varmistaa asettamalla sijoitusten duraatio suunnittelujakson pituiseksi. Rahoituslaitos voi vastaavasti suojata kokonaissalkkunsa paralleeleja korkotason muutoksia vastaan asettamalla sijoitustensa duraation velkasalkkunsa duraation pituiseksi.

SISÄLLYS

1 JOHDANTO 7

1.1 Sijoittaminen ja korkoriski 7

1.2 Tutkimusongelma, menetelmät ja rajaukset 9

2 KORKORAKENNE JA KORONMÄÄRÄYTYMISTEORIAT 12

2.1 Korkokäsitteet ja korkorakenne 12

2.2 Korkorakenteen määräytymisteoriat 17

2.2.1 Perinteiset korkorakenneteoriat 17

2.2.2 Korkorakennetta ohjaava stokastinen prosessi 22

2.2.3 Korkorakenteen tasapainomallit 27

3 MACAULAY-DURAATIO 30

3.1 Macaulay-duraatio: käsite ja laskutapa 30

3.2 Juoksuajan vaikutus duraatioon 34

3.3 Korkotason vaikutus duraatioon 37

3.4 Kuponkitason vaikutus duraatioon 39

4 DURAATION KÄYTTÖ KORKORISKIN HALLINNASSA 41

4.1 Modifioitu duraatio korkoherkkyyden mittarina 41

4.2 Macaulay-duraatio ja immunisaatiostrategia 44

4.3 Optimaalinen duraatiovalinta 54

4.4 Vaihtuvakorkoisen velkakirjan duraatio 58

4.5 Johdannaisinstrumenttien duraatiot 61

5 DURAATIOANALYYSIN SUHDE PORTFOLIOTEORIAAN 63

5.1 Portfolioteorian perusteita 63

5.2 Keskiarvovarianssianalyysin soveltumattomuus velkakirjojen tarkasteluun 66

5.3 Portfolioteorian käyttö velkakirja-analyysissa 68

6 DURAATION KRITIIKKI JA KEHITTÄMINEN 74
6.1 Yleistä duraation kritiikistä 74
6.2 Sisäisen koron käyttö diskonttokorkona 76
6.3 Pääomamarkkinoiden tasapainoehdon rikkominen 77
6.4 Korkorakenteen stokastinen prosessi ja duraatio 79
6.4.1 A priori -oletukset korkorakenteen stokastisesta prosessista 79
6.4.2 Herkkyyksien estimointi historiallisesta aineistosta 83
6.4.3 Pääomamarkkinoiden tasapainoehtoon perustuva lähestymistapa 85
6.5 Korkorakenteen muutoksen vaikutus velkakirjan arvoon - duraatioapproksimaation tarkentaminen 88
6.5.1 Velkakirjan konveksisuus 88
6.5.2 Duraatiovektori ja stokastisen prosessin riski 90
6.6 Suunnittelujakson pidentämisen vaikutus 92
6.7 Korkoriskin suhde muihin riskilähteisiin 93

7 EMPIIRISTEN TUTKIMUSTEN TULOKSIA 98
7.1 Immunisaatiosimulaatiot 98
7.2 Regressio- ja faktorianalyysiin perustuvat tutkimukset 100
7.3 Yhteenveto 104

8 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ 106

LÄHTEET 109

LIITE 116

1 JOHDANTO

1.1 SIJOITTAMINEN JA KORKORISKI

Sijoittaminen voidaan määritellä luopumiseksi varmasta nykyarvosta mahdollisesti epävarman tulevan arvon hyväksi.[1] Sijoittamiseen liittyy aina aikaelementti ja usein myös riskielementti. Erilaiset sijoitukset vaihtelevat kuitenkin kestoltaan ja riskillisyytensä asteelta. Käytännössä riskin lähteitä on lisäksi useita.

Portfolioteoriassa osakkeet esitetään usein riskillisinä ja joukkovelkakirjat riskittöminä sijoitusvaihtoehtoina. Tämä kahtiajako on yksinkertaistus. Vaikka velkakirjan tuotto on yleensä vähemmän epävarma kuin osakkeen tuotto, se on täysin riskitön vain erikoistapauksessa, jossa nollakuponkilaina erääntyy juuri suunnittelujakson lopussa. Muussa tapauksessa velkakirjaan liittyy korkoriski. Useimpiin velkakirjoihin liittyy myös luottoriskiä.

Luottoriskittömät velkakirjat ovat perinteisesti olleet hyvin turvallisia sijoituskohteita, mutta 1970 - 1980 -luvulla kasvanut korkovolatiilisuus on muuttanut tilannetta. Kehittyneiden pääomamarkkinoiden maissa pitkien valtionvelkakirjojen hintavaihtelut ovat olleet ajoittain yhtä rajuja kuin osakkeiden hintavaihtelut. Tämä kehitys on korostanut korkoriskin mittaamisen tarvetta.

Riskin ja epävarmuuden käsitteet voidaan erottaa sen mukaan, voiko tulevaisuutta kuvata tietyn todennäköisyysjakauman avulla vai ei. Rahoitusalan kirjallisuudessa ja tässä tutkielmassa käsitteitä käytetään kuitenkin usein rinnakkain, jolloin epävarmuuden käsite kattaa myös tapaukset, joissa todennäköisyysjakauma tunnetaan. Riski

---

[1] Sharpe (1985) s.2.

kuvaa keskiarvovarianssimallissa[2] toteutuvan tuoton arvioitua poikkeamaa odotetusta tuotosta. Riskiä tuoton epävarmuutena mittaa tällöin tuoton varianssi $\sigma^2(R)$.

Korkoriskin voi vastaavasti määritellä sijoituksen nimellistuoton epävarmuudeksi, joka johtuu korkorakenteen tulevista muutoksista. Vaikka diskonttokorkojen muutokset vaikuttavat lähes kaikkien sijoituskohteiden arvoon, vaikutus korkoinstrumenttien arvoihin on suhteellisesti suurin. Korkoriskiä voi puhtaimmin mitata tarkastelemalla sijoituskohteita, joiden markkina-arvon epävarmuus riippuu ainoastaan tulevista diskonttokoroista. Tämä edellyttää luottoriskittömyyttä[3] sekä tunnettuja maksusuorituksia.

Korkoriskianalyysin tärkein kohde on kiinteäkorkoinen joukkovelkakirja, jonka markkina-arvoon liittyvä ainoa epävarmuus johtuu siis korkorakenteen muutoksista. Kiinteäkorkoinen joukkovelkakirja on arvopaperi, joka lupaa kiinteitä maksusuorituksia tulevaisuudessa. Velkakirjan juoksuaika, kuponkikorko, maksuhetket sekä muut lainaehdot määrätään jo liikkeellelaskuvaiheessa, joten niihin ei liity epävarmuutta. Diskonttofunktio muuntaa tulevaisuudessa maksettavan maksusuoritusvirran nykyarvoiseksi. Maksusuorituksen nykyarvo riippuu käänteisesti diskonttokorosta. Jos diskonttofunktio valitaan oikein, maksusuoritusvirran nykyarvo on yhtä suuri kuin markkina-arvo.[4]

Markkinakorkotason muutos vaikuttaa välittömästi velkakirjan arvoon, koska tulevien maksusuoritusten nykyarvot muuttuvat diskonttokorkojen mukana. Korkotason muutos vaikuttaa toisellakin tavalla velkakirjan nimellistuot-

---

2 Keskiarvovarianssimallia kuvataan lyhyesti luvussa 5.1. Luvussa 5.2 selitetään, miksi portfolioteoriassa kehitettyä systemaattisen riskin käsitettä ei yleensä sovelleta velkakirja-analyysiin.

3 Valtion omassa valuutassaan liikkeelle laskemia velkakirjoja pidetään usein rahoitusalan kirjallisuudessa luottoriskittöminä, koska valtiolla on mahdollisuus verottaa kansalaisiaan ja painaa rahaa.

4 Bierwag (1987a) s.5.

toon tietyllä (pidemmällä) suunnittelujaksolla: jakson aikana maksettavien rahaerien odotettu jälleensijoituskorko muuttuu. Duraatioanalyysin avulla voi arvioida markkinakorkojen muutoksen välitöntä vaikutusta velkakirjan arvoon sekä hinta- ja jälleensijoitusmuutosten yhteisvaikutusta suunnittelujakson nimellistuottoon.

Korkoriski jakautuu (1) jälleensijoitusriskiin - jos velkakirjalla on maksusuorituksia ennen suunnittelujakson loppumista - ja (2) hintariskiin - jos velkakirjalla on maksusuorituksia suunnittelujakson jälkeen, ne voidaan joutua myymään markkinahintaan jakson lopussa. Vaikutukset ovat vastakkaisia, minkä vuoksi korkoriskiltä voi suojautua, vaikka sijoitusjakso olisi pitkä. Luvussa 4.2 osoitetaan, että portfolion duraation asettaminen suunnittelujakson pituiseksi poistaa tuottoepävarmuuden eli immunisoi portfolion korkotason muutoksilta, koska jälleensijoitusvaikutus kompensoi tällöin tarkalleen korkoliikkeestä aiheutuneen hintavaikutuksen.

Korkoriski voidaan määritellä vain suhteessa suunnittelujaksoon, koska tuoton varmuus (riskittömyys) täytyy sitoa johonkin jaksoon.

Jos tarkastellaan korkotason muutosten välitöntä vaikutusta portfolion arvoon (suunnittelujakson pituus on äärettömän lyhyt), mitään jälleensijoituksia ei ehdi tapahtua. Mittauksen kohteena on vain velkakirjan välitön arvonmuutos korkorakenteen muuttuessa stokastisesti. Tätä korkoriskin erikoistapausta, jossa on vain hintariskiä, kutsutaan arvon korkoherkkyydeksi ja sitä mittaa modifioitu duraatio.

On syytä korostaa, että sekä rahoitusalan kirjallisuudessa yleensä että tässä tutkimuksessa erityisesti korkoriskin käsite liittyy nimellis- eikä reaalituoton epävarmuuteen.[5]

---

[5] Inflaatio- ja korkoriskin suhteesta ks. lukua 6.7.

1.2 TUTKIMUSONGELMA, MENETELMÄT JA RAJAUKSET

Tutkimuksessa pyritään arvioimaan, mikä on paras tapa mitata joukkovelkakirjan korkoriskiä. Tämän tutkimusongelman lisäksi käsitellään velkakirja-analyysin ja korkorakenneanalyysin perusteita taustaksi (luku 2), esitellään Macaulay-duraation käsite ja siihen vaikuttavat tekijät (luku 3) sekä esitetään, miten duraatiota voi käyttää korkoriskin hallinnassa (luku 4), miten duraatioanalyysi ja portfolioteoria liittyvät toisiinsa (luku 5) ja miten duraation käsitettä on kritisoitu ja kehitetty viimeisen vuosikymmenen aikana (luku 6).

Sekä duraatioanalyysin kritiikkiä että sen suhdetta portfolioteoriaan on käsitelty varsin hajanaisesti alan kirjallisuudessa. Näihin aiheisiin liittyvät kysymykset on tutkimuksessa pyritty kokoamaan ja esittelemään mahdollisimman selkeästi luokiteltuna. Tutkimus on katsaustyyppinen eikä empiirinen, mutta luvussa 7 käsitellään Yhdysvaltain velkakirjamarkkinoilla tehtyjen empiiristen tutkimusten tuloksia. Suomen velkakirjamarkkinat ovat vielä niin kehittymättömät, että empiirisen tutkimuksen tekeminen täällä ei olisi mielekästä.

Perusoletukseni on, ettei tutkimusongelmaan parhaasta korkoriskin mittarista ole yksiselitteistä vastausta. Korkoriski määriteltiin edellä diskonttokorkojen muutoksista johtuvaksi tuottoepävarmuudeksi. Tämä määritelmä ei vielä kerro, mistä diskonttokoroista ja minkä jakson tuotosta on kysymys. Luvussa 4.2 osoitetaan, että velkakirjan korkoriski riippuu sen omien piirteiden lisäksi sijoittajan suunnittelujakson pituudesta ja korkorakenteen oletetusta stokastisesta prosessista. Stokastista prosessia koskevasta epävarmuudesta johtuu se, ettei tutkimusongelmaan löydy yksiselitteistä vastausta. Empiiristen tutkimusten mukaan yksinkertainen Macaulay-duraatio suojaa korkoriskiltä lähes yhtä hyvin kuin kehittyneemmät duraatioversiot. Väärän stokastisen prosessin olettamisesta johtuvaa riskiä voi kuitenkin pienentää ja korkoriskin mittausta voi tarkentaa.

Pääosa tutkimuksesta keskittyy luottoriskittömän kiinteäkorkoisen joukkovelkakirjan tarkasteluun, vaikka korkoriski kohdistuu muunkintyyppisiin sijoituskohteisiin. Rajauksen perustelu kävi ilmi jo edellä: koska luottoriskittömän kiinteäkorkoisen velkakirjan maksusuoritukset ovat tunnettuja, ainoa epävarmuus liittyy diskonttokorkojen odottamattomiin muutoksiin. Muiden sijoituskohteiden kohdalla ongelmana olisi korkoriskin erottaminen muista riskeistä.

En käsittele lainkaan verotuksen vaikutusta duraatioanalyysiin. Verotus vaikuttaa enemmän eri sijoituskohteiden suhteellisiin tuottoihin kuin riskeihin, mistä ilmeisesti johtuu tämän alueen duraatiotutkimuksessa saama vähäinen huomio.

Duraatioanalyysia on käsitelty Suomessa vasta varsin vähän. Mainittavia tutkimuksia ovat Aaltonen (1986), Ahlstedt - Halme (1987) ja Vanhanen (1988). Sen sijaan englanninkielistä lähdeaineistoa on ollut tarjolla runsaasti. Macaulayn (1938) ja Hicksin (1939) pioneeritöiden jälkeen duraatio jouduttiin "keksimään" yhä uudelleen, mutta vasta 1970-luvulla se kohosi yhdeksi rahoituksen keskeiseksi tutkimuskohteeksi ja selvästi suosituimmaksi korkoriskin mittariksi kehittyneillä velkakirjamarkkinoilla. Olen käyttänyt lähteinä sekä rahoitusalan akateemista kirjallisuutta että sijoituspankkien tutkimusosastojen julkaisuja.

Niukan suomenkielisen kirjallisuuden vuoksi käsitteistö ei ole kovin vakiintunut. Liitteessä on lista keskeisistä englanninkielisistä käsitteistä ja käyttämistäni käännöksistä. Mainittakoon, että englanninkielisen sanan "bond" oikea suomennos on "joukkovelkakirjalaina", mutta koska käsite toistuu tekstissä usein, käytän siitä käännöksiä "(joukko-)velkakirja" ja "laina" rinnakkain.

2 KORKORAKENNE JA KORONMÄÄRÄYTYMISTEORIAT

2.1 KORKOKÄSITTEET JA KORKORAKENNE

Joukkovelkakirjan korkoriskin määrittely ja mittaaminen edellyttävät luonnollisesti selkeää käsitystä siitä, minkä koron muutoksen vaikutusta velkakirjan arvoon tai tuottoon tarkastellaan. Luvussa 2.1 määritellään käsitteet diskonttokorko, sisäinen korko, nykykorko, termiinikorko ja kuponkikorko, juokseva korko ja markkinakorko. Tutkielmaani liittyy myös laajempi kysymys korkorakenteesta (joka on käsitteenä erotettava tuottokäyrästä). Korkoinstrumenttien hinnoittelu sekä niiden odotetun tuoton ja riskin arviointi edellyttävät jotain oletuksia korkorakenteen määräytymisestä. Luvussa 2.2 esitellään erilaisia korkorakenneteorioita sekä oletuksia korkojen muutosten dynamiikkasta.

Korkojen aikarakenne eli korkorakenne kuvaa luottoriskiltään ja muilta ominaisuuksiltaan samanlaisten velkakirjojen korkoja niiden jäljellä olevan juoksuajan funktiona. Korkorakenneteoriat pyrkivät selittämään, mistä tekijöistä korkorakenteen muodon vaihtelut johtuvat. Luottoriskistä ja muusta epävarmuudesta puhdistettu korkorakenne kuvaa näin ajan markkinahintaa eri jaksoilla[1]. Muu epävarmuus poistetaan maksusuorituksista tarkastelemalla vain luottoriskittömiä kiinteäkorkoisia velkakirjoja, joihin ei liity takaisinosto- tai takaisinmyyntioptioita.

Hetkellä t maksettava suoritus diskontataan nykyarvoiseksi diskonttofunktion d avulla.

$$(2\text{-}1) \quad d_t = \frac{1}{(1 + r_t)^t} \qquad \text{s.e. } t = 1,2,\ldots$$

jossa d_t = diskonttofunktion d arvo jaksolle (0, t)
r_t = jakson (0, t) diskonttokorko

Joukkovelkakirjalla on yleensä useita maksusuorituksia, esimerkiksi kuponginmaksut vuosittain ja nimellispääoman maksu eräpäivänä. Korkorakennemalleissa on tavallista

[1] Shiller - McCulloch (1987) s.3.

tarkastella nollakuponkilainoja, joilla on vain yksi maksusuoritus. Kuponkilainan voi katsoa koostuvan useista nollakuponkilainoista.

Kun tulevan hetken t maksusuoritus muutetaan nykyarvoiseksi, diskonttokorkona käytetään jakson (0, t) nykykorkoa r_t. Nykykorko r_t on hetkellä t erääntyvän nollakuponkilainan tuotto, jos se pidetään eräpäivään asti. Nykykorot kertovat siis, paljonko nyt lainatusta rahasta maksetaan korkoa eripituisille lainausjaksoille.

Jos markkinoilla olisi kaiken pituisia nollakuponkilainoja, korkorakenne olisi suoraan havaittavissa niiden markkina-arvoista. Kun markkina-arvot tunnetaan, nollakuponkilainojen nykykorot lasketaan yhtälöstä (2-2).[2] Hetkellä t erääntyvän nollakuponkilainan, jonka nimellispääoma on 100, nykyinen markkina-arvo on

$$(2\text{-}2) \quad P_t = \frac{100}{(1 + r_t)^t} \qquad \text{s.e. } t = 1,2,\ldots$$

jossa P_t = hetkellä t erääntyvän nollakuponkilainan markkina-arvo
r_t = jakson (0, t) nykykorko

Koska millään markkinoilla ei ole jokaisen juoksuajan nollakuponkilainoja, markkinoiden todellinen korkorakenne täytyy estimoida käytännössä yleisempien kuponkilainojen markkinahintojen avulla. Jos kuponkilainoja on jokaiselle sijoitusjaksolle, korkorakenne voidaan laskea seuraavasti. Ensimmäisen jakson lopussa erääntyvällä kuponkilainalla on vain yksi maksusuoritus, joten sen markkinahinnasta voi helposti laskea nykykoron r_1 edellä kuvatulla tavalla. Kun r_1 ja toisen jakson lopussa erääntyvän kuponkilainan markkinahinta P_2 tunnetaan, nykykorko r_2 ratkaistaan yhtälön (2-3) avulla:

---

[2] Korkokaavan täsmällinen muoto riippuu siitä, millä tiheydellä korkoa maksetaan korolle eli koronkorkojakson pituudesta. Käytäntö vaihtelee eri markkinoilla. Ellen toisin mainitse, käytän tutkielmassani diskreetin ajan esitystapaa ja vuoden pituista koronkorko-jaksoa. Shiller - McCulloch (1987, s.5 - 21) esittävät eri korkokäsitteet jatkuva-aikaisessa muodossa.

$$(2\text{-}3) \quad P_2 = \frac{C_t}{1 + r_1} + \frac{C_t + A}{(1 + r_2)^2}$$

jossa P_2 = hetkellä 2 erääntyvän kuponkilainan hinta
C_t = kuponki hetkellä t
A = nimellisarvo
r_t = jakson (0, t) nykykorko, t = 1,2

Näin jatkaen ratkaistaan r_3, r_4 ja koko korkorakenne. Koska kuponkilainojakaan ei ole olemassa kaikille sijoitusjaksoille, korkorakennetta on käytännössä estimoitu polynomiaalisten tai eksponentiaalisten splinien avulla.[3]

Korkorakenne perustuu siis markkinoilta saatavaan hintatietoon. Korkorakennetta voidaan toisaalta käyttää yksittäisten velkakirjojen teoreettisen arvon määrittelyssä. Nykykorkojen avulla lasketaan velkakirjan maksusuoritusten nykyarvot, joiden summa on velkakirjan teoreettinen nykyarvo PV.

$$(2\text{-}4) \quad PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1 + r_t)^t} + \frac{A}{(1 + r_n)^n}$$

Jos velkakirjan todellinen markkinahinta P poikkeaa teoreettisesta arvosta PV, arbitraasisijoittaja pyrkii ostamaan markkinoilla alihinnoiteltuja ja myymään markkinoilla ylihinnoiteltuja velkakirjoja. "Yhden hinnan lain" mukaan samat maksusuoritukset tarjoavat sijoituskohteet ovat markkinoilla yhtä kalliita tai muutoin arbitraasisijoittaja voi hankkia riskitöntä voittoa.[4]

Korkorakenne ei kuvaa ainoastaan eripituisten sijoitusten nykykorkoja vaan myös termiinikorkoja. Termiinikorot kertovat, millaisia korkoja vallitseva nykykorkorakenne implikoi tulevien hetkien välisille sijoituksille. Yhden jakson termiinikorko F määritellään seuraavasti:

---

[3] Ks. tarkemmin Vasicek - Fong (1982).

[4] Elton - Gruber (1987) s.456.

$$(2\text{-}5) \quad 1 + {}_{t-1}F_t = \frac{(1 + r_t)^t}{(1 + r_{t-1})^{t-1}} = \frac{d_{t-1}}{d_t} \quad \text{s.e. } t = 1,2,\ldots$$

jossa ${}_{t-1}F_t$ = jakson (t-1, t) termiinikorko (hetkellä 0)
r_t = jakson (0, t) nykykorko
d_t = diskonttofunktion d arvo jaksolle (0, t)

Velkakirjan sisäinen korko (eli efektiivinen korko) y on se yksi diskonttokorko, jota käyttämällä velkakirjan maksusuoritusten nykyarvojen summa PV saadaan velkakirjan markkina-arvon P suuruiseksi. Yhtälössä (2-1) $r_t = y$ on voimassa kaikille t. Kerran vuodessa kuponkia maksavan velkakirjan sisäinen korko y lasketaan hinnan avulla iteroimalla yhtälöstä (2-6):

$$(2\text{-}6) \quad P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1 + y)^t} + \frac{A}{(1 + y)^n}$$

Velkakirjan toteutunut tuotto on sen sisäisen koron suuruinen vain jos sijoittaja pitää velkakirjan sen erääntymiseen asti ja jos kuponginmaksut voidaan jälleensijoittaa juuri sisäisellä korolla. Oletukset ovat varsin rajoittavia, minkä vuoksi velkakirjan toteutunut tuotto poikkeaa yleensä sen ostohetken sisäisestä korosta. Nollakuponkilainan nykykorko on samalla sisäinen korko.

Epärealistisista oletuksista huolimatta sisäinen korko on yhä velkakirjamarkkinoilla yleisimmin käytetty velkakirjan odotetun tuoton mittari ja edullisuusvertailun väline, koska se kuvaa sijoitusta yhdellä luvulla. Sen käyttöön liittyy ilmeisiä ristiriitaisuuksia. Jos kaksi (eri) velkakirjaa maksaa kupongin samana päivänä, mutta niiden sisäiset korot ovat erilaisia - esimerkiksi 8 % ja 9 %- oletetaan, että toisen kuponki voidaan jälleensijoittaa 8 %:n korolla ja toisen 9 %:n korolla. Tällä oletuksella ei ole mitään loogista perustetta. Toisaalta sisäinen korko diskonttaa (saman velkakirjan) eriaikaiset maksusuoritukset samalla korolla, mikä ei ole perusteltua, ellei korkorakenne ole horisontaalinen.

Sisäisen koron sijasta tulisi käyttää nykykorkoa diskonttokorkona, jolloin (saman velkakirjan) eriaikaiset rahavirrat diskontataan eri korolla ja (eri velkakirjojen) samanaikaiset maksusuoritukset diskontataan samalla korolla.

Edellä esitetyn perusteella on selvästi mielekkäämpää tarkastella korkorakennetta, joka kuvaa nykykorkojen ja juoksuajan suhdetta, kuin tuottokäyrää, joka kuvaa velkakirjojen sisäisen koron ja juoksuajan suhdetta. Tuottokäyrä on kuitenkin yksinkertaisuutensa takia laajassa käytössä, vaikka velkakirjojen erilaiset kuponkikorot tekevät tuottokäyrän jossain määrin harhaiseksi todelliseen korkorakenteeseen verrattuna.[5]

Velkakirjan maksamaa vuosittaista kuponkikorkoa kutsutaan myös nimelliskoroksi. Kuponkikorko ja siitä johdettu juokseva korko (kuponkikorko jaettuna markkinahinnalla) kertovat velkakirjan tuotosta tai edullisuudesta vielä vähemmän kuin sisäinen korko, sillä ne eivät ota lainkaan huomioon ostohinnan ja nimellisarvon eroa eivätkä jälleensijoitustuottoa. Esimerkiksi nollakuponkilainan juokseva korko on 0 %.

Kuponkikorko eroaa muista edellä mainituista korkokäsitteistä sikäli, että se on kiinteäkorkoisella velkakirjalla kiinteä. Muut korot muuttuvat markkinahinnan muuttuessa, joten ne kaikki kuvaavat jollakin tavalla markkinakorkoa.

---

[5] Tuottokäyrän tarkastelu riski-tuottosuhteen ilmaisijana on hyvin karkeaa: sekä tuotto että riski ovat harhaisia. Olisi parempi käyttää duraatiota juoksuajan sijasta riskin mittarina, vaikka edelleen jäisi jäljelle kuponkiharhaa: kahdella velkakirjalla, joilla on sama duraatio ja eri kuponki, ei pidä markkinatasapainossa olla samaa sisäistä korkoa, ellei korkorakenne ole horisontaalinen. Vain nollakuponkilainojen nykykorkoja ja duraatioita kuvaava korkorakenne näyttää riski-tuottosuhteen harhattomasti - ja tämäkin pätee vain, jos kaikki korot muuttuvat yhtä paljon. Tuottokäyrän kuponkiharhasta ks. Bierwag (1987a) s.226 - 233, Caks (1977) ja Livingston - Caks (1977).

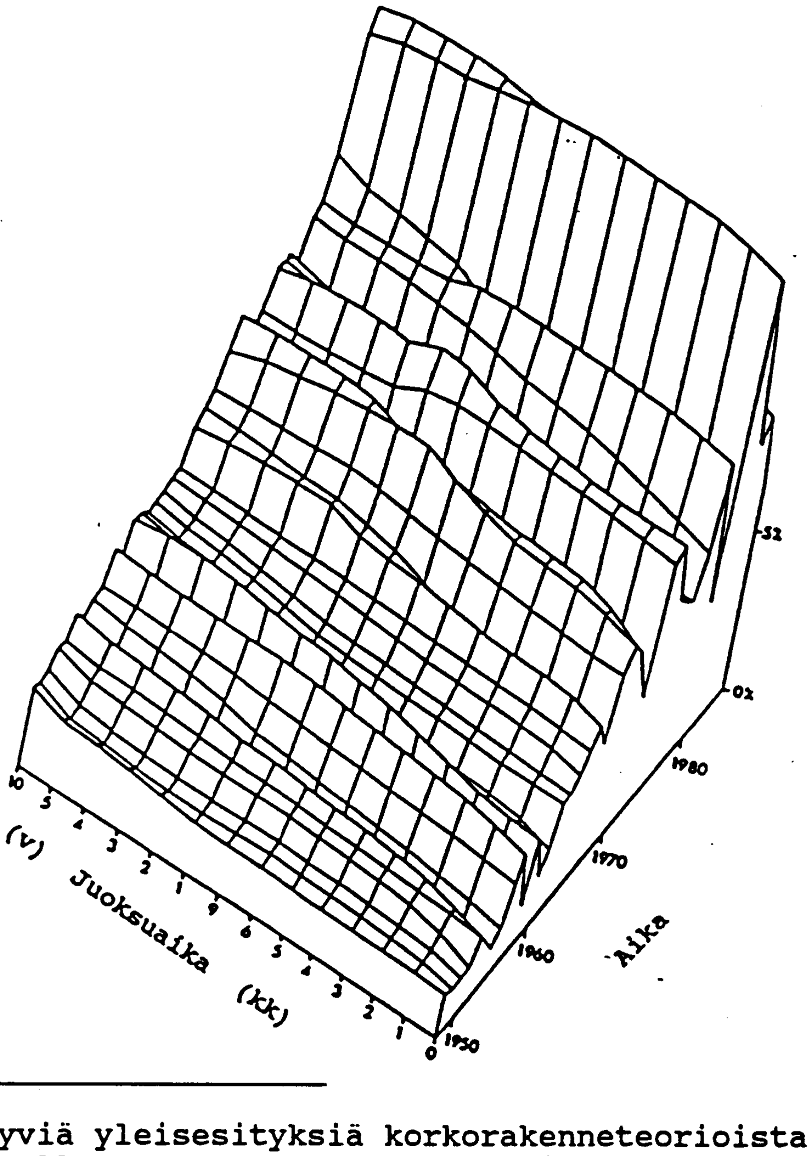
2.2 KORKORAKENTEEN MÄÄRÄYTYMISTEORIAT

2.2.1 PERINTEISET KORKORAKENNETEORIAT

Korkoriskin arviointi edellyttää jonkinlaisia oletuksia korkorakenteen määräytymisestä ja korkoja ohjaavasta stokastisesta prosessista. Lisäksi korkorakenneteoriat tekevät oletuksia sijoittajien suhtautumisesta riskiin.[6]

Alla oleva kuva kertoo, että korkotaso ja korkorakenteen muoto vaihtelevat huomattavasti yli ajan.

Kuva 1.
Yhdysvaltain korkorakenteen kehitys v. 1948 - 1985.
[Lähde: Shiller - McCulloch (1987)]



[6] Hyviä yleisesityksiä korkorakenneteorioista ovat McEnally (1987), Nelson (1979) ja Shiller - McCulloch (1987). Suomessa aihetta on käsitellyt mm. Virén (1988).

Nykykorot määräytyvät luoton kysynnän ja tarjonnan perusteella. Taustalla olevat fundamentaalitekijät, kuten talouden tuotannolliset mahdollisuudet ja kulutuksen aikapreferenssit, määräävät reaalikoron tason. Fisherin hypoteesin mukaan luottoriskittömän velkakirjan nimellinen korko koostuu vaaditusta reaalikorosta ja odotetusta inflaatiosta.[7] Empiirisesti on todettu, ettei kumpikaan tekijä ole vakio yli ajan[8], vaikka on muistettava, että molemmat ovat ei-havaittavissa olevia suureita, joten niitä voi mitata vain lisähypoteesien avulla.

Korkorakenneteoriat yrittävät selittää korkorakenteen erilaisia muotoja. Jos sijoittajilla ja lainanottajilla ei olisi mitään juoksuaikapreferenssejä, korkorakenne olisi aina horisontaalinen. Korkorakennehan kuvaa homogeenisten sijoituskohteiden korkojen ja juoksuaikojen suhdetta, eikä sen avulla tulisi vertailla sijoituskohteita, joilla on erilainen luottoriski tai veroasema.

Koska korkorakenne ei yleensä ole horisontaalinen, täytyy sijoittajilla ja lainanottajilla olla odotuksiin, luonnolliseen sijaintiin, riskin karttamiseen tai muuhun perustuvia juoksuaikapreferenssejä. Perinteiset korkorakenneteoriat (puhdas odotushypoteesi, likvidiyspreemiohypoteesi, ns. preferred habitat -hypoteesi ja markkinasegmentaatiohypoteesi) esittävät yksinkertaisia oletuksia juoksuaikapreferenssien etumerkistä ja syistä. Luvussa 2.2.3 esiteltävät korkorakenneteorian laajennukset perustuvat arbitraasimalleihin tai yleiseen tasapainoteoriaan, ja niihin liittyy jokin oletus korkorakennetta ohjaavasta stokastisesta prosessista.

Markkinasegmentaatiohypoteesi edustaa yhtä perinteisten teorioiden ääripäätä. Sen mukaan kullakin sijoittajalla- ja vastaavasti lainanottajalla - on jokin luonnollinen sijainti ja suunnittelujakso. Lisäksi sijoittajat ovat täydellisiä riskin karttajia: suuretkaan korkoerot tai

---

[7] Sharpe (1985) s.317.

[8] Shiller - McCulloch (1987) s.60 - 61.

muuttuvat korko-odotukset eivät saa heitä sijoittamaan muihin juoksuaikoihin. Lyhyt korko riippuu vain lyhytaikaisen luoton kysynnästä ja tarjonnasta ja pitkä korko vain pitkäaikaisen luoton kysynnästä ja tarjonnasta. Rahoitusomaisuuden siirtyminen eri sijoittajasegmenttien välillä määrää siten korkorakenteen muodon vaihtelut.

Kolme muuta perinteistä teoriaa ovat siinä mielessä kaikki odotushypoteeseja, että korkorakenteen muodon katsotaan olevan jossain yhteydessä odotuksiin tulevasta korkokehityksestä.

Perinteisten korkorakenneteorioiden toinen ääripää on puhdas odotushypoteesi, jonka mukaan korkorakenteen muoto johtuu ainoastaan korko-odotuksista. Sijoittajien katsotaan tällöin olevan riskineutraaleja: he valitsevat suunnittelujaksostaan riippumatta korkeimman odotetun tuoton antavat sijoituskohteet. Tällainen käyttäytyminen tekee kaikkien sijoitusten seuraavan jakson odotetut tuotot yhtä suuriksi. Nouseva korkorakenne kertoo, että markkinoilla odotetaan lyhyiden korkojen nousevan, ja laskeva korkorakenne kertoo, että markkinoilla odotetaan lyhyiden korkojen laskevan.

Muiden perinteisten teorioiden mukaan sijoittajat ovat riskin karttajia, joten korkorakenteen muoto riippuu odotusten lisäksi riskipreemiosta[9]. Likvidiyspreemiohypoteesiä on perusteltu sillä, että tietty korkotason muutos vaikuttaa kiinteäkorkoisen velkakirjan markina-arvoon yleensä sitä enemmän, mitä pidempi velkakirjan juoksuaika on. Pidempien sijoitusten täytyy tarjota korkeampi tuotto (likvidiyspreemio) korvauksena suuremmasta hintariskistään. Preemio voi myös johtua pidempien sijoitusten heikommasta likvidoitavuudesta ja suuremmasta inflaatioriskistä: ne eivät turvaa reaalituottoa yhtä hyvin kuin lyhyet sijoitukset.

---

[9] Käytän riskipreemiota yleiskäsitteenä korkorakenteen aikapreemiosta. Likvidiyspreemio on sen alakäsite.

Jos markkinoilla odotetaan korkotason pysyvän entisellään, korkorakenne on likvidiyspreemion takia tasaisen nouseva. Jos lyhyiden korkojen odotetaan kohoavan, korkorakenne on hyvin jyrkästi nouseva. Jos lyhyiden korkojen odotetaan laskevan, korkorakenne voi olla nouseva, laskeva tai horisontaalinen riippuen korko-odotusten voimakkuudesta ja likvidiyspreemion koosta.

Likvidiyspreemiohypoteesia voi myös pitää ns. preferred habitat -hypoteesin erikoistapauksena, kun valtaosalla sijoittajia on hyvin lyhyt luonnollinen suunnittelujakso. Preferred habitat -hypoteesin mukaan riskiä karttaville sijoittajille on yleensä maksettava preemio korvauksena riskin omaksumisesta eli poistumisesta luonnolliselta sijoitusalueeltaan. Ne sijoittajat, joilla on luonnollisesti pitkä suunnittelujakso, esimerkiksi pitkäaikaisten velkojen takia, vaativat riskipreemion lyhyisiin velkakirjoihin sijoittamisesta. Eripituisten velkakirjojen korot riippuvat sekä niiden suhteellisesta tarjonnasta että odotuksista, joten hypoteesissa on aineksia sekä markkinasegmentaatiohypoteesista että odotushypoteesista.

Jos lyhyiden korkojen odotetaan pysyvän entisellään, korkorakenne voi olla riskipreemioiden takia nouseva tai laskeva. Preferred habitat -hypoteesin mukaan korkorakenteesta ei siksi voi tehdä johtopäätöksiä markkinoiden korko-odotuksista, ellei riskipreemioiden etumerkkiä ja suuruutta tunneta.

Edellä mainitut hypoteesit voi kuvata myös riskipreemion näkökulmasta vertaamalla termiinikorkojen ja odotettujen nykykorkojen suhdetta. Jos puhdas odotushypoteesi pätee, korkorakenteen implikoima tietyn jakson termiinikorko F on yhtä suuri kuin saman jakson odotettu nykykorko E(r). Riskipreemio on aina nolla. Siis:

(2-7) $\quad {}_{t-1}F_t = E({}_{t-1}r_t)$

jossa ${}_{t-1}F_t$ = jakson (t-1, t) termiinikorko hetkellä 0
$E({}_{t-1}r_t)$ = jakson (t-1, t) odotettu nykykorko

Jos sijoittajat eivät ole riskineutraaleja, termiinikorko poikkeaa odotetusta nykykorosta riskipreemion Z verran:

$$(2\text{-}8) \quad {}_{t-1}F_t = E({}_{t-1}r_t) + Z \quad \text{s.e. } Z \gtrless 0$$

Likvidiyspreemiohypoteesin mukaan korkorakenteen riskipreemio on aina positiivinen eli kasvaa juoksuajan mukana. Tietyn jakson termiinikorko on siis odotetun nykykoron ja likvidiyspreemion summa. Preferred habitat -hypoteesin mukaan riskipreemio saattaa olla myös etumerkiltään negatiivinen eli se voi pienentyä juoksuajan kasvaessa. Molempien hypoteesien mukaan riskipreemio on kuitenkin vakaa yli ajan.

Markkinasegmentaatiohypoteesin mukaan riskipreemio on ääretön, joten termiinikorko ja odotettu nykykorko ovat toisistaan täysin riippumattomia.

Empiiristen tutkimusten tulokset eivät tue mitään kilpailevista hypoteeseistä yksinään, vaan Shiller - McCullochin (1987) mukaan jokainen niistä selittää osaltaan korkorakenteen määräytymistä. Historiallisesti korkorakenne on useammin ollut nouseva kuin laskeva, minkä on katsottu vahvistavan likvidiyspreemioiden olemassaolon. Empiiriset tutkimukset ovat tämän vuoksi hylänneet puhtaan odotushypoteesin melko yksimielisesti. Muille hypoteeseille ei pystytä kehittämään kovin voimakkaita testejä, joten niiden osalta tulokset ovat vain viitteellisiä. Preemiot eivät kuitenkaan ole kasvaneet suorassa suhteessa juoksuaikaan eivätkä ne ole olleet vakaita yli ajan, joten myöskään likvidiyspreemiohypoteesi ei sellaisenaan näytä kuvaavan todellisuutta. Riskipreemioiden muuttuminen yli ajan on myös preferred habitat- ja markkinasegmentaatiohypoteesien vastaista. Empiiristen tulosten kirjavuuden takia korkorakenteen määräytyminen on taloustieteen kiistellyimpiä kysymyksiä.[10]

---

[10] Nelson (1979) s.129 - 137 ja Shiller - McCulloch (1987) s.60 - 61.

Perinteisiä korkorakenneteorioita on lisäksi arvosteltu teoreettisin perustein. Cox - Ingersoll - Ross (1981) väittivät, että odotusteorioiden eri versioista ainoastaan ns. lokaalinen odotushypoteesi on yhdenmukainen pääomamarkkinoiden tasapainoehdon kanssa. Lokaalisen odotushypoteesin mukaan kaikkien velkakirjojen odotetun hetkellisen tuoton täytyy olla yhtä suuri kuin vallitseva tunnettu hetkellinen nykykorko. Campbell (1986) argumentoi kuitenkin, että tämä arvostelu ei koske (likvidiyspreemio- ja preferred habitat -)hypoteeseja, jotka eivät edellytä riskipreemioiden olevan nolla.

2.2.2 KORKORAKENNETTA OHJAAVA STOKASTINEN PROSESSI

Korkorakenteen tapaa muuttua jaksosta toiseen voidaan kuvata stokastisten prosessien avulla.[11] Duraatiokirjallisuudessa myös todellista korkoja generoivaa prosessia kutsutaan korkorakenteen stokastiseksi prosessiksi.[12] Tutkielmassani myös minä käytän ilmaisuja korkorakennetta ohjaava stokastinen prosessi tai korkorakenteen (todellinen) stokastinen prosessi tarkoittaessani reaalimaailmaa kuvaavan mallin sisältämää oletusta stokastisesta prosessista.

Jos pääomamarkkinat ovat tehokkaat siten, että kaikki saatavilla oleva tieto velkakirjojen hintoihin vaikuttavista tekijöistä sisältyy vallitsevaan korkorakenteeseen, stokastinen prosessi on tapa ilmaista vielä tuntemattoman tiedon epävarma vaikutus tulevaan korkorakenteeseen. Kun perinteiset korkorakenneteoriat esittävät oletuksia siitä, mihin tekijöihin (odotuksiin, luonnollisiin sijoitusalueisiin, riskipreemioihin) liittyvää tietoa vallitseva korkorakenne sisältää, hypoteesit korkoraken-

---

[11] Stokastinen prosessi on matemaattinen kuvaus tapahtumaketjulle, jota todennäköisyyslait hallitsevat, ja sitä käytetään osana mallia, joka pyrkii kuvaamaan todellisuutta.

[12] Ks. esim. Bierwag - Kaufman - Toevs (1983d).

teen stokastisesta prosessista esittävät oletuksia siitä, miten korkorakenne muuttuu uuden tiedon vaikutuksesta.[13]

Toinen tapa tulkita stokastista prosessia on käytännöllisempi. Sijoittajan täytyy tehdä jokin oletus stokastisesta prosessista, jota hän käyttää yksinkertaisena approksimaationa tulevien korkoshokkien luonteesta aivan riippumatta markkinoiden tehokkuudesta.

Varmuuden vallitessa korkorakenteen implikoimat termiinikorot realisoituvat tulevaisuuden korkorakenteissa. Tällöin kaikkien sijoitusten täytyy tuottaa yhtä paljon. Epävarmuuden vallitessa näin ei ole, mutta termiinikorkoja voi pitää tulevan korkorakenteen odotettuina osina. Siksi tulevaisuudessa toteutuvan korkorakenteen poikkeamaa termiinikorkojen osoittamista korko-odotuksista voidaan analysoida korkorakenteen muutoksen stokastisena (odottamattomana) osana. Seuraavassa jaetaan tietty toteutunut nykykorko odotettuun ja odottamattomaan osaan, kun korkorakenne siirtyy kerran satunnaisesti tilasta $r(0, t)$ tilaan $r^*(0, t)$ ja on muuten tunnettu.

(2-9) $r^*(t, t + T) = r(t, t + T) + [r^*(t, t + T) - r(t, t + T)]$ s.e. $T = 1,2,...$

jossa $r^*(t, t + T)$ = jakson $(t, t + T)$ toteutunut nykykorko hetkellä t
$r(t, t + T)$ = alkuperäisen korkorakenteen hetkellä 0 implikoima termiinikorko jaksolle $(t, t + T)$

Puhtaan odotushypoteesin mukaan tulevaisuudessa toteutuva nykykorko $r^*(t, t + T)$ voidaan jakaa odotettuun osaan $r(t, t + T)$ ja odottamattomaan osaan $[r^*(t, t + T) - r(t, t + T)]$. Likvidiyspreemiohypoteesi ottaa huomioon lividiyspreemion $Z(t, t + T)$. Tällöinkin toteutuva nykykorko $r^*(t, t + T)$ voidaan jakaa odotettuun osaan $r(t, t + T) - Z(t, t + T)$ ja odottamattomaan osaan $[r^*(t, t + T) - r(t, t + T) + Z(t, t + T)]$.

Todellinen korkoja ohjaava stokastinen prosessi on tuntematon ja siitä voidaan tehdä vain erilaisia oletuk-

---

[13] Bierwag (1987a) s.275 - 278.

sia. Korkoriskin arviointi edellyttää jonkin oletuksen tekemistä korkoihin vaikuttavasta stokastisesta prosessista, sillä kuhunkin stokastiseen prosessiin liittyy tietty korkoriskin mittari (duraatio). Mittarit saattavat olla erilaisia eri stokastisten prosessien tapauksissa.

Yksinkertaisimmat stokastiset prosessit ovat yksifaktoriprosesseja: korkorakenteeseen vaikuttaa vain yksi epävarmuustekijä. Additiivisessa prosessissa kaikki nykykorot muuttuvat saman prosenttiyksikkömäärän, kun epävarmuustekijä λ muuttuu satunnaisesti tietyn määrän.

(2-10) $r^*(0, t) = r(0, t) + \lambda$ s.e. $t = 1,2,...$

jossa $r(0, t)$ = jakson $(0, t)$ alkuperäinen nykykorko (hetkellä 0)
$r^*(0, t)$ = jakson $(0, t)$ nykykorko stokastisen muutoksen jälkeen (hetkellä 0)
λ = prosessia ohjaava satunnaismuuttuja

Additiivinen prosessi sallii negatiiviset korot eikä mahdollista korkorakenteen muodon muuttumista. Hieman realistisempi olisi multiplikatiivinen prosessi, jossa kaikki korot muuttuvat samassa suhteessa. Tämä prosessi on yhdenmukainen sen empiirisen havainnon kanssa, että korkovolatiilisuus on suurempi korkealla kuin matalalla korkotasolla. Lisäksi tämä käytännössä estää negatiiviset korot.

(2-11) $1 + r^*(0, t) = \lambda * [1 + r(0, t)]$
s.e. $\lambda > 0$ ja $t = 1,2,...$

Jos oletetaan multiplikatiivinen prosessi ja korkorakenne on alunperin nouseva, korkotason stokastinen nousu ($\lambda > 1$) nostaa enemmän pitkiä kuin lyhyitä korkoja ja stokastinen lasku ($\lambda < 1$) laskee enemmän pitkiä kuin lyhyitä korkoja. Toisaalta jos korkorakenne on alunperin laskeva, stokastinen koronmuutos liikuttaa enemmän lyhyitä kuin pitkiä korkoja. Tämäkään prosessi ei kuitenkaan selitä sitä empiiristä havaintoa, että lyhyet korot ovat yleisesti vaihtelevampia kuin pitkät korot. Tämän selittäisi multiplikatiivinen juoksuajasta riippuva prosessi:

$$(2\text{-}12)\quad 1 + r^{*}(0, t) = [1 + \lambda * \ln(1 + \alpha * t) / \alpha * t] * [1 + r(0, t)] \quad \text{s.e. } \alpha \geq 0 \text{ ja } t = 1,2,\ldots$$

jossa α = parametri, jonka avulla varmistetaan, että lyhyet korot vaihtelevat enemmän kuin pitkät, koska tekijä $\ln(1 + \alpha * t)$ kasvaa t:n mukana hitaammin kuin tekijä $\alpha * t$.

Näiden stokastisten prosessien etu on juuri niiden yksinkertaisuus. Helppokäyttöisyytensä vuoksi ne ovat suositumpia kuin monimutkaiset prosessit: ne approksimoivat korkorakenteen muutoksia riittävän hyvin moniin käyttötarkoituksiin. Monimutkaisemmat stokastiset prosessit eivät välttämättä ole parempia approksimaatioita, joten kustannusten ja hyödyn vertailu on aiheellista.[14]

Korkorakenteen stokastiikkaa on viime vuosina pyritty esittämään jatkuva-aikaisessa muodossa ja ottaen huomioon pääomamarkkinoiden tasapainoehdon. Esitän nyt yhden tällaisen prosessin, johon liittyvää Cox - Ingersoll-Ross -mallia käsitellään tarkemmin luvussa 2.2.3.

Yksi satunnaismuuttuja, lyhyt nykykorko, määrää yksiselitteisesti korkorakenteen. Lyhyen nykykoron r oletetaan seuraavan jatkuva-aikaista Markov-prosessia[15]:

$$(2\text{-}13)\quad dr = \theta * (\mu - r)dt + \sigma * \sqrt{r}\, dz$$

jossa hetkellinen nykykorko r ajautuu sopeutuskertoimen θ määräämällä vauhdilla kohti pitkän aikavälin keskiarvotasoa μ, σ on nykykoron volatiilisuutta mittaava diffuusiokerroin ja dz on normaalijakautunut Wiener-prosessi eli Brownin liike. Yhtälön oikean puolen alkuosa kuvaa odotettua koronmuutosta ja loppuosa odottamatonta koronmuutosta.

Tämän stokastisen prosessin empiirisesti tärkeitä ominaisuuksia ovat autoregressiivisyys, joka vahvistaa "tavallisten" korkojen esiintymistodennäköisyyttä, ja absoluuttisen korkovolatiilisuuden muuttuminen korkotason mukana, mikä estää negatiiviset korot. Sopeutuskerroin

---

14 Bierwag (1987a) s.254 - 259.

15 Markov-prosessi on stokastinen prosessi, jossa kaikki, mitä tulevaisuudesta tiedetään, sisältyy vallitseviin markkinahintoihin.

on sitä suurempi, mitä kauempana nykykorko on pitkän aikavälin keskiarvosta. Parametrit θ, μ, σ ja r on estimoitava empiirisesti.[16]

Kaikkiin edellä kuvattuihin stokastisiin prosesseihin liittyi vain yksi satunnaismuuttuja. Usean satunnaismuuttujan käyttäminen kuvaisi korkorakenteen todellista stokastista prosessia todennäköisesti paremmin, mutta se olisi laskennallisesti erittäin työlästä. Kysymys ei ole niinkään se, moniko faktori määrää korkorakenteen, vaan se, mikä on pienin määrä faktoreita, joka selittää pääosan korkorakenteen muutoksista. Käytännössä on tyydytty yksifaktorimalleihin, jotka edellyttävät täydellistä korrelaatiota eripituisten nykykorkojen välillä. Tutkijat ovat kokeilleet myös kahden - kolmen faktorin malleja.[17]

Usean faktorin malleissa eri tekijät voivat vaikuttaa eripituisiin nykykorkoihin ja faktoriherkkyydet voivat olla erilaisia. Faktorit voisivat olla makrosuureita, mutta rahoituksen kirjallisuudessa on yleensä käytetty joitakin referenssikorkoja.

Korkorakenteen dynamiikan voi kuvata hyvin yleisesti K faktorin mallissa:

(2-14)

$$
\begin{aligned}
dr_1 &= b_{11} * df_1 + b_{12} * df_2 + \ldots + b_{1K} * df_K \\
dr_2 &= b_{21} * df_1 + b_{22} * df_2 + \ldots + b_{2K} * df_K \\
&\;\;\vdots \\
dr_n &= b_{n1} * df_1 + b_{n2} * df_2 + \ldots + b_{nK} * df_K
\end{aligned}
$$

jossa dr_t = jakson (0, t) nykykoron odottamaton muutos s.e. $t = 1,2,\ldots,n$

df_k = faktori k:n odottamaton muutos s.e. $k = 1,2,\ldots,K$

b_{tk} = jakson (0, t) nykykoron herkkyys faktori k:n odottamattomille muutoksille

---

16 Cox - Ingersoll - Ross (1981), Cox - Ingersoll - Ross (1985) ja Ingersoll (1987, s.396 - 398).

17 Brennan - Schwartz (1983), Elton - Gruber - Nabar (1986), Nelson - Schaefer (1983).

Korkorakennetta ohjaavan stokastisen prosessin kuvaamiseen tarvittava faktorien eli satunnaismuuttujien lukumäärä riippuu eripituisten nykykorkojen välisen korrelaation asteesta. Mitä läheisempi yhteys eripituisten korkojen välillä on, sitä harvempia satunnaismuuttujia täytyy spesifioida. Ja mitä segmentoituneempi korkorakenne on, sitä useampia juoksuajasta riippuvia faktoreita tarvitaan. Markkinasegmentaatiohypoteesin mukaisessa ääritapauksessa eripituiset korot ovat täysin riippumattomia toisistaan ja stokastinen prosessi määritellään:

(2-15) $r^*(0, t) = \lambda_t + r(0, t)$ s.e. $t = 1,2,...$

jossa $r(0, t)$ = jakson (0, t) alkuperäinen nykykorko
$r^*(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko stokastisen muutoksen jälkeen
λ_t = joukko stokastista prosessia ohjaavia satunnaismuuttujia, joista yksikään ei korreloi täydellisesti minkään muista satunnaismuuttujista muodostetun joukon kanssa.[18]

2.2.3 KORKORAKENTEEN TASAPAINOMALLIT

Korkorakenneteorian uusimmat laajennukset perustuvat oletukseen tehokkaiden pääomamarkkinoiden tasapainosta, jossa varmoja ylisuuria tuottoja ei voi hankkia riskittömän arbitraasin avulla. Arbitraasin eliminoivan ehdon mukaan odotetun tuoton kasvattaminen siis edellyttää markkinatasapainossa aina lisäriskin hyväksymistä.[19]

Korkorakenteen tasapainomallit olettavat, että eripituisten velkakirjojen arvot ovat muutamien jatkuvaa diffuusioprosessia seuraavien satunnaismuuttujien deterministisiä funktioita. Arbitraasin elimoinoiminen edellyttää, että velkakirjojen markkinahinnat ovat yhdenmukaisia

[18] Bierwag (1987a) s.277.

[19] Arbitraasin eliminoiva ehto liittyy Stephen Rossin (1976) kehittämään teoriaan (engl. arbitrage pricing theory), jota on sovellettu myös osakkeiden ja optioiden hinnoittelumalleihin. Myös edellä yhtälössä (2-14) kuvattu malli perustuu APT:hen.

hinnoitteluyhtälöksi (engl. valuation equation) kutsutun osittaisdifferentiaaliyhtälön kanssa.

Hinnoitteluyhtälön mukaan jokaisen sijoituskohteen odotettu tuotto koostuu riskittömästä tuotosta ja sijoitukseen liittyvästä riskistä saatavasta korvauksesta.

$$E(R_i) = r_0 + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * Z_j \tag{2-16}$$

jossa $E(R_i)$ = velkakirjan i odotettu tuotto
r_0 = riskitön tuotto (lyhyt nykykorko)
b_{ij} = velkakirjan i herkkyys faktorille j (eli riskin määrä)
Z_j = faktorin j riskipreemio (eli riskiyksikön "markkinahinta")

Yhtälössä on siis kutakin satunnaismuuttujaa eli faktoria vastaava tuntematon parametri, joka kuvaa muuttujaan liittyvän riskin "markkinahintaa". Riskien "markkinahinnat" on estimoitava korkorakenteesta. Kun on tehty oletuksia korkorakenteeseen vaikuttavien satunnaismuuttujien stokastisista ominaisuuksista, voidaan estimoituja parametreja käyttää velkakirjojen hinnoitteluun ja korkorakenteen kuvaamiseen.[20]

Jos oletetaan vain yksi riskin lähde, minkä tahansa velkakirjan faktoriherkkyys voidaan replikoida yhdestä lyhyestä velkakirjasta ja yhdestä pitkästä velkakirjasta koostuvalla dynaamisella portfoliolla. Arbitraasin eliminomiseksi velkakirjan markkinahinnan täytyy tällöin olla yhtä suuri kuin replikoivan portfolion kustannus.

Oletus vain yhdestä riskin lähteestä on tietenkin epärealistinen. Mallia voi yrittää parantaa ottamalla huomioon useampia faktoreita, mutta tämä on laskennallisesti työlästä. Esimerkiksi Brennan - Schwartzin (1983) kahden faktorin malli olettaa korkorakenteen ja velkakirjojen hintojen riippuvan kahden satunnaismuuttujan - lyhyen ja pitkän koron - arvoista. Kummallakin riskillä on oma markkinahintansa ja jokaisen velkakirjan hinta

---

[20] Brennan - Schwartz (1983) s.11 ja Vasicek (1977).

riippuu sen molemmista faktoriherkkyyksistä. Minkä tahansa velkakirjan faktoriherkkyydet voidaan replikoida kolmen muun velkakirjan dynaamisella yhdistelmällä.

Korkorakenteen tasapainomallien ehkä kehittyneintä muotoa edustaa ns. Cox - Ingersoll - Ross -malli (CIR), joka kuvaa koron määräytymistä stokastisessa yleisen tasapainon mallissa.

CIR-mallin yksinkertaisessa makrotaloudessa (yhden hyödykkeen tuotantotalous) tasapainokorko riippuu tasapainokulutuksesta. Sijoitusten rajahyödyn tulee olla sama kuin kulutuksen rajahyöty.

Lyhyt nykykorko on mallin ainoa satunnaismuuttuja; se määrää koko korkorakenteen. Velkakirjojen markkinahintojen täytyy olla sopusoinnussa arbitraasin eliminoimisehdon kanssa, joten CIR-mallin avulla voidaan hinnoitella mitä tahansa korkoinstrumentteja. Lyhyen nykykoron oletetaan seuraavan yhtälössä (2-13) kuvattua jatkuva-aikaista stokastista prosessia. Vaikka CIR on alunperin yksifaktorimalli, se voidaan yleistää usean faktorin malliksi.

CIR-mallin ero muihin korkorakenteen tasapainomalleihin on siinä, että se lähtee yleisen tasapainoteorian näkökulmasta: lyhyt korko ja sen stokastiset ominaisuudet määräytyvät endogeenisesti reaalitalouden puolelta ja ne voidaan esittää eksplisiittisen funktion muodossa. CIR-malli sisältää sisäisesti ristiriidattomalla tavalla aineksia kaikista perinteisistä teorioista. Tuleviin tapahtumiin liittyvät odotukset, riskipreferenssit, muiden sijoitusvaihtoehtojen piirteet ja yksilöiden preferenssit kulutuksen ajoittamisen suhteen on kaikki otettu huomioon tavalla, joka on yhdenmukainen hyötyä maksimoivan käyttäytymisen ja rationaalisten odotusten kanssa.[21]

---

[21] Cox - Ingersoll - Ross (1985) s.386 ja Rantala (1988) s.2 - 4.

3 MACAULAY-DURAATIO

3.1 MACAULAY-DURAATIO: KÄSITE JA LASKUTAPA

Tässä luvussa esitellään Macaulay-duraation käsite, sen laskutapa ja tärkeimmät ominaisuudet (3.1). Tämän jälkeen kuvaillaan, miten eri tekijät (juoksuaika, korkotaso, kuponkitaso) vaikuttavat velkakirjan duraatioon (3.2 - 3.4).

Kiinteäkorkoisen joukkovelkakirjan markkinahinta liikkuu vastakkaiseen suuntaan kuin sijoittajien vaatima korko. Markkinakorkojen noustessa myös vanhojen kiinteäkorkoisten velkakirjojen odotetun tuoton on parannuttava, ja tämä edellyttää hinnan laskua. Mitä pidempään varallisuus on sidottu kiinteälle korolle, sitä enemmän tietty diskonttokoron muutos yleensä vaikuttaa velkakirjan markkina-arvoon. Tämän vuoksi monet sijoittajat käyttävät velkakirjan juoksuaikaa sen arvon korkoherkkyyden mittarina. Juoksuaika kertoo kuitenkin vain ajan velkakirjan viimeiseen maksusuoritukseen. Velkakirjan arvon korkoherkkyys saattaa erikoistapauksissa pienentyä juoksuajan kasvaessa, koska siihen vaikuttavat myös velkakirjan kuponkikorko ja sisäinen korko.

Frederick Macaulay huomasi jo vuonna 1938 juoksuajan vajavaisuuden korkoriskin mittarina ja kehitti paremman käsitteen, duraation. Duraatio on velkakirjan kaikkien maksusuoritusten juoksuaikojen painotettu keskiarvo: se siis ottaa huomioon myös kuponkitulon. Mitä pidempi juoksuaika, korkeampi kuponkitaso ja korkeampi sisäinen korko, sitä merkittävämpi on kuponkivirta nimellispääoman maksuun verrattuna. Macaulay painotti eriaikaiset maksusuoritukset niiden nykyarvoilla - eikä nimellismäärillä - ottaen näin huomioon rahan aika-arvon. Macaulay-duraatio on siis **velkakirjan maksusuoritusten painotettu keskimääräinen juoksuaika, jossa painot ovat suhteessa kunkin maksusuorituksen nykyarvoon.** Macaulay-duraatio kertoo juoksuaikaa paremmin velkakirjan "todellisen" keskimääräisen iän.

Duraatio-käsitteen merkitys ei valjennut sijoittajille nopeasti, vaikka John Hicks (1939) kehitti samanaikaisesti Macaulayn kanssa duraatiolle läheisen käsitteen, pääoman arvon korkoherkkyyden (ns. modifioitu duraatio). Useat tutkijat löysivät duraation uudelleen [mm. Samuelson (1945), Redington (1952)], mutta vasta Fisher - Weilin (1971) artikkelin julkaisemisen jälkeen käsitteen käyttökelpoisuus korkoriskin hallinnassa ymmärrettiin laajasti.

Velkakirjan keskimääräisen iän lisäksi duraatio kuvaa aikaa, jonka kuluessa tietyn korkotason muutoksen hintavaikutus ja jälleensijoitusvaikutus täsmälleen kumoavat toisensa. Näin duraatiota voi käyttää tietyn suunnittelujakson korkoriskin poistamiseen. Käytännössä kaikki sijoittajat eivät halua poistaa korkoriskiä, mutta useimmat haluavat mitata ottamansa riskin määrää. Siksi modifioitua duraatiota on pidetty hyödyllisenä sijoitusten arvon korkoherkkyyden mittarina.

Tietyn sisäisen koron muutoksen vaikutus samanduraatioisten velkakirjojen markkina-arvoihin on tiettyjen korkorakenteen dynamiikkaa koskevien oletusten vallitessa yhtä suuri, vaikka velkakirjojen maksusuoritusrakenteet olisivat erilaisia. Samanduraatioisista velkakirjoista nollakuponkilainalla on yksinkertaisin rakenne. Nollakuponkilainan duraatio on juoksuajan pituinen, koska sillä on vain yksi maksusuoritus. Macaulay tavallaan standardisoi kuponkilainat vastaamaan yhtä korkoherkkää (samanduraatioista) nollakuponkilainaa, koska jälkimmäisen arvon korkoherkkyys ja odotettu tuotto ovat helpommin laskettavissa. Esimerkiksi velkakirjan, jonka duraatio on viisi vuotta, suhteellinen korkoherkkyys on sama kuin viiden vuoden nollakuponkilainalla.

Macaulay-duraation voi siis esittää kaavana, jossa velkakirjan kunkin maksusuorituksen jäljellä oleva juoksuaika painotetaan omalla nykyarvollaan ja tulojen summa jaetaan painojen summalla, joka on samalla velkakirjan kaikkien maksusuoritusten nykyarvo eli (teoreettinen) hinta.

Diskonttokorkona Macaulay käytti velkakirjan sisäistä korkoa, mihin liittyi implisiittinen oletus horisontaalisesta korkorakenteesta ja sen paralleeleista liikkeistä. Koska Macaulay-duraatio käyttää sisäistä korkoa diskonttokorkona, siihen liittyvät siis kaikki sisäisen koron epäjohdonmukaisuudet, joita kuvattiin luvussa 2.1. (Macaulay esitti tosin itsekin vaihtoehtoisen duraatiokaavan, jossa jokainen maksusuoritus diskontataan nykykorolla eikä sisäisellä korolla.)

Macaulay-duraation kaava on yksinkertaisinta esittää kuponkipäivänä ja olettaen kuponginmaksun ja koron korolle maksamisen tapahtuvan vuosittain:

$$(3\text{-}1) \quad D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t * CF_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}}$$

$$= \frac{PV(CF_1)}{\sum_{t=1}^{n} PV(CF_t)} * 1 + \frac{PV(CF_2)}{\sum_{t=1}^{n} PV(CF_t)} * 2 + \ldots + \frac{PV(CF_n)}{\sum_{t=1}^{n} PV(CF_t)} * n$$

jossa D = Macaulay-duraatio
CF_t = maksusuoritus hetkellä t
t = maksusuorituksen juoksuaika (vuosissa)
y = velkakirjan sisäinen korko
PV = nykyarvo

Sisäisen koron määritelmästä johtuu se, että kaavan nimittäjässä voi käyttää maksusuoritusten nykyarvojen summan sijasta velkakirjan markkinahintaa. Muun kuin vuosittaisen koronkorko-jakson valinta vaikuttaa lisäksi kaavan diskonttotekijään: annualisoitu sisäinen korko on jaettava vuosittaisella kuponginmaksufrekvenssillä.

Muulloin kuin kuponkipäivinä Macaulay-duraation kaava on seuraavaa muotoa (kuponginmaksu ja koronkorko vuosittain):

$$(3\text{-}2) \quad D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{(t - 1 + a) * CF_t}{(1 + y)^{t-1+a}}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1 + y)^{t-1+a}}}$$

jossa D = Macaulay-duraatio jaksoissa ilmaistuna
CF_t = maksusuoritus hetkellä t
t = maksusuorituksen juoksuaika (jaksoissa)
y = velkakirjan sisäinen korko
a = jäljellä oleva osa edellisen ja seuraavan kuponginmaksupäivän välisestä jaksosta

Seuraavassa on esimerkki duraation laskemisesta neljän vuoden kertakuoletuslainalle, joka maksaa vuosittain 6 % kupongin (C_t = 6) ja eräpäivänä lisäksi nimellispääoman (A = 100), kun lainan sisäinen korko on 8 % (y = 0.08).

$$(3\text{-}3) \quad D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t * C_t}{(1 + y)^t} + \frac{n * A}{(1 + y)^n}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1 + y)^t} + \frac{A}{(1 + y)^n}}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{4} \frac{t * 6}{(1.08)^t} + \frac{4 * 100}{(1.08)^4}}{\sum_{t=1}^{4} \frac{6}{(1.08)^t} + \frac{100}{(1.08)^4}}$$

$$= \frac{\frac{1 * 6}{1.08} + \frac{2 * 6}{(1.08)^2} + \frac{3 * 6}{(1.08)^3} + \frac{4 * 6}{(1.08)^4} + \frac{4 * 100}{(1.08)^4}}{\frac{6}{1.08} + \frac{6}{(1.08)^2} + \frac{6}{(1.08)^3} + \frac{106}{(1.08)^4}}$$

$$= \quad 341.78 \ / \ 93.37 \quad = \quad 3.66 \text{ vuotta.}$$

Duraation käyttökelpoisuutta parantaa vielä sen additiivisuus: kokonaisen velkakirjasalkun korkoriskiä voidaan hallita yhtä hyvin kuin yksittäisen velkakirjan. Velkakirjasalkun duraatio on siihen kuuluvien velkakirjojen duraatioiden painotettu keskiarvo, jossa painot riippuvat yksittäisten velkakirjojen suhteellisista osuuksista ja korkorakenteen oletetusta stokastisesta prosessista. Yksittäisten velkakirjojen suhteellisia osuuksia portfoliosta voi käyttää yksinään painoina, jos Macaulay-duraation taustalla olevat oletukset ovat voimassa: korkorakenne on horisontaalinen ja eripituisten korkojen liikkeet korreloivat täydellisesti. Muussa tapauksessa pitäisi jokainen maksusuoritus diskontata oman juoksuaikansa nykykorolla.[1]

3.2 JUOKSUAJAN VAIKUTUS DURAATIOON

Macaulay-duraation kaavasta (3-3) voi nähdä, että kiinteäkorkoisen velkakirjan duraatio riippuu sen juoksuajasta (n), kuponkikorosta (C) ja sisäisestä korosta (y). Markkinakäytäntö määrää yleensä muut tekijät, kuponginmaksufrekvenssin ja nimellispääoman suuruuden (A), ja ne vahvistetaan jo liikkeellelaskuvaiheessa.

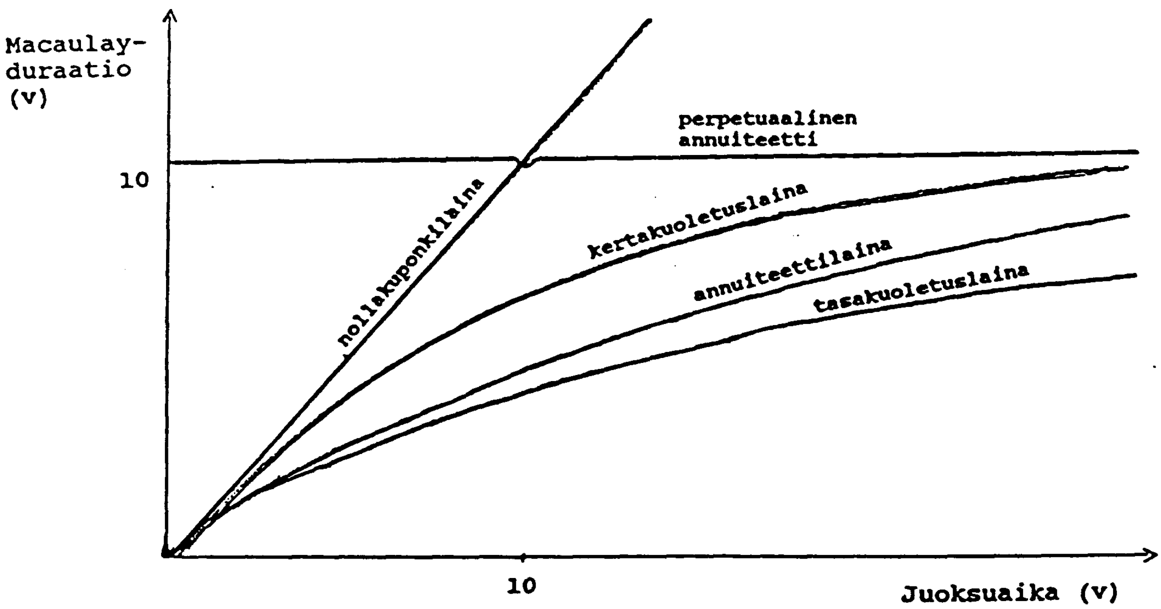
Juoksuajan vaikutus duraatioon riippuu lainan tyypistä, mutta yleensä juoksuajan pidentäminen pidentää duraatiota. Macaulay-duraatiohan on velkakirjan maksusuoritusten juoksuaikojen painotettu keskiarvo. Nollakuponkilainan duraatio on aina juoksuajan pituinen, koska sillä on vain yksi maksusuoritus, joka maksetaan juuri eräpäivänä. Kuponkilainan duraatio on lyhyempi kuin juoksuaika. Kuponkilainoista kertakuoletuslainan duraatio on pidempi kuin annuiteettilainan tai tasakuoletuslainan, koska jälkimmäisten nimellispääomat maksetaan keskimäärin aikaisemmin. Käsittelen jatkossa lähinnä kertakuoletuslainoja, koska ne ovat yleisimpiä suurilla joukkovelkakirjamarkkinoilla.

---

[1] Haugen (1986) s.344 - 346.

Kuvassa 2 on verrattu keskenään nollakuponkilainan, kertakuoletuslainan, annuiteettilainan ja tasakuoletuslainan duraatioita eri juoksuajoilla. Kuvan horisontaalinen viiva on perpetuaalisen annuiteetin duraatio. Perpetuaalinen annuiteetti eli konsoli on vuosittaista kuponkikorkoa maksava laina, jota ei kuoleteta koskaan, joten sen juoksuaika on ikuinen. Voidaan osoittaa[2], että vuosittain kuponkia maksavan perpetuaalisen annuiteetin arvo on ikuisen kuponkivirran nykyarvo sisäisellä korolla diskontattuna (C / y) ja sen Macaulay-duraatio on (1 + y) / y.

Kuva 2.
Lainatyypin vaikutus duraation ja juoksuajan suhteeseen.



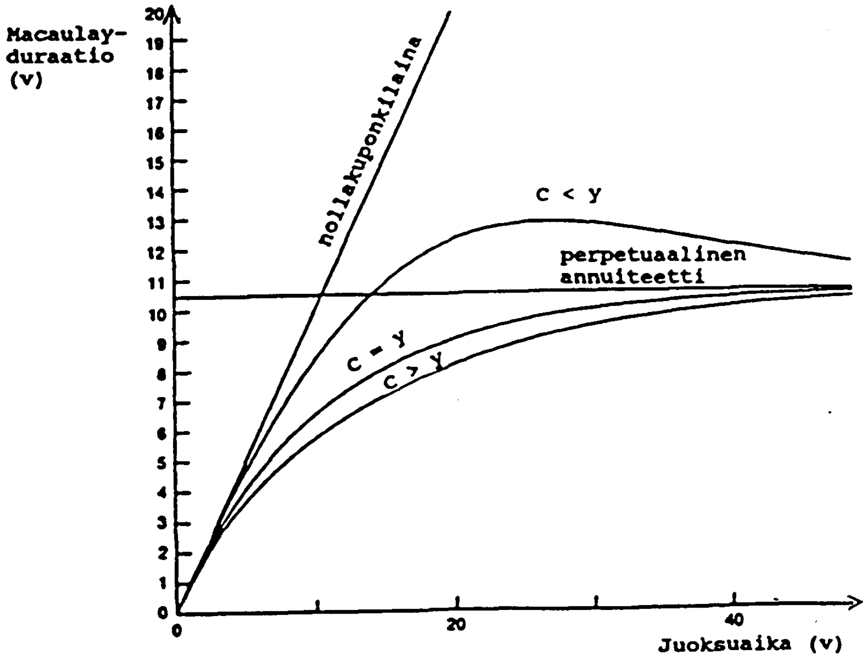
[2] Bierwag (1987a) s.71 - 76.

Kuponkeja maksavan kertakuoletuslainan duraatio kasvaa yleensä juoksuajan kasvaessa, koska lainaan liitetään tällöin aiempaa pidempiä maksusuorituksia (kuponginmaksuja), ja nimellispääoman takaisinmaksu lykkääntyy kauemmas tulevaisuuteen. Velkakirjoilla, joiden kuponki on vähintään sisäisen koron suuruinen ($C \geq y$ => hinta ≥ 100), jokainen juoksuajan pidennys pidentää duraatiota hieman vähemmän kuin edellinen pidennys. Tämä johtuu siitä, että kauimmaisten maksusuoritusten - erityisesti nimellispääoman - suhteellinen paino (nykyarvo-osuus) pienenee juoksuajan kasvaessa. Kun kuponkilainan juoksuaika on riittävän pitkä, kaukaisen nimellispääoman nykyarvo on olematon, ja laina muistuttaa yhä enemmän perpetuaalista annuiteettia eli duraatio lähestyy alhaaltapäin asymptoottisesti kuvan 3 horisontaalista viivaa.

Velkakirja, jonka kuponki on sisäistä korkoa alhaisempi ($C < y$ => hinta < 100), on sikäli erikoinen, että sen duraatio saattaa pienentyä juoksuajan kasvaessa. Alla olevassa kuvassa matalakuponkisen velkakirjan duraatio käyttäytyy aluksi nollakuponkilainan duraation tavoin (kuponkivirran merkitys nimellispääomaan verrattuna on vähäinen), mutta juoksuajan kasvaessa tarpeeksi sen duraatio alkaa pienentyä. Hyvin pitkällä juoksuajalla tämänkin velkakirjan duraatio lähestyy perpetuaalin duraatiota (eli kuvan 3 horisontaalista viivaa - nyt ylhäältäpäin asymptoottisesti).[3]

[3] Aaltonen (1986) s.9 - 11, Homer - Leibowitz (1972) s.33 - 42 ja Kopprasch (1987) s.88 - 95.

Kuva 3.
Juoksuajan ja erikuponkisten lainojen duraation suhde. [Lähde: Kopprasch (1987)]

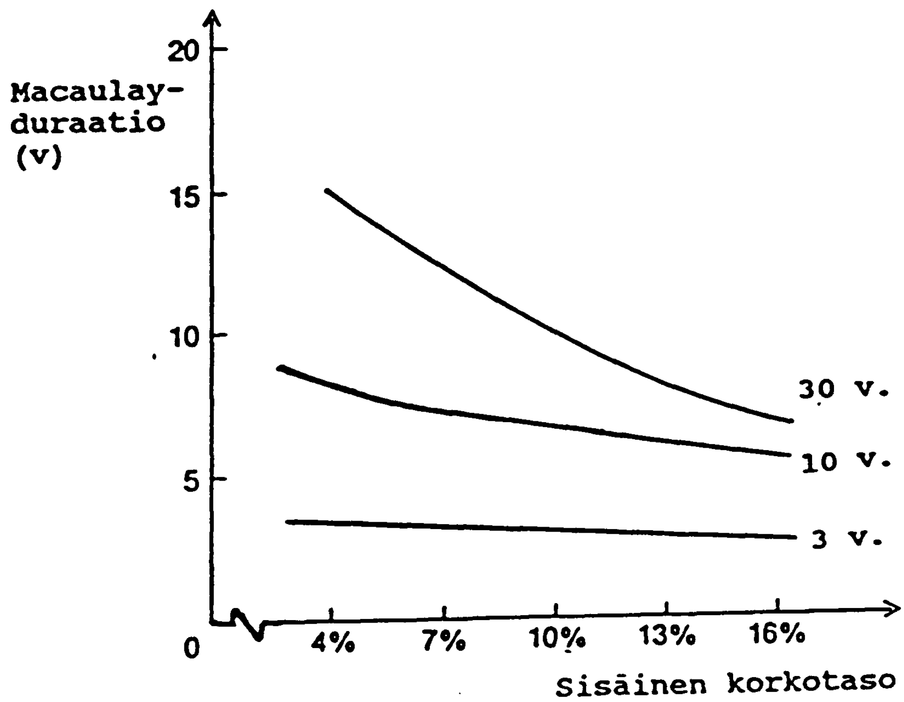


3.3 KORKOTASON VAIKUTUS DURAATIOON

Diskonttokoron vaikutus duraatioon riippuu lainan tyypistä. Diskonttokorkona käytetään tässä tarkastelussa velkakirjan sisäistä korkoa. Kun sijoittajien vaatima markkinakorkotaso muuttuu, vanhojen kiinteäkorkoisten velkakirjojen markkinahintojen täytyy myös muuttua - ja sisäisten korkojen niiden mukana.

Lainatyyppien ääripäät ovat nollakuponkilaina, joka ei maksa kuponkeja, ja perpetuaalinen annuiteetti, joka ei maksa nimellispääomaa. Nollakuponkilainan Macaulay-duraatio on sama kaikilla korkotasoilla, kun taas perpetuaalisen annuiteetin Macaulay-duraatio lyhenee sisäisen koron noustessa. Muut kuponkilainat ovat karkeasti ottaen näiden kahden ääritapauksen välimuotoja: kuponkivirta vastaa perpetuaalista annuiteettia ja nimellispääoma nollakuponkilainaa.

Kuva 4.
Korkotason ja eripituisten lainojen duraation suhde (kuponkikorko 10 %).



Nollakuponkilainan Macaulay-duraatio on korkotasosta riippumaton, koska ainoan maksusuorituksen juoksuaika ei muutu korkotason mukana. Perpetuaalisen annuiteetin ja kuponkilainojen duraatio lyhenee sisäisen koron noustessa, koska kauimmaisten maksusuoritusten arvo pienenee eniten ja niiden suhteellinen paino vähenee.

Yleisesti t jakson kuluttua maksettavan rahasuorituksen CF nykyarvo on CF $/(1 + y)^t$, jossa y on diskonttokorko. Jos y muuttuu tasolle y', uusi nykyarvo on CF / $(1 + y')^t$, eli alkuperäinen nykyarvo oli kerrottava tekijällä $(1 + y)^t / (1 + y')^t$. Jos diskonttokorko nousee (y' > y), tämä tekijä on pienempi kuin yksi ja sillä kertominen pienentää nykyarvoa. Tekijä pienenee t:n kasvaessa, joten kaukaiset maksusuoritukset menettävät nykyarvoaan eniten. Siksi niiden suhteellinen osuus koko nykyarvosta pienenee. Vastaavasti sisäisen koron lasku nostaa velkakirjan kaukaisimpien maksusuoritusten nykyarvoja eniten ja kasvattaa niiden suhteellista osuutta varhaisiin maksusuorituksiin verrattuna, mikä pidentää duraatiota.

Osoitan luvussa 4.1, että velkakirjan arvon suhteellinen korkoherkkyys eli ns. modifioitu duraatio on Macaulay-duraatio jaettuna (1 + y / f):llä, jossa y on annualisoitu sisäinen korko ja f vuosittainen koronmaksufrekvenssi. Esimerkiksi jos puolivuosittain kuponkia maksavan (f = 2) velkakirjan sisäinen korko on 8 % ja Macaulay-duraatio viisi vuotta, sen modifioitu duraatio on 5 / 1.04 = 4.81. Tämän suhteen vuoksi kaikkien velkakirjojen modifioitu duraatio pienenee enemmän kuin Macaulay-duraatio, kun sisäinen korko nousee - ja jopa nollakuponkilainan modifioitu duraatio pienenee hieman sisäisen koron noustessa. Se, että velkakirjojen hintavaihtelujen on käytännössä havaittu olevan suurempia korkeilla korkotasoilla, vaikka velkakirjojen arvon suhteelliset korkoherkkyydet (per diskonttokoron tietty prosenttiyksikkömuutos) ovat olleet alhaisia, johtuu markkinakorkojen suuremmasta volatiilisuudesta korkeilla korkotasoilla.[4]

3.4 KUPONKITASON VAIKUTUS DURAATIOON

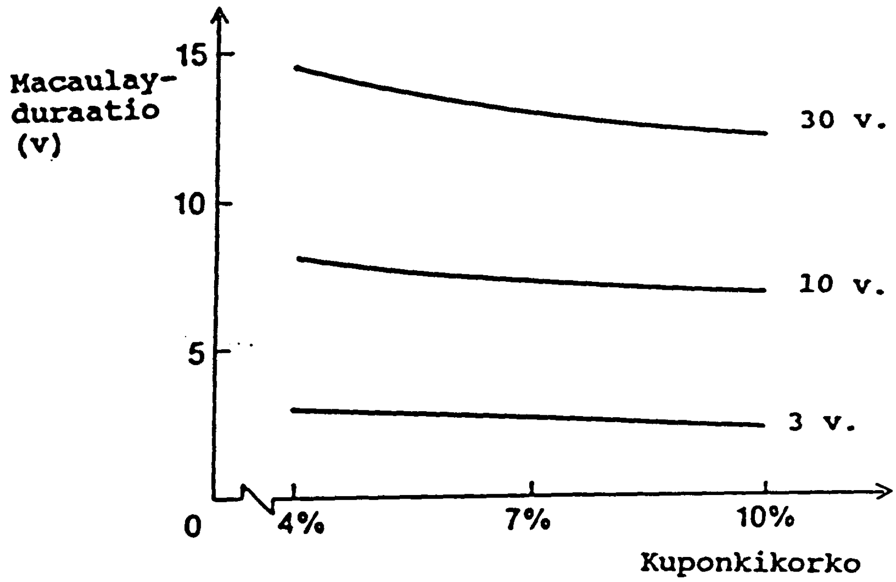
Velkakirjan duraatio pienenee kuponkitason noustessa, kun juoksuaika ja sisäinen korko ovat kiinteitä. Tällöinhän varhaisemmin maksettavan kuponkivirran paino myöhäisempään nimellispääoman maksuun verrattuna kasvaa. On helppo nähdä, että jos kahdella velkakirjalla on sama juoksuaika, korkeamman kupongin maksavasta lainasta saadaan sijoitetut rahat keskimäärin aikaisemmin takaisin.[5]

---

[4] Bierwag (1987a) s.66 - 70, Douglas (1988) s.168 - 171 ja Kopprasch (1987) s.92 - 93.

[5] Kopprasch (1987) s.89 - 91 ja Douglas (1988) s.163.

Kuva 5.
Kuponkitason ja eripituisten lainojen duraation suhde (sisäinen korko 7 %).



Myös kuponginmaksufrekvenssin tiivistäminen esimerkiksi vuosittaisesta puolivuotiseksi lyhentää duraatiota, koska osa kustakin vuosikupongista maksetaan tällöin aikaisemmin.

Havainnollistaakseni eri tekijöiden suhteellista merkitystä esitän pienen taulukon kiinteäkorkoisten velkakirjojen Macaulay- ja modifioiduista duraatioista eri juoksuajoilla, kuponkitasoilla ja sisäisen koron tasoilla, kun $D_{mod} = D / (1 + y / 2)$. (Kuponginmaksun oletetaan tässä tapahtuvan kahdesti vuodessa.)

Taulukko 1. Erilaisten velkakirjojen Macaulay-duraatio ja modifioitu duraatio (suluissa).

Juoksuaika ->	1 v.		5 v.		10 v.	
Kuponkitaso ->	0 %	10 %	0 %	10 %	0 %	10 %
Korkotaso ↓						
10 %	1.00 (0.95)	0.97 (0.93)	5.00 (4.76)	4.05 (3.86)	10.0 (9.52)	6.54 (6.23)
8 %	1.00 (0.96)	0.97 (0.94)	5.00 (4.81)	4.09 (3.94)	10.0 (9.61)	6.77 (6.51)
6 %	1.00 (0.97)	0.97 (0.95)	5.00 (4.85)	4.13 (4.01)	10.0 (9.71)	6.99 (6.79)

4 DURAATION KÄYTTÖ KORKORISKIN HALLINNASSA

4.1 MODIFIOITU DURAATIO KORKOHERKKYYDEN MITTARINA

Rahoitusalan tutkijat ja ammattilaiset ovat löytäneet duraatiolle monia sovellutuksia korkoriskin hallintastrategioissa. Duraation avulla voidaan approksimoida tietyn korkotason muutoksen välitöntä vaikutusta velkakirjan arvoon (4.1) sekä poistaa pitkäaikaisenkin suunnittelujakson korkoriski (4.2). Duraatioanalyysia voi käyttää myös aktiivisissa sijoitusstrategioissa, kuten subjektiiviseen korkonäkemykseen perustuvassa optimaalisen portfolion valinnassa (4.3). Duraatioanalyysia voidaan soveltaa jossain määrin myös muiden korkoinstrumenttien kuin kiinteäkorkoisen velkakirjan riskin arvioimiseen: luvussa 4.4 esitetään vaihtuvakorkoisen velkakirjan duraation ja luvussa 4.5 korkofutuurien ja korko-optioiden duraatioiden laskukaavat.

John Hicks (1939) kehitti itsenäisesti samantapaisen korkoherkkyyden mittarin kuin Macaulay tutkiessaan pääoman arvon joustavuutta diskonttokorkoonsa nähden. Macaulay-duraation ja hicksiläisen modifioidun duraation käsitteiden täsmällinen suhde johdettiin vasta 1970-luvulla.[1]

Hopewell - Kaufman laskivat vuonna 1973 velkakirjan markkina-arvon differentiaalin sisäisen koron muutoksen suhteen. Velkakirjan markkina-arvo on sen maksusuoritusten nykyarvojen summa:

$$(4\text{-}1) \quad P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y)^t} + \frac{A}{(1+y)^n}$$

jossa P = velkakirjan markkina-arvo
y = sisäinen korko

[1] Rahoitusalan kirjallisuudessa modifioitua duraatiota kutsutaan toisinaan vain duraatioksi, mutta tutkimuksessani käytän duraation käsitettä sellaisenaan joko yleiskäsitteenä tai viittaan Macaulay-duraatioon.

C_t = kuponginmaksu hetkellä t
A = nimellisarvo
n = velkakirjan juoksuaika

Derivoidaan markkina-arvo sisäisen koron suhteen:

$$(4\text{-}2) \quad \frac{dP}{dy} = \sum_{t=1}^{n} \frac{-C_t * t}{(1+y)^{t+1}} - \frac{A * n}{(1+y)^{n+1}}$$

Kerrotaan molemmat puolet tekijällä (1 + y):

$$(4\text{-}3) \quad (1+y) * \frac{dP}{dy} = -\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t * t}{(1+y)^{t}} + \frac{A * n}{(1+y)^{n}} \right]$$

Verrataan tulosta Macaulay-duraation kaavaan (3-3):

$$(4\text{-}4) \quad D = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t * t}{(1+y)^{t}} + \frac{A * n}{(1+y)^{n}}}{\underbrace{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+y)^{t}} + \frac{A}{(1+y)^{n}}}_{<-- \; P}}$$

Kaavan (4-4) osoittaja löytyy myös yhtälön (4-3) oikean puolen hakasulkujen sisältä. Kun kaavan (4-4) nimittäjässä on vain velkakirjan markkina-arvo P, hakasulkujen sisältö kaavassa (4-3) on D * P. Siis:

$$(4\text{-}5) \quad (1+y) * \frac{dP}{dy} = -D * P$$

Tietyn diskonttokoron muutoksen aiheuttamaa suhteellista arvonmuutosta kutsutaan velkakirjan modifioiduksi duraatioksi (kun dy = 1 %). Seuraava yhtälö kertoo Macaulay-duraation ja modifioidun duraation suhteen:

$$(4\text{-}6)\quad \frac{dP}{P} = \frac{-D * dy}{1 + y} = -D_{mod} * dy$$

$$\Leftrightarrow D_{mod} = \frac{D}{1 + y} = - \frac{dP}{P} * \frac{1}{dy}$$

jossa P = velkakirjan markkina-arvo
y = sisäinen korko
D = Macaulay-duraatio
D_{mod} = modifioitu duraatio.

Edelliset laskelmat perustuivat oletukseen vuoden pituisesta koronkorko-jaksosta (f = 1). Yleisemmin Macaulay-duraation ja modifioidun duraation suhde riippuu koronkorko-jakson pituudesta seuraavasti:

$$(4\text{-}7)\quad D_{mod} = D / (1 + y / f)$$

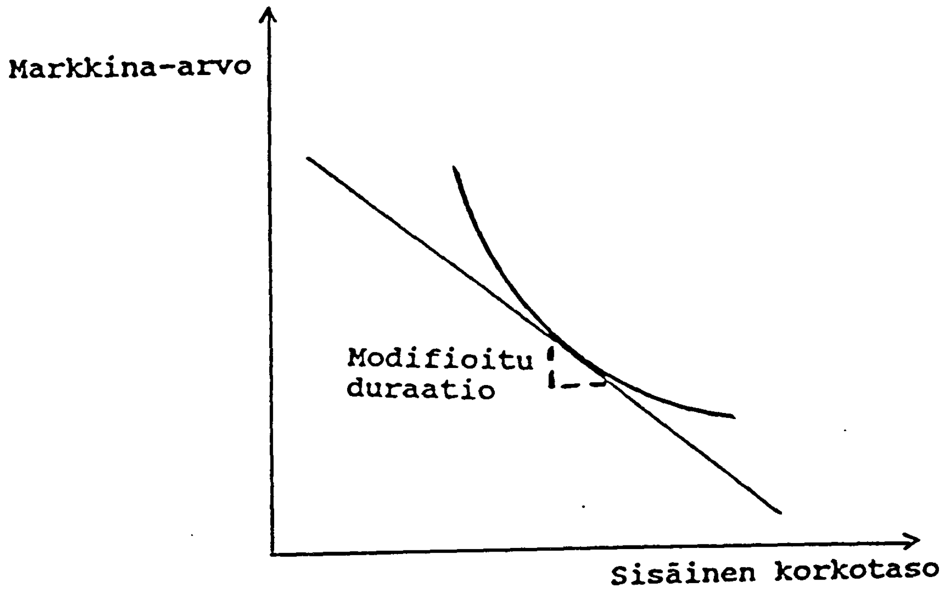
jossa D_{mod} = modifioitu duraatio
D = Macaulay-duraatio
y = sisäinen korko
f = vuotuinen koronmaksufrekvenssi

Jatkuva-aikaisen koron korolle laskemisen tapauksessa $f \to \infty$ ja $D_{mod} = D$. Macaulay-duraatio mittaa tällöin itse velkakirjan arvon suhteellista korkoherkkyyttä. Kun siirrytään diskreetin ajan tarkasteluun, Macaulay-duraatiota on modifioitava ottamaan huomioon koronkorko-jakson pituuden vaikutus.

Kun juoksuaika, kuponki ja sisäinen korko vaikuttavat kaikki vaihtelevalla voimalla velkakirjan arvon korkoherkkyyteen, modifioitu duraatio on kätevä indeksiluku, joka yhdistää eri vaikutukset. Tietty diskonttokoron muutos aiheuttaa välittömästi sitä suuremman suhteellisen arvonmuutoksen, mitä suurempi velkakirjan modifioitu duraatio on.

Modifioitu duraatio on graafisesti tulkittavissa velkakirjan epälineaarisen markkina-arvo - sisäinen korko -käyrän lineaariseksi approksimaatioksi. Käyrän konveksisuudesta johtuu, että modifioitu duraatio - käyrän tangentti - approksimoi arvonmuutosta tarkasti vain, jos korot muuttuvat vähän.

Kuva 6.
Velkakirjan markkina-arvon ja sisäisen koron suhde sekä modifioitu duraatio.



Suojausstrategiassa pyritään poistamaan portfolion arvon herkkyys eri riskilähteiden muutoksille. Kun arvon herkkyys on nolla suhteessa kaikkiin riskilähteisiin, portfolio on täysin suojattu. Jos modifioitu duraatio on nolla, korkotason muutos ei vaikuta välittömästi sijoituksen arvoon. Sijoitus on täysin riskitön, jos oletusten mukainen korkoriski on ainoa epävarmuuden lähde.[2]

4.2 MACAULAY-DURAATIO JA IMMUNISAATIOSTRATEGIA

Fisher ja Weil (1971, s.415) määrittelivät immunisaation seuraavasti. Velkakirjasalkku on immunisoitu tietyllä suunnittelujaksolla, jos sen arvo jakson lopussa on - toteutuneista korkoliikkeistä riippumatta - ainakin yhtä suuri kuin sen arvo olisi ollut, jos korot olisivat

---

[2] Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b) s.125 - 126 ja Schaefer (1984) s. 42 - 43.

pysyneet vakaina koko suunnittelujakson ajan. Sijoitus on siis immunisoitu korkoriskiä vastaan, jos sijoituksen toteutunut tuotto tietyllä jaksolla on varmuudella vähintään yhtä suuri kuin odotettu tuotto sijoitusta tehtäessä.

Täydellinen immunisaatio edellyttää, että korkoriski on ainoa sijoitukseen kohdistuva epävarmuuden lähde. Siksi tarkastelu kohdistuu jälleen luottoriskittömiin kiinteäkorkoisiin velkakirjoihin, joiden maksusuorituksiin ei liity optioita. Tällöin velkakirjan nimellistuoton epävarmuus johtuu ainoastaan maksusuoritusten diskonttokorkojen odottamattomista muutoksista.

Diskonttokorkojen odottamaton muutos vaikuttaa välittömästi velkakirjan markkina-arvoon. Toisaalta suunnittelujakson aikana maksettavien suoritusten odotettu jälleensijoituskorko muuttuu, vaikka sisäisen koron kaava olettaa, että kaikki jälleensijoitukset tehdään juuri sisäisellä korolla. Korkoriski jakautuu vastaavasti (1) hintariskiin ja (2) jälleensijoitusriskiin.

Nollakuponkilainojen tarkastelu havainnollistaa korkoriskin ja suunnittelujakson suhdetta. Juuri suunnittelujakson päättyessä erääntyvään nollakuponkilainaan ei liity lainkaan korkoriskiä. Laina maksetaan eräpäivänään takaisin nimellisarvoisena, joten siihen ei liity hintariskiä. Toisaalta nollakuponkilainalla ei ole maksusuorituksia ennen eräpäivää, joten siihen ei liity jälleensijoitusriskiä, vaikka markkinakorot muuttuisivat. Suunnittelujakson päättymisen jälkeen erääntyvän nollakuponkilainan ostaminen altistaa sijoittajan hintariskille: nollakuponkilaina voidaan joutua myymään markkinoilla niin alhaiseen hintaan, että odotettua tuottoa ei saavuteta. Ennen suunnittelujakson päättymistä erääntyvän nollakuponkilainan ostaminen altistaa sijoittajan puolestaan jälleensijoitusriskille: koron laskun vuoksi ei ehkä saavuteta jakson odotettua tuottoa.

Myös kuponkilainoihin liittyvän hintariskin ja jälleensijoitusriskin olemassaolo ja määrä riippuvat kunkin velkakirjan yksilöllisten piirteiden lisäksi suunnittelujakson pituudesta. Edellä nähtiin, että nollakuponkilainan tietyn jakson tuoton ja riskin arviointi on varsin suoraviivaista. Kuponkilainat ovat rakenteeltaan monimutkaisempia, minkä vuoksi on hyödyllistä, että ne voidaan tietyin oletuksin standardisoida oman duraationsa pituisiksi nollakuponkilainoiksi. Juuri kuponkilainasalkun duraatio on keskeisessä asemassa immunisaatiostrategiassa.

Hintariski ja jälleensijoitusriski vaikuttavat vastakkaisella tavalla velkakirjasijoituksen arvoon suunnittelujakson lopussa. Markkinakorkojen nousu laskee välittömästi velkakirjan markkina-arvoa mutta nostaa suunnittelujakson aikana maksettavien suoritusten odotettua jälleensijoituskorkoa. Vastaavasti markkinakorkojen lasku nostaa välittömästi velkakirjan markkina-arvoa mutta alentaa odotettua jälleensijoituskorkoa. Jollain hetkellä tulevaisuudessa nämä vaikutukset kumoavat täsmälleen toisensa.

Osoitan seuraavaksi, että tietyn koronmuutoksen erisuuntaiset hinta- ja jälleensijoitusvaikutukset ovat yhtä suuria velkakirjasalkun duraation pituisen jakson kuluttua. Kun portfolion duraatio on yhtä pitkä kuin sijoittajan suunnittelujakso, odottamattoman koronmuutoksen aiheuttama jälleensijoitusvaikutus ehtii juuri kompensoida saman koronmuutoksen aiheuttaman välittömän hintavaikutuksen suunnittelujakson loppuun mennessä.

Jos portfolio koostuu vain suunnittelujakson lopussa erääntyvistä nollakuponkilainoista, on selvää, ettei portfolioon kohdistu jälleensijoitusriskiä eikä hintariskiä. Kuponkilainasalkun tapauksessa ei ole yhtä ilmeistä, miksi jälleensijoitusvaikutus kumoaa hintavaikutuksen juuri duraatiopisteessä.

Tarkastellaan portfolion tulevaa arvoa W H vuotta pitkän suunnittelujakson päättyessä. W voidaan jakaa kahteen osaan: (1) H vuoden loppuun mennessä maksettujen kuponkien ja niiden jälleensijoitusten arvoon I ja (2) erääntymättömän velkakirjan markkina-arvoon H vuoden lopussa L. Siis $W = I + L$.

Kun tiedetään, että $dI / dy > 0$ ja $dL / dy < 0$, etsitään portfoliota, jossa paralleelin korkotason muutoksen erisuuntaiset vaikutukset kumoavat juuri toisensa ja $dW / dy = 0$.

Voidaan osoittaa[3], että portfolion tulevan arvon ja nykyarvon suhde on seuraava:

$$W = (1 + y)^H * P \tag{4-8}$$

jossa W = portfolion tuleva arvo H vuoden jälkeen
P = portfolion markkinahinta (nykyarvo)
y = sisäinen korko
H = suunnittelujakson pituus vuosissa

Derivoidaan tuleva arvo nykyisen sisäisen koron suhteen:

$$\frac{dW}{dy} = H * (1 + y)^{H-1} * P + (1 + y)^H * \frac{dP}{dy} \tag{4-9}$$

$$= (1 + y)^H * \left[\frac{dP}{dy} + \frac{H * P}{1 + y}\right]$$

Yhtälön (4-5) perusteella $dP / dy = -D * P / (1 + y)$, jossa D = Macaulay-duraatio, joten yhtälöä (4-9) voi muokata:

$$\frac{dW}{dy} = (1 + y)^H * \left[\frac{-D * P}{1 + y} + \frac{H * P}{1 + y}\right] \tag{4-10}$$

$$= P * (1 + y)^{H-1} * (H - D)$$

Yhtälöstä (4-10) näkee heti, että portfolion tuleva arvo ei riipu diskonttokorosta, kun sen duraatio on suunnittelujakson pituinen, eli $dW / dy = 0$, jos $D = H$.

---

[3] Dym - Garbade (1984).

Edellinen tarkastelu perustui lineaariseen approksimaatioon koronmuutoksen (epälineaarisesta) vaikutuksesta portfolion tulevaan arvoon. Jos otetaan huomioon myös toisen derivaatan vaikutus, paralleeli korkotason muutos saattaa tehdä suunnittelujakson tuotosta hieman paremman (mutta ei huonompaa) kuin ostohetkellä oli odotettu. Immunisaatioteoreeman[4] mukaan velkakirjasalkun tuotto ei voi koskaan laskea alemmaksi kuin odotettu tuotto velkakirjojen ostohetkellä, jos salkun duraatio asetetaan suunnittelujakson pituiseksi. Immunisaatio on siten maximin-strategia, joka tekee suunnittelujakson minimituotosta mahdollisimman korkean.

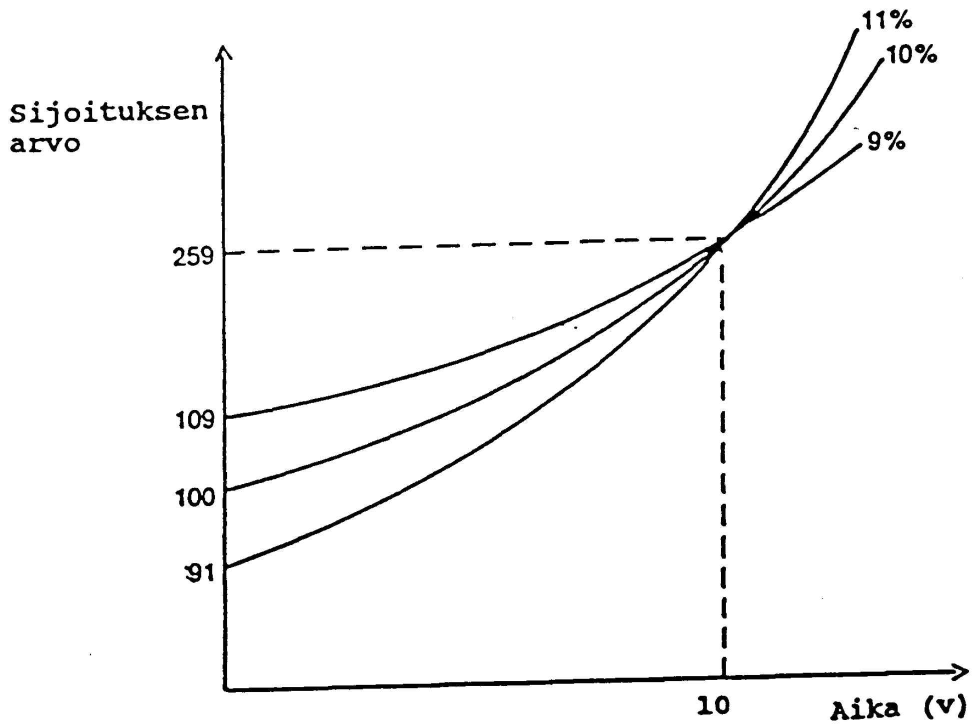
Hintavaikutuksen ja jälleensijoitusvaikutuksen suhteellinen merkitys riippuu siis suunnittelujakson pituudesta. Lyhyellä suunnittelujaksolla hintavaikutus dominoi: jälleensijoitukset eivät ehdi vaikuttaa. Keskipitkällä jaksolla molemmilla vaikutuksilla on merkitystä: jälleensijoitusvaikutus ehtii kompensoida hintavaikutusta duraatiopisteessä täsmälleen. Hyvin pitkällä suunnittelujaksolla (kun portfolion duraatio < jakson pituus) jälleensijoitusvaikutus dominoi. Duraatiota voi pitää tasapainopisteenä, jota lyhyemmällä suunnittelujaksolla odottamaton koronlasku parantaa tuottoa ja koronnousu huonontaa sitä. Jos suunnittelujakso on duraatiota pidempi, koronnousu parantaa tuottoa ja koronlasku huonontaa sitä.

Kuva 7 vahvistaa, että yhtäkkinen korkotason muutos ei vaikuta velkakirjan suunnittelujakson tuottoon, jos velkakirjan duraatio on tämän jakson pituinen. Velkakirjan arvo on H vuoden jälkeen on yhtä suuri, jos korkotaso nousee tai laskee välittömästi tietyn määrän ja pysyy sen jälkeen muuttumattomana, kuin jos korkorakenne pysyy muuttumattomana nykytasollaan.

---

[4] Fisher - Weil (1971, s.426 - 429) esittävät immunisaatioteoreeman matemaattisen todistuksen. Taustalla on oletus korkorakenteen additiivisista muutoksista.

Kuva 7.
Immunisaatio 10 vuoden suunnittelujaksolla.
Sijoituksen (duraatio 10 v.) arvon kasvu, jos korot pysyvät 10 %:ssa tai jos ne siirtyvät välittömästi 9 %:n tai 11 %:n tasolle ja pysyvät siellä.



Kuponkilainaportfoliolle edellä kuvattu immunisointi antaa vain väliaikaista suojaa korkoriskiä vastaan. Pysyvä suoja edellyttää ajoittain toistuvaa tasapainotusta, koska portfolion duraatio ja suunnittelujakson jäljellä oleva kesto lyhenevät eri vauhtia. Nollakuponkilainan immunisointi ei edellytä erityistoimia, koska sen duraatio lyhenee päivän päivässä aivan kuten suunnittelujakson pituus, mutta kuponkilainan duraatio lyhenee hitaammin.

Ajan kulumisen lisäksi markkinakorkotason muutokset vaikuttavat kuponkilainaportfolion duraatioon. Myös nämä vaikutukset on ajoittain tasapainotettava, jotta yhtäsuuruussuhde portfolion Macaulay-duraation ja suunnittelujakson jäljellä olevan keston välillä pysyy voimassa ja portfolion suunnittelujakson tuotto pysyy immuunina odottamattomille korkoliikkeille. Tässä mielessä immunisaatio on dynaaminen strategia.

Immunisaatiostrategiaa käyttävät pääasiassa sijoittajat, joilla on pitkäaikaisia velkapositioita. Yksittäisen velan juoksuaika määrää tällöin suunnittelujakson pituuden. Jos velkaerät erääntyvät eri aikoina, sijoittaja voi pyrkiä replikoimaan menovirrat tarkalleen eli ostamaan sijoituksia, jotka erääntyvät juuri velkojen maksupäivinä. Tällainen dedikaatiostrategia on kuitenkin työlästä ja usein mahdotontakin, minkä vuoksi immunisaatio toteutetaan yleensä duraation avulla. Sijoitussalkun duraatio asetetaan yhtä pitkäksi kuin velkasalkun duraatio, jolloin portfolion kokonaisduraatio on nolla ja korkotason muutokset muuttavat sijoitus- ja velkasalkkujen arvoja yhtä paljon.[5]

F. M. Redington osoitti jo vuonna 1952, että maksukykyinen rahoituslaitos (varojen nykyarvo $\geq$ velkojen nykyarvo) pysyy aina maksukykyisenä eli on immunisoitu paralleeleja korkotason muutoksia vastaan, kun sen varojen Macaulay-duraatio on yhtä suuri kuin sen velkojen Macaulay-duraatio. Tällöin ns. duraatiogap = 0. Jos rahoituslaitos pitää duraatioiden yhtäsuuruutta yllä ajoittaisilla tasapainotuksilla, sijoitussalkun nykyarvo seuraa velkasalkun nykyarvoa. Redington totesi myös, että useiden eriaikaisten velkaerien tapauksessa tarkka immunisaatio edellyttää duraatioiden yhtäsuuruuden lisäksi sitä, että varoista saatavat maksusuoritukset ovat ajallisesti ainakin yhtä hyvin hajaantuneita duraation ympärille kuin velkasuoritukset.[6]

---

[5] Immunisoidun salkun rakentaminen perustuu keskeisten riskiherkkyyksien replikointiin, aivan kuten nykyaikainen optioiden hinnoitteluteoria. Nelson - Schaefer (1983) s.62 ja Schaefer (1984) s.42 - 45.

[6] Bierwag (1987a) s.151 - 166 ja Redington (1952). Rahoituslaitoksen korkoriskin hallintaa varojen ja velkojen duraatiogapin avulla ovat käsitelleet mm. Rogers (1988) ja Toevs - Haney (1986).

Immunisaatiostrategialla voidaan siis pyrkiä varmistamaan tietyn suunnittelujakson nimellistuotto tai ylläpitämään jatkuvasti varojen ja velkojen korkoherkkyyksien yhtäsuuruutta (jolloin ei ole korkoriskiä välittömästi seuraavalla suunnittelujaksolla).

Nyt voidaan analysoida, mistä tekijöistä velkakirjan korkoriski riippuu. Velkakirjan duraatio riippuu sen maksusuoritusvirran rakenteesta ja korkojen stokastisesta prosessista. Tietyn duraation korkoriski voi olla hyvin erilainen sijoittajille, joilla on eripituiset suunnittelujaksot. Onhan ilmeistä, että kymmenen vuoden kuluttua erääntyvä nollakuponkilaina on varsin riskillinen sijoitus pankille, jolla on lyhyt suunnittelujakso. Sama sijoitus voi olla täysin riskitön eläkerahastolle, jolla on luonnollisesti vastaavanpituinen velkapositio.

Ajatus sijoittajien luonnollisista suunnittelujaksoista on selvästi sukua korkorakennetta selittävälle preferred habitat -hypoteesille. Suunnittelujakso on ongelmallinen käsite, koska se on yksiselitteinen vain, jos sijoitettavien varojen ainoa tarkoitus on tietyllä hetkellä tulevaisuudessa erääntyvän velkaerän maksaminen. Käytännössä näin ei yleensä ole. Mutta jos sijoittajalla on tunnettuja eripituisia velkoja, näiden keskimääräinen duraatio saattaa olla luonteva suunnittelujakson pituus. Vaikka velkoja ei olisikaan, sijoittaja voi valita jonkin ajanjakson - esimerkiksi tuloksenmittausjakson - jonka tuoton epävarmuutta hän haluaa minimoida. Hän voi myös tehdä oletuksia (tai subjektiivisilla todennäköisyyksillä painotettuja skenaarioita) tulevista käteistarpeistaan ja laskea sitten odotusarvojen perusteella suunnittelujaksonsa (tai useiden jaksojen) pituuden.[7]

Sijoittajan kohtaama korkoriski RR on hänen suunnittelujaksonsa pituuden H, velkakirjan maksusuoritusvirran luonteenpiirteiden CFC ja korkoliikkeiden stokastisen prosessin SP funktio eli RR = f(H, CFC, SP). Sijoittajan

[7] Toevs (1986a) s.53 - 57.

subjektiivisesta riskinkarttamisen asteesta riippuu, miten hän suhtautuu kohtaamaansa korkoriskiin.[8] Lähes kaikkia stokastisia prosesseja vastaa jokin duraatiomittari D. Macaulay-duraation taustaoletuksena on siis stokastinen prosessi, jossa horisontaalinen korkorakenne siirtyy paralleelisti. Todellista korkorakennetta ohjaavaa stokastista prosessia ei tiedetä, vaan se täytyy arvioida.[9] Jos oletus stokastisesta prosessista on oikea, $RR = f(H, D)$ siten että $RR > 0$, kun $H > D$ tai kun $H < D$. Vain kun $H = D$, $RR = 0$.

Jos sijoittaja tekee virheellisen oletuksen stokastisesta prosessista, hänen portfolionsa duraatio poikkeaa siitä oikeasta duraatiosta, joka olisi immunisoinut portfolion. Sitä mahdollisuutta, että virheellinen oletus stokastisesta prosessista johtaa odotettua tuottoa alhaisempaan toteutuneeseen tuottoon suunnittelujaksolla, kutsutaan stokastisen prosessin riskiksi.

Koska suunnittelujakson lopussa erääntyvään nollakuponkilainaan ei liity edes stokastisen prosessin riskiä, tätä riskiä voi minimoida pyrkimällä jäljittelemään nollakuponkilainan rakennetta mahdollisimman hyvin. Käytännössä tämä tarkoittaa sellaisten velkakirjojen ostamista, joiden maksusuoritukset tapahtuvat mahdollisimman lähellä suunnittelujakson loppua, tai velkasalkun immunisoinnin tapauksessa sellaisen sijoitussalkun hankkimista, jonka maksusuoritusrakenne muistuttaa mahdollisimman paljon velkasalkun rakennetta.

Fong - Vasicek (1983) ovat käyttäneet hajanaisuuden (M^2) käsitettä stokastisen prosessin riskin mittarina. He tarkastelivat ei-paralleelin korkorakenteen muutoksen vaikutusta sellaisen portfolion arvoon, joka on immunisoitu paralleeleilta korkotason muutoksilta. Immunisoidun portfolion arvon suhteellista muutosta kuvaa tällöin

---

[8] Tästä tarkemmin luvussa 4.3.

[9] Bierwag - Kaufman - Toevs (1983a) s.21 - 23 ja Bierwag - Kaufman - Toevs (1983e). Ks. lukua 2.2.2.

yhtälö, jossa M^2 on Taylorin sarjan laajennuksen toisen tekijän kerroin:

$$(4\text{-}11) \quad \frac{dW_H}{W_H} = -M^2 * ds$$

jossa M^2 on maksusuoritusten hajanaisuuden mittari, W_H on immunisoidun portfolion tavoitearvo suunnittelujakson lopussa ja dW_H on portfolion arvon muutos, jonka tietynlainen korkorakenteen muodon muutos ds aiheuttaa.

Yksittäisen velkakirjan hajanaisuus lasketaan seuraavasti:

$$(4\text{-}12) \quad M^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i - D)^2 * PV(CF_i)}{PV(CF_i)}$$

jossa t_i on maksusuorituksen i juoksuaika, $PV(CF_i)$ sen nykyarvo ja D = velkakirjan duraatio.

Kun velkakirjan duraatio on sen maksusuoritusten juoksuaikojen painotettu keskiarvo, velkakirjan hajanaisuus (M^2) on sen maksusuoritusten ajankohtien painotettu keskimääräinen poikkeama duraatiopisteestä. Immunisoidun portfolion hajanaisuus on sijoitussalkun ja velkasalkun hajanaisuuksien erotus ja juuri sitä Fong ja Vasicek käyttivät stokastisen prosessin riskin mittarina. Hajanaisuus on nolla jos ja vain jos sijoitussalkun maksusuoritukset vastaavat ajoitukseltaan ja suuruudeltaan tarkalleen velkasalkun maksusuorituksia.[10]

Jo Redington totesi, että eriaikaisten velkaerien immunisaatio edellyttää sijoitussalkun maksusuoritusten ajankohtien olevan ainakin yhtä hyvin hajaantuneita kuin velkojen maksuajankohdat. Fongin ja Vasicekin kehittämää hajanaisuuden mittaria voi käyttää usean jakson immunisaation ehtojen muotoilussa:

(i) $PV_A \geq PV_L$

(ii) $D_A = D_L$

(iii) $M^2{}_A \geq M^2{}_L$

---

[10] Fong - Vasicek (1983) s.229 - 233 ja Fong - Fabozzi (1985) s.132 - 142.

jossa PV_A ja PV_L ovat varojen ja velkojen (sijoitussalkun ja velkasalkun) nykyarvot, D_A ja D_L varojen ja velkojen duraatiot ja $M^2{}_A$ ja $M^2{}_L$ varojen ja velkojen hajanaisuudet.[11]

Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b, s.122) ovat korostaneet, että vaikka stokastisen prosessin riski poistuu kun $M^2 = 0$, riskin minimointi nollaa suuremmalla tasolla edellyttää yhä jonkin oletuksen tekemistä korkorakenteen stokastisesta prosessista. Jos oletus stokastisesta prosessista on virheellinen, hajanaisuuden minimointi ei välttämättä minimoi stokastisen prosessin riskiä.

Fong - Vasicekin lähestymistapa havainnollistaa kuitenkin tapaa, jolla perinteistä immunisaatiota voi yleistää soveltumaan korkorakenteen erilaisiin muutoksiin. Varojen ja velkojen duraatioiden asettaminen yhtä suuriksi suojaa vain korkorakenteen paralleeleja muutoksia vastaan. Korkeamman asteen immunisaatio vähentää korkorakenteen ei-paralleeleista muutoksista johtuvaa riskiä vaatimalla sijoitussalkun maksuajankohtien parempaa synkronisoimista velkasalkun maksuajankohtien kanssa. Ääritapauksessa (dedikaatiostrategia) maksuajankohdat on synkronisoitu täydellisesti, sijoittajalla ei ole stokastisen prosessin riskiä, mutta ei myöskään vapausasteita sijoitussalkun valinnassa.[12]

4.3 OPTIMAALINEN DURAATIOVALINTA

Immunisaatiostrategialla hankitaan vain riskitön tuotto. Jos sijoittaja ei ole täydellinen riskinkarttaja ja hänen odotuksensa tulevasta korkokehityksestä poikkeavat markkinoiden odotuksista, hän voi yrittää parantaa tuottoaan aktiivisella sijoitusstrategialla. Tässä luvussa tarkastellaan velkakirjasijoittajan duraatiovalintaa

---

[11] Christensen - Fabozzi (1987) s. 681 ja 697.

[12] Garbade (1985b). Ks. tarkemmin lukua 6.5.

keskiarvovarianssi-kehikossa.[13] Ensin esitellään odotetun tuoton ja riskin laskutavat; sitten johdetaan tehokkaiden portfolioiden ura ja sijoittajan hyötyfunktio; lopuksi kuvataan sijoittajan odotetun hyödyn maksimointiongelmaa.

Velkakirjaportfolion odotettu tuotto ja riski riippuvat
(1) portfolion rakenteesta, jota kuvaa tässä sen duraatio
(2) korkoliikkeitä ohjaavasta stokastisesta prosessista
(3) sijoittajan suunnittelujaksosta ja
(4) sijoittajan korko-odotuksista markkinoiden odotuksiin verrattuna (todennäköisyysjakauman muodossa ilmaistuna).

Seuraavassa tarkastelussa jätetään yksinkertaisuuden vuoksi huomiotta tekijöihin (2) ja (4) liittyvät epävarmuudet eli oletetaan sijoittajan arvioivan oikein korkoliikkeitä ohjaavan stokastisen prosessin ja korkomuutosten todennäköisyydet. Tällöin portfolion odotettu tuotto E(B) ja riski S(B) voidaan esittää ainoastaan portfolion duraation D_B ja suunnittelujakson pituuden H funktioina: $E(B) = E(D_B, H)$ ja $S(B) = S(D_B, H)$.

Suunnittelujakson tuotto voidaan varmistaa asettamalla portfolion duraatio suunnittelujakson pituiseksi (immunisaatio). Mitä enemmän duraatio poikkeaa suunnittelujakson pituudesta, sitä enemmän toteutuva tuotto voi poiketa varmasta tuotosta ja sitä suurempi on korkoriski.[14]

Tehokkaiden portfolioiden riski-tuottoura ei ole yleinen vaan riippuu suunnittelujakson pituudesta ja sijoittajan subjektiivisista korko-odotuksista. Suunnittelujakson pituus määrää riskittömän sijoitusvaihtoehdon. Sijoittaja määrittelee korko-odotuksensa todennäköisyysjakauman muodossa. Jos sijoittaja uskoo korkotason laskevan suunnittelujaksolla enemmän kuin markkinakorot implikoivat, suunnittelujaksoa pidemmät duraatiot ovat tehok-

---

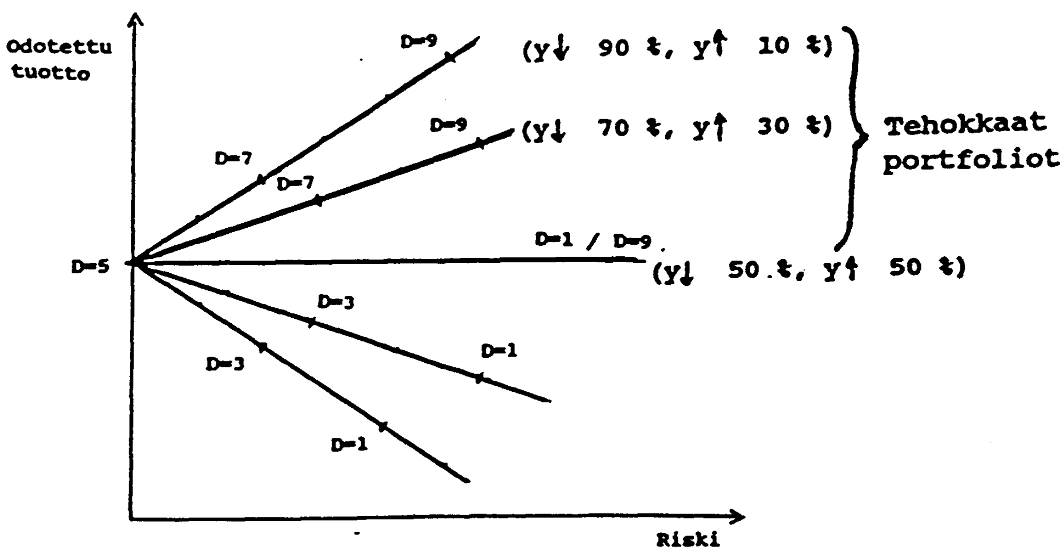
[13] Duraatioanalyysin ja portfolioteorian suhdetta käsitellään laajemmin 5. luvussa.

[14] Bierwag (1987a, s.118 - 119) esittää täsmällisemmin, miten portfolion odotettu tuotto ja sen varianssi lasketaan yksinkertaisen todennäköisyysjakauman tapauksessa.

kaiden portfolion uralla. Jos taas sijoittaja uskoo korkotason nousevan suunnittelujaksolla enemmän kuin markkinakorot implikoivat, suunnittelujaksoa lyhyemmät duraatiot ovat tehokkaiden portfolioiden uralla.

Kuvassa 8 on kaksi vaihtoehtoista tehokkaiden portfolioiden uraa, jotka perustuvat laskeviin korko-odotuksiin (todennäköisyyksillä 90 % ja 70 %) sekä yksi neutraaleihin korko-odotuksiin perustuva ura (koron laskun todennäköisyys 50 %). Mitä varmempi sijoittaja on markkinaodotuksista poikkeavan korkonäkemyksensä oikeellisuudesta, sitä suosiollisempi on tuotto-riskisuhde eli sitä jyrkempi on suoran kulmakerroin. Siis mitä suurempi todennäköisyys odotuksille asetetaan, sitä pienempi on riski kullakin tuottotasolla. Suunnittelujakson (viisi vuotta) pituinen duraatio on riskitön. Laskevilla korko-odotuksilla viittä vuotta lyhyemmät duraatiot eivät ole tehokkaita, koska riskin kasvattaminen pienentää odotettua tuottoa.

Kuva 8.
Tehokkaiden portfolioiden (duraatioiden) ura laskevilla ja neutraaleilla korko-odotuksilla, kun suunnittelujakso on 5 vuotta.



Keskiarvovarianssianalyysissa oletetaan, että sijoittajan hyötyfunktiota U kuvaa riittävästi portfolion odotettu tuotto E(R) ja tuoton varianssi $\sigma^2(R)$.

(4-13) $U = U\,[E(R),\ \sigma^2(R)]$

Sijoittajan oletetaan käyttäytyvän rationaalisesti: hän valitsee kullakin riskitasolla korkeimman odotetun tuoton tarjoavan portfolion. Optimaalinen duraatiovalinta riippuu tällöin sijoittajan riskinkarttamisen asteesta.

Riskineutraali tai riskiä rakastava sijoittaja valitsee mahdollisimman pitkän duraation, jos hän odottaa korkojen laskevan; näin hän maksimoi odotetun tuoton. Mitä suurempi on sijoittajan riskinkarttamisen aste, sitä todennäköisemmin hän valitsee immunisaatiostrategian, ellei hänellä ole erityisen voimakkaita korko-odotuksia. Muidenkin sijoittajien duraatiovalinta riippuu heidän riski-indifferenssikäyriensä muodosta. Optimaalisen duraation tasolla riski-indifferenssikäyrällä ja tehokkaiden portfolioiden uralla on samat kulmakertoimet.

Aktiivisen lähestymistavan onnistuminen edellyttää, että sijoittaja pystyy ennustamaan korkoliikkeitä paremmin kuin markkinat keskimäärin, mikä on ristiriidassa tehokkaiden markkinoiden hypoteesin kanssa.[15] Ellei sijoittajalla ole markkinoista poikkeavaa korkonäkemystä tai ellei hän luota omiin ennusteisiinsa, aktiivinen riskinotto ei kasvata odotettua tuottoa lainkaan: tehokkaiden portfolioiden ura on horisontaalinen. Immunisaatio on tällöin luonnollinen strategia.

Jos sijoittajan luottamus omien korkoennusteidensa osuvuuteen heikkenee, tehokkaiden portfolioiden ura loivenee. Jos sijoittajan riskinkarttamisen aste kasvaa, hänen riski-indifferenssikäyränsä puolestaan jyrkkenee.

---

[15] Tehokkaiden markkinoiden hypoteesista tarkemmin ks. esim. Fuller - Farrell (1987) s.97 - 99. Yhdysvaltain velkakirjamarkkinoiden tehokkuudesta ks. mts. 432.

Molemmissa tapauksissa optimaalinen duraatio siirtyy lähemmäksi suunnittelujakson pituutta.

Tässä luvussa esitetty lähestymistapa perustuu selvästi portfolioteorian välineisiin, mutta on huomattava, että tehokkaiden portfolioiden ura riippuu tässä subjektiivisista korko-odotuksista, eikä siksi ole kaikille sijoittajille yhteinen. Tärkeämpi ero CAP-malliin on siinä, että riskitön sijoituskohde riippuu suunnittelujakson pituudesta.[16]

Duraatio on tärkeä apuväline myös muissa velkakirjasijoittamisen strategioissa, kuten suojauksessa, indeksoinnissa, portfoliovakuutuksessa sekä ehdollisessa immunisaatiossa.[17]

4.4 VAIHTUVAKORKOISEN VELKAKIRJAN DURAATIO

Vaihtuvakorkoinen laina poikkeaa kiinteäkorkoisesta lainasta sikäli, että maksettavaa kuponkikorkoa sopeutetaan markkinakorkojen liikkeiden mukaan. Kuponkikorko on yleensä sidottu johonkin markkinoiden yleiseen indeksikorkoon.

Vaihtuvakorkoiselle velkakirjalle ei voi laskea suoraan Macaulay-duraatiota, koska sen maksusuoritukset eivät ole etukäteen tunnettuja. Täydellisillä markkinoilla vaihtuvakorkoiset velkakirjat olisivat tarpeettomia, koska ne vastaavat täysin lyhyiden sijoitusten "rollaus"-strategiaa. Pitkienkin vaihtuvakorkoisten lainojen hintariski on näin ollen pieni - ja jälleensijoitusriski suuri, jos suunnittelujakso on pitkä.

Jos vaihtuvakorkoisen lainan kuponkia sopeutetaan jatkuvasti, hintariskiä ei ole lainkaan: duraatio on nolla.

---

[16] Bierwag (1987a) s.117 - 133 ja Bierwag - Kaufman - Toevs (1983a) s.23 - 26.

[17] Duraation käytöstä näissä strategioissa ks. tarkemmin Vanhanen (1988).

Käytännössä sopeutus tehdään jaksoittain, esimerkiksi kerran kolmessa tai kuudessa kuukaudessa. Vaihtuvakorkoisen lainan duraatiota voi approksimoida melko hyvin kupongintarkistusjakson pituudella; sehän kertoo, miten pitkäksi ajaksi kerrallaan varallisuus sidotaan kiinteälle korolle.

Chance - Morgan (1988) ovat johtaneet vaihtuvakorkoisen lainan duraation seuraavasti. Tekemällä oletuksia korkojen tulevasta kehityksestä[18] he laskivat kuponkimaksujen juoksuajan painotetun keskiarvon. Tämä luku olisi vaihtuvakorkoisen lainan kanssa yhtä aikaa erääntyvän kiinteäkorkoisen lainan Macaulay-duraatio, joten siitä täytyy vähentää tulevien korkomuutosten vaikutusta tuleviin kuponkivirtoihin heijastava tekijä. Tekijä riippuu suoraan kupongintarkistusjakson pituudesta. Duraation täsmällinen laskukaava vaihtelee vaihtuvakorkoisten lainojen erilaisten sopimusehtojen mukaan. Tyypillisen vaihtuvakorkoisen lainan duraatio on hieman pidempi kuin tarkistusjakso (koska ensimmäisen jakson korko on täysin kiinteä), mutta selvästi lyhyempi kuin vastaavan kiinteäkorkoisen lainan duraatio.

Landskroner - Ruthenbergin (1988) ratkaisutapa muistuttaa edellistä. Koska markkinakorkojen muutos vaikuttaa sekä vaihtuvakorkoisen lainan diskonttokorkoon että sen kuponkikorkoon, Landskroner - Ruthenberg laskevat lainan markkina-arvon joustot sekä diskonttokoron että kuponkikoron suhteen. Nämä joustot ovat erimerkkisiä, joten arvon korkoherkkyys on pienempi kuin vastaavan kiinteäkorkoisen lainan.

Vaihtuvakorkoisen lainan nettoduraatio on tällöin:

(4-14) $D_N = D_y + q * D_c$

jossa D_N = lainan nettoduraatio
D_y = lainan markkina-arvon jousto (modifiotu duraatio) oman diskonttokorkonsa suhteen

---

[18] Oletuksena voi käyttää markkinakorkorakenteen implikoimaa ennustetta.

D_C = lainan markkina-arvon jousto oman kuponkikorkonsa suhteen
q = kuponkikoron ja diskonttokoron ristikkäisjousto

Morgan (1986) on esittänyt yleisemmän ratkaisun vaihtuvakorkoisen lainan duraatiolle, joka ottaa huomioon kupongintarkistusjakson pituuden lisäksi muut sopimusehdot, kuten korkomarginaalin indeksikorkoon nähden ja käytetyn oletuksen korkojen stokastisesta prosessista. Erikoisten sopimusehtojen tapauksessa vaihtuvakorkoisen lainan (modifioitu) duraatio voi olla jopa negatiivinen.

Edellä käsiteltiin yleisen korkotason muutoksen vaikutusta vaihtuvakorkoisen lainan arvoon. Toisaalta jos yleinen käsitys lainanottajan luottokelpoisuudesta muuttuu ja markkinoiden vaatima korkomarginaali yli indeksikoron kasvaa, hintavaikutus on sitä suurempi, mitä pidempi velkakirjan juoksuaika on. Tarvitaan kahden faktorin mallia ottamaan huomioon vaihtuvakorkoisen lainan arvon herkkyys sekä yleisen korkotason että korkomarginaalin muutoksille.[19]

Duraatioanalyysi soveltuu parhaiten sellaisten lainojen tarkasteluun, joilla on kiinteä kuponkikorko ja kiinteä juoksuaika. Vaihtuvakorkoisten lainojen duraation arviointi on selvästi vaikeampaa, ja jos vaihtuvakorkoisella lainalla ei ole edes kiinteää juoksuaikaa, duraatioanalyysi on lähes käyttökelvoton. Avistatalletus lienee hyvä esimerkki. Talletus voidaan nostaa vaadittaessa, joten sen duraatiota voi pitää hyvin lyhyenä. Toisaalta pankki voi tarkastella talletuskantaa kokonaisuutena ja pitää sen duraatiota hyvin pitkänä, koska yli ajan se on yleensä vakaa. Avistatalletuksen juoksuaikaa ei siten kannata juuri laskea, vaan lienee parempi tarkastella talletusta vaihtuvakorkoisena lainana, jonka korkoherkkyys riippuu korontarkistusjakson odotetusta pituudesta. Pituuden arviointi on kuitenkin vaikeaa, varsinkin jos indeksikorko määräytyy hallinnollisesti. Lisäksi tämä lähestymistapa ei

19 Kopprasch (1987) s.118.

ota lainkaan huomioon mahdollisia muutoksia tallettajien käyttäytymisessä, vaikka näillä on jatkuva talletuksen takaisinmyyntioptio.

4.5 JOHDANNAISINSTRUMENTTIEN DURAATIOT

Duraatioanalyysia voi käyttää myös laskettaessa johdannaisinstrumenttien vaikutusta portfolion korkoriskiin. Korkofutuuri- ja korko-optiosopimuksille ei voi laskea Macaulay-duraatiota, koska niiden maksusuoritukset eivät ole etukäteen tunnettuja. On kuitenkin mahdollista mitata tietyn korkotason muutoksen vaikutus korkofutuuri- tai korko-optioposition arvoon, ja tätä kautta laskea sopimusten modifioidut duraatiot.

Korkotason yhden prosenttiyksikön muutoksen rahallista vaikutusta minkä tahansa velkakirjaposition arvoon approksimoidaan position raha-arvon ja modifioidun duraation tulolla. Raha-arvon ja modifioidun duraation tuloa kutsutaan position absoluuttiseksi korkoherkkyydeksi.[20]

$$D_B = \frac{\partial P_B}{\partial y} * \frac{1}{P_B} \Rightarrow \frac{\partial P_B}{\partial y} = P_B * D_B \qquad (4\text{-}15)$$

jossa D_B = velkakirjaposition modifioitu duraatio
P_B = velkakirjaposition markkina-arvo
∂y = diskonttokoron muutos (yksi %-yksikkö)
$\partial P_B/\partial y$ = position absoluuttinen korkoherkkyys

Futuurisopimuksen duraatio johdetaan yhtälössä (4-16) asettamalla sen absoluuttinen korkoherkkyys yhtä suureksi kuin kohde-etuuden (vastaavan käteisvelkakirjaposition) absoluuttinen korkoherkkyys.

[20] Vrt. yhtälöön (4-5). Tässä tarkastellaan vaikutuksen suuruutta eikä suuntaa, joten etumerkkiä ei muuteta.

$$(4\text{-}16)\quad P_f * D_f = P_k * D_k * (1 + y) / CF$$

$$\Leftrightarrow\quad D_f = \frac{P_k}{P_f} * \frac{1+y}{CF} * D_k$$

jossa P_f = korkofutuurisopimuksen markkina-arvo
D_f = korkofutuurin modifioitu duraatio
P_k = kohde-etuuden markkina-arvo
D_k = kohde-etuuden modifioitu duraatio
CF = konversiotekijä, joka suhteuttaa kohde-etuuden ja korkofutuurin markkinahinnat
y = lainauskorko toimituspäivään asti[21]

Myös optioposition korkoherkkyys lasketaan kohde-etuuden korkoherkkyyden kautta, kun deltakerroin HR on option hinnan osittaisderivaatta kohde-etuuden hinnan suhteen eli HR = $\partial P_o/\partial P_k$.

Suojakertoimen ja yhtälön (4-15) avulla korko-option duraatio voidaan esittää seuraavasti:[22]

$$(4\text{-}17)\quad \frac{\partial P_o}{\partial y} = \frac{\partial P_o}{\partial P_k} * \frac{\partial Pk}{\partial y} \quad \Rightarrow P_o * D_o = HR * P_k * D_k$$

$$\Rightarrow\quad D_o = HR * \frac{P_k}{P_o} * D_k$$

jossa D_o = korko-optiosopimuksen modifioitu duraatio
HR = suojakerroin, $\partial P_o/\partial P_k$
P_k = kohde-etuuden markkina-arvo
P_o = korko-optiosopimuksen markkina-arvo
D_k = kohde-etuuden modifioitu duraatio

Toevs - Jacob (1986) ja Vanhanen (1988) ovat käsitelleet laajemmin korkofutuurien ja -optioiden käyttöä korkoriskin hallinnassa.

---

21 Tekijä (1 + y) liittyy rahan aika-arvoon, koska kohde-etuus täytyy maksaa heti ja futuuri vasta toimituspäivänä.

22 Schaefer (1984) s.56.

5 DURAATIOANALYYSIN SUHDE PORTFOLIOTEORIAAN

5.1 PORTFOLIOTEORIAN PERUSTEITA

Rahoitusalan kirjallisuuden valtavirta, portfolioteoria, tarkastelee sijoittamiseen liittyviä kysymyksiä keskiarvovarianssianalyysin avulla ja keskittyy pääasiassa osakesijoittamiseen. Kiinteäkorkoisia velkakirjasijoituksia käsittelevä tutkimus on ottanut toisen suunnan: se tarkastelee sijoitusten odotettua tuottoa ja riskiä korkorakenneteorian ja duraatioanalyysin avulla. Tässä luvussa esitellään aluksi portfolioteorian perusajatuksia (5.1), sitten selvitetään tutkimussuuntien ja -tapojen eriytymisen syitä: keskiarvovarianssianalyysin soveltumattomuutta velkakirjojen tarkasteluun (5.2) ja lopuksi käsitellään yhtymäkohtia duraatioanalyysin ja keskiarvovarianssianalyysin välillä (5.3).

Portfolioteoria kuvaa sijoittajan optimaalista portfolion valintaa epävarmassa maailmassa tiettyjen rajoittavien oletusten vallitessa. Portfolioteoriassa tukeudutaan usein keskiarvovarianssimalliin: riskiä karttava sijoittaja maksimoi odotettua hyötyään, joka on vain odotetun tuoton ja tuoton odotetun varianssin funktio.[1]

Yksittäisen arvopaperin odotettu tuotto ja riski, portfolion odotettu tuotto ja riski sekä kahden arvopaperin tuottojen välinen korrelaatio esitetään seuraavasti:

$$(5\text{-}1) \quad E(R_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j * R_{ij}$$

$$(5\text{-}2) \quad \sigma^2(R_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j * [R_{ij} - E(R_i)]^2$$

[1] Nämä tunnusluvut riittävät kuvaamaan sijoittajan odotettua hyötyä (loppuvarallisuuden jakaumaa) vain, jos sijoittajan hyötyfunktio on kvadraattinen tai jos tuotot jakautuvat normaalisti. (Copeland - Weston 1988, s.153.)

joissa $E(R_i)$ = arvopaperin i odotettu tuotto
p_j = skenaarion j todennäköisyys s.e. $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$
R_{ij} = arvopaperin i tuotto skenaariossa j
$\sigma^2(R_i)$ = arvopaperin i tuoton odotettu varianssi

$$(5\text{-}3) \quad E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i * E(R_i)$$

$$(5\text{-}4) \quad \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * \sigma^2(R_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i * x_j * \mathrm{cov}(R_i, R_j)$$

$$(5\text{-}5) \quad \delta(R_i, R_j) = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_j)}{\sigma^2(R_i) * \sigma^2(R_j)}$$

joissa $E(R_p)$ = portfolion odotettu tuotto
x_i ja x_j = arvopaperien i ja j osuudet portfoliosta
$E(R_i)$ = arvopaperin i odotettu tuotto
$\sigma^2(R_p)$ = portfolion tuoton odotettu varianssi
$\sigma^2(R_i)$ = arvopaperin i tuoton odotettu varianssi
$\sigma^2(R_j)$ = arvopaperin j tuoton odotettu varianssi
$\mathrm{cov}(R_i, R_j)$ = arvopaperien i ja j kovarianssi
$= E\{[R_i - E(R_i)] * [R_j - E(R_j)]\}$
$\delta(R_i, R_j)$ = arvopaperien i ja j tuottojen välinen korrelaatio

Kun jokaisen arvopaperin odotettu tuotto, tuoton odotettu varianssi ja korrelaatio jokaisen muun arvopaperin kanssa tunnetaan, voidaan johtaa tehokkaiden portfolioiden ura, jolla ovat kullakin riskitasolla korkeimman odotetun tuoton antavat yhdistelmät.

Capital Asset Pricing Model (CAPM) kuvaa arvopaperien hintojen määräytymistä markkinatasapainossa. Jos CAP-mallin taustaoletukset ovat voimassa, riskittömän sijoituskohteen olemassaolo johtaa siihen, että vain yksi riskillisten arvopaperien yhdistelmä on tehokas. Markkinatasapainossa tämä yhdistelmä, ns. markkinasalkku, sisältää kaikki riskilliset arvopaperit niiden arvojen markkinaosuuksia vastaavassa suhteessa. Jokainen rationaalinen sijoittaja omistaa vain riskitöntä sijoituskohdetta ja riskillistä markkinasalkkua; näiden optimaalinen yhdistelmä riippuu sijoittajan riskipreferensseistä.[2]

Kuten tunnettua, CAP-mallissa arvopaperin tai arvopaperisalkun riski voidaan jakaa systemaattiseen markkinariskiin ja epäsystemaattiseen uniikkiin riskiin. Epäsystemaattisen riskin voi hajauttaa pois, joten markkinat eivät palkitse sen hyväksymistä. Systemaattista riskiä ei voi hajauttaa pois, minkä vuoksi sen hyväksymisestä tulee saada korvauksena korkeampi odotettu tuotto.

Betakerroin on systemaattisen riskin mittari ja se kertoo, miten arvopaperin tuotto vaihtelee yhdessä markkinasalkun kanssa.

$$(5\text{-}6) \quad B_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

jossa B_i = arvopaperin tai portfolion i betakerroin
$cov(R_i, R_m)$ = arvopaperin tai portfolion i kovarianssi markkinasalkun m kanssa
$\sigma^2(R_m)$ = markkinasalkun m tuoton varianssi

Sharpen esittämässä yhden indeksin CAP-mallissa jokaisen arvopaperin odotettu tuotto riippuu markkinatasapainossa vain arvopaperin omasta betakertoimesta sekä riskittömästä korosta ja markkinasalkun riskipreemiosta. Minkä tahansa arvopaperin tai portfolion tuoton ja (systemaattisen) riskin suhdetta voi tällöin kuvata seuraavasti:

$$(5\text{-}7) \quad E(R_i) = r_0 + B_i * [E(R_m) - r_0]$$

jossa $E(R_i)$ = arvopaperin i odotettu tuotto
r_0 = riskitön tuotto
B_i = arvopaperin i betakerroin
$E(R_m)$ = markkinasalkun m odotettu tuotto

CAP-malli hallitsi pitkään portfolioteoreettista tutkimusta, mutta se sai 1970-luvulla haastajan Stephen Rossin kehittämästä arbitraasihinnoitteluteoriasta. APT:n perusoletus on arvopaperien markkinahintojen ja odotettu-

---

[2] Hyviä perusesityksiä portfolioteoriasta ja myös CAP-mallin taustaoletuksista ks. esim. Copeland - Weston (1988), Elton - Gruber (1987) ja Sharpe (1985).

jen tuottojen perustuminen johonkin tuottoa generoivaan prosessiin. Tällainen prosessi suhteuttaa arvopaperin odotetun tuoton yhteen tai useampaan faktoriin. Odottamattomat muutokset faktoreissa johtavat tuoton poikkeamiseen odotetulta tasolta, minkä vuoksi herkkyys eri faktorien eli riskilähteiden suhteen määrää kunkin arvopaperin tasapainomarkkinahinnan.

$$(5\text{-}8) \quad E(R_i) = r_0 + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * Z_j$$

$$(5\text{-}9) \quad R_i = E(R_i) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * df_j + e_i$$

joissa $E(R_i)$ = velkakirjan i odotettu tuotto
r_0 = riskitön tuotto
b_{ij} = velkakirjan i herkkyys faktorille j
Z_j = faktorin j riskipreemio
R_i = velkakirjan i tuotto
df_j = faktorin j odottamaton muutos
e_i = velkakirjan i faktoreista riippumaton odottamaton tuotto

APT on tärkein CAP-mallille vaihtoehtoinen arvopaperimarkkinoiden tasapainomalli. APT on luonteeltaan hyvin yleinen; perinteistä CAP-mallia voi pitää sen erikoistapauksena, jossa beta mittaa herkkyyttä ainoan tuottoon vaikuttavan faktorin, markkinasalkun, suhteen. Rahoitusalan kirjallisuudessa on esitetty hyvin erilaisia näkemyksiä näiden mallien käyttökelpoisuudesta ja etenkin niiden soveltuvuudesta empiiriseen analyysiin.[3]

5.2 KESKIARVOVARIANSSIANALYYSIN SOVELTUMATTOMUUS VELKAKIRJOJEN TARKASTELUUN

Keskiarvovarianssimalliin perustuva riski-tuottoanalyysi edellyttää joko sijoitustuottojen kovarianssirakenteen estimointia historiallisesta aineistosta tai sen ennusta-

---

[3] APT:ta on käsitelty myös luvuissa 2.2.3 ja 5.3. Tarkemmin APT:sta ja sen suhteesta CAP-malliin ks. Elton - Gruber (1987, s.328 - 354) ja Ross (1976).

mista. Voi olla realistista olettaa kahden osakkeen kovarianssin olevan intertemporaalisesti vakaa, mutta kahden eripituisen velkakirjan osalta tällaista oletusta ei voi hyväksyä. Velkakirjan korkoriskillisyys riippuu olennaisesti juoksuajasta ja korkotasosta. Ajan kuluminen ja korkotason vaihtelut muuttavat velkakirjan riskiominaisuuksia ja siten kovarianssimatriisia.[4] Siksi velkakirjatuottojen kovarianssimatriisin rakentaminen historiallisen aineiston pohjalta ei ole mielekästä.

Kovarianssimatriisin epävakauden ongelmaa voitaisiin lieventää tarkastelemalla yksittäisten velkakirjojen sijasta kunkin juoksuajan velkakirjoja luokittain. Juoksuaikaluokituksesta aiheutuisi kuitenkin epätarkkuuksia, eivätkä erikuponkiset saman juoksuaikaluokkaan kuuluvat velkakirjat ole homogeenisia. Lisäksi ongelma korkotason vaikutuksesta kovarianssimatriisiin jäisi yhä jäljelle, ja ellei tätä vaikutusta pystytä mallittamaan, kovarianssimatriisia ei voi estimoida.

Näistä syistä ei yksittäisille velkakirjoille tai velkakirjasalkuille ole menestyksekkäästi rakennettu historialliseen aineistoon perustuvia CAP-malleja.

Duraation käsite tarjoaa yksinkertaisen ratkaisun velkakirjatuottojen kovarianssimatriisin rakentamiselle ilman tilastolliseen estimointiin liittyviä ongelmia. Duraatiota voi pitää a priori -oletuksena kovarianssi-matriisin rakenteesta, joka ottaa huomioon juoksuajan, kupongin ja korkotason vaikutukset. Kahden velkakirjan tuottojen välinen kovarianssi riippuu niiden duraatioiden suhteesta. Yksifaktoriduraation käyttö edellyttää kaikkien velkakir-

---

[4] Käytännön esimerkki: Nokian osake on Nokian osake myös viiden vuoden kuluttua, eikä ole perusteltua olettaa sen betan muuttuvan olennaisesti tänä aikana. Sen sijaan jo nyt tiedetään, että kuuden vuoden päästä erääntyvän lainan hintariski on viiden vuoden kuluttua selvästi pienempi kuin nyt.

jatuottojen täydellistä korrelaatiota: korkoepävarmuudella voi olla vain yksi lähde.[5]

5.3 PORTFOLIOTEORIAN KÄYTTÖ VELKAKIRJA-ANALYYSISSA

Jos arvopaperin riski määritellään CAP-mallin tapaan sen kovarianssiksi markkinasalkun kanssa, systemaattinen korkoriski kuvaa luottoriskittömän velkakirjan riskiä.

Boquist - Racette - Schlarbaum (1975) tutkivat ensimmäisinä CAP-mallin ja duraatiomallien yhtymäkohtia selvittäessään systemaattista korkoriskiä mittaavan betakertoimen ja velkakirjan duraation suhdetta. Yhden sijoitusjakson CAP-mallissa arvopaperin beta on määritelty seuraavasti:

$$(5\text{-}10)\quad B_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i,\, R_m)}{\sigma^2(R_m)} = \frac{\delta(R_i,\, R_m) * \sigma(R_i)}{\sigma(R_m)}$$

jossa B_i = arvopaperin i betakerroin
$\mathrm{cov}(R_i, R_m)$ = arvopaperin i ja markkinasalkun kovarianssi
$\sigma^2(R_m)$ = markkinasalkun tuoton varianssi
δ = korrelaatiokerroin
$\sigma(R_i)$ = arvopaperin i tuoton keskihajonta
$\sigma(R_m)$ = markkinasalkun tuoton keskihajonta

Velkakirjan hetkellinen tuotto riippuu vain sen arvonmuutoksesta, joka voidaan tiettyjen oletusten vallitessa esittää duraation lineaarisena funktiona.[6] Boquist-Racette - Schlarbaum käyttivät tätä huomiota hyväksi ja sijoittivat Macaulay-duraation betakertoimen kaavaan:

$$(5\text{-}11)\quad B_i = \frac{-D_i * \mathrm{cov}(dy_i,\, R_m)}{\sigma^2(R_m)} = \frac{-D_i * \delta(dy_i,\, R_m) * \sigma(dy_i)}{\sigma(R_m)}$$

jossa D_i = velkakirjan i Macaulay-duraatio
$\mathrm{cov}(dy_i, R_m)$ = velkakirjan i sisäisen koron muutoksen ja markkinasalkun tuoton kovarianssi
$\sigma(dy_i)$ = velkakirjan i sisäisen koron muutoksen keskihajonta

---

[5] Brennan - Schwartz (1983) s.4 - 5 ja 18.

[6] Ks. lukua 4.1: pienille paralleeleille sisäisen koron muutoksille pätee jatkuva-aikaisen koronkoron tapauksessa $dP / P = - D * dy$.

Osoittajan etumerkin odotetaan olevan negatiivinen, koska korrelaatio sisäisen koron muutoksen ja markkinasalkun tuoton kanssa on todennäköisesti negatiivinen: markkinatuoton paraneminen nostaa arvopaperien hintoja, mikä taas velkakirjan tapauksessa edellyttää diskonttokoron laskua. Jos korrelaatiosuhde on tällainen, duraation pidentäminen kasvattaa betakerrointa. Livingston (1978) esitti myös markkinasalkun hetkellisen tuoton duraation funktiona:

$$(5\text{-}12)\quad B_i = \frac{D_i * \mathrm{cov}(dy_i,\, dy_m)}{D_m * \sigma^2(dy_m)} = \frac{D_i}{D_m} * \frac{\delta(dy_i, dy_m) * \sigma(dy_i)}{\sigma(dy_m)}$$

jossa D_m = markkinasalkun Macaulay-duraatio
$\mathrm{cov}(dy_i,\, dy_m)$ = velkakirjan i ja markkinasalkun sisäisten korkojen muutosten kovarianssi
$\sigma^2(dy_m)$ ja $\sigma(dy_m)$ = markkinasalkun sisäisen koron muutoksen varianssi ja keskihajonta

Betakertoimen ja duraation suhde yksinkertaistuisi, jos markkinasalkussa olisi vain velkakirjoja[7] ja Macaulay-duraatioon liittyvät oletukset kaikkien sisäisten korkojen yhtäsuurista muutoksista olisivat voimassa (eli eri arvopaperien sisäisten korkojen muutokset olisivat täydellisesti korreloituneita ($\delta = 1$) ja korkovolatiilisuudet olisivat yhtä suuria $[\sigma(dy_i) = \sigma(dy_m)]$). Tällöin

$$(5\text{-}13)\quad B_i = \frac{D_i}{D_m}$$

Yleisemmin betakertoimen kaavasta (5-10) näkee, että arvopaperi on riskitön, jos sen tuotto on riippumaton markkinatuoton vaihteluista. Käytännössä korkoinstrumenttien tuottojen välinen korrelaatio on korkea ja korkotason vaihtelut vaikuttavat lähes kaikkien sijoituskohteiden markkina-arvoihin, minkä tähden suuri osa korkoriskistä on ilmeisesti luonteeltaan systemaattista.[8]

---

[7] Markkinasalkku voisi olla tällainen sijoittajalle, joka on rajoitettu ostamaan vain velkakirjoja.

[8] Jacob - Pettit (1984) s.473 - 481 ja Lanstein - Sharpe (1978).

Velkakirjojen estimoidut betakertoimet ovat kuitenkin alhaisia, koska niiden tuoton vaihtelevuus on useimmiten pienempi kuin osakemarkkinan. Historiallinen data tukee kaavan (5-11) mukaista ajatusta, että velkakirjan duraation pidentäminen kasvattaa betakerrointa: pitkien velkakirjojen tuotot ovat olleet vaihtelevampia kuin lyhyiden velkakirjojen ja ne ovat korreloineet lievän positiivisesti osaketuottojen kanssa.

Taulukko 2. Eri sijoituskohdeluokkien tuotot, riskit ja korrelaatiot Yhdysvalloissa 1926 - 1982. [Lähde: Fuller - Farrell (1987) s.541]

	Keskimääräinen vuosituotto	Tuoton keskihajonta	Korrelaatio osakkeiden kanssa
Osakkeet	9.5 %	22.5 %	1.0
Pitkät valtionlainat	4.4 %	7.6 %	0.1
Lyhyet valtionlainat	3.3 %	3.3 %	-0.2

Käytännön tutkimuksissa tehdään usein yksinkertaistava oletus, jonka mukaan markkinasalkkuun kuuluu vain osakkeita. Jos oletetaan näin, taulukon 2 lukujen avulla voidaan laskea lyhyiden ja pitkien valtionlainojen betakertoimet. Kaikki edellä esitetyt oletukset ovat kovin rajoittavia[9], joten velkakirjan riskin ja duraation suhteen kuvaaminen yhden markkinaindeksin CAP-mallilla ei ole kovin mielekästä.

Hedelmällisempää saattaisi olla duraation ja arbitraasihinnoittelumallin faktoriherkkyyksien vertaaminen. APT:ssa riskimittari b ei kuvaa yhteisliikettä markkinasalkun kanssa, vaan b:t ovat herkkyysmittareita eri faktorien suhteen. Elton - Gruber - Nabar (1986) näyttivät APT-metodologian avulla, että velkakirjan faktoriherkkyys voidaan tietyin oletuksin esittää yksifaktorimallissa sen

[9] Markkinasalkun määrittelyn ongelmista ks. esim. Sharpe (1985).

duraation ja arbitraarisesti valitun vertailusalkun duraation suhteena:[10]

$$(5\text{-}14)\quad E(R_i) = r_0 - \frac{D_i}{D_p} * [E(R_p) - r_0]$$

jossa $E(R_i)$ = velkakirjan i odotettu tuotto
r_0 = riskitön korko
D_i = velkakirjan i Macaulay-duraatio
D_p = vertailusalkun Macaulay-duraatio
$E(R_p)$ = vertailusalkun odotettu tuotto

Tähänastinen tarkastelu on perustunut yhden jakson malliin. Arvopaperien hinnoittelumallien suunnittelujakso on yleensä yhden jakson pituinen, kun taas yksifaktoriduraatiot ovat usean jakson malleja. Usean jakson mallissa faktoriherkkyyden ja duraation suhteen tarkka muoto riippuu oletetusta stokastisesta prosessista, mutta faktoriherkkyys on aina duraation ja suunnittelujakson pituuden erotuksen funktio eli

$$(5\text{-}15)\quad b_{iH} = f(D_i - H)$$

jossa b_{iH} = velkakirjan i faktoriherkkyys[11]
D_i = velkakirjan i Macaulay-duraatio
H = suunnittelujakson pituus

Bierwag (1987a, s.307 - 318) esittää esimerkkinä yksinkertaisen stokastisen prosessin, johon liittyvä faktoriherkkyys on

$$(5\text{-}16)\quad b_{iH} = \frac{D_i - H}{D_p - H}$$

Arvopaperin systemaattinen riski riippuu siis sen duraation ja jäljellä olevan suunnittelujakson suhteesta. Bierwag - Kaufman - Toevs (1983a, s.31 - 32) väittivät, että systemaattinen riski (beta) on positiivinen aina kun $D_i \neq H$. Roll (1971, s.64) väitti puolestaan, että velkakirjan beta

---

[10] Vrt. yhtälöön (5-8).

[11] Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b, s.154) kutsuvat tätä betaksi, muuta toteavat, ettei kyseessä ole yleinen CAP-mallin beta vaan tiettyyn suunnittelujaksoon liittyvä riskimittari.

on negatiivinen, jos se erääntyy ennen suunnittelujakson päättymistä. Tällöinhän sijoitusstrategian suunnittelujakson tuotto korreloi negatiivisesti markkinatuoton kanssa: esimerkiksi jos markkinahinnat laskevat velkakirjan ostamisen ja erääntymisen välillä, sijoittaja voi ostaa osakkeita edullisemmalla hinnalla. Siis kun $D_i = H$, $b_{iH} = 0$ ja kun $D_i > H$, $b_{iH} > 0$. Mutta kun $D_i < H$, $b_{iH} < 0$, mikä on vastoin Bierwag - Kaufman - Toevsin väitettä. Suunnittelujakson tuoton epävarmuus kyllä kasvaa, kun velkakirjan duraatio poikkeaa suunnittelujakson pituudesta kumpaan tahansa suuntaan, mutta Bierwag ja Toevs ovat myöntäneet argumenttinsa virheellisyyden systemaattisen riskin suhteen.[12]

Yhtälö (5-15) osoittaa myös sen, että portfolioteorian riskitöntä tuottoa ei saa sijoittamalla mihin tahansa velkakirjaan, vaan nimenomaan velkakirjaan, jonka duraatio on jäljellä olevan suunnittelujakson pituinen.[13] Yleisesti voi todeta, että sijoituspäätösten aikaulottuvuudella on keskeinen rooli duraatioanalyysissa, kun taas portfolioteorian valtavirta sivuuttaa tämän ulottuvuuden lähes täysin. Duraatioanalyysin suhdetta intertemporaalisiin CAP-malleihin ei ole käsitelty alan kirjallisuudessa, vaikka näistä usean jakson malleista saattaisi löytyä kiinnostavia yhtymäkohtia.

Duraation suosio velkakirjan korkoriskin mittarina johtuu osittain keskiarvovarianssilähestymistavan sopimattomuudesta velkakirjojen tarkasteluun. Toisaalta keskiarvovarianssianalyysin avulla pystytään arvioimaan samoilla käsitteillä erilaisia sijoituskohdetyyppejä ja lisäksi yhdistämään useiden eri riskilähteiden vaikutukset yhteen

---

12 G. Bierwagin ja A. Toevsin puhelinhaastattelut.

13 Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b) s.124 ja Kaufman (1980).

tunnuslukuun (kokonaistuoton keskihajonta).[14] Näiden etujen vuoksi pyrittäneen tulevaisuudessa kehittämään portfolioteoriaan perustuvia korkoriskin mittareita nykyistä käyttökelpoisemmiksi.

---

[14] Myös osakkeille on yritetty laskea duraatioita. Boquist - Racette - Schlarbaum (1975) olettivat, että tuleva osinkovirta pystytään estimoimaan ja että osinkojen kasvuvauhti on vakaa; tällöin voidaan laskea osakkeen tulevien maksusuoritusten keskimääräinen juoksuaika. Maksusuoritusten epävarmuus tekee tämän lähestymistavan epäkäytännölliseksi. Toisaalta on mahdollista estimoida osakkeen arvon herkkyys korkotason muutoksille (Leibowitz 1986), mutta tämäkin kuvaa vain tiettyä osaa osakkeeseen liittyvästä riskistä.

6 DURAATION KRITIIKKI JA KEHITTÄMINEN

6.1 YLEISTÄ DURAATION KRITIIKISTÄ

Rahoitusteorian tutkijat ovat 1970 - 1980 -luvulla kiinnittäneet huomiota perinteisten duraatioversioiden rajoittaviin taustaoletuksiin ja teoreettisiin epäjohdonmukaisuuksiin. Duraation kritiikki on ollut varsin hajanaista, minkä vuoksi arvostelussa käytettyjä argumentteja ja eri parannusehdotuksia on ollut vaikea suhteuttaa toisiinsa. Yritän tässä luvussa koota yhteen kritiikin aiheita ja jatkotutkimusten tuloksia sekä esittää ne selkeässä järjestyksessä.

Ennen 1970-lukua velkakirjan juoksuaika oli yleisin sijoittajien käyttämä korkoriskin mittari. Macaulay-duraatio on selvä parannus juoksuaikaan verrattuna, koska se ottaa huomioon myös ennen eräpäivää maksettavat rahasuoritukset arvioidessaan sijoituksen kestoa. Ei ole kuitenkaan ilmeistä, miksi jotenkin laskettu keskimääräinen kesto sellaisenaan kuvaisi sijoituksen korkoriskiä.

Macaulay-duraation käyttö korkoriskin mittarina perustuukin ennen kaikkea siihen, että sen modifioitu versio mittaa tiettyjen oletusten vallitessa velkakirjan arvon suhteellista korkoherkkyyttä. Modifioitu duraatio on keskiarvovarianssianalyysin mukainen riskimittari eli se kuvaa oikein velkakirjan tuoton varianssia, jos ja vain jos (a) eripituiset nykykorot ovat täydellisesti korreloituneita ja korkorakenne liikkuu paralleelisti[1], (b) koronmuutokset ovat äärettömän pieniä, (c) suunnittelujakso on hetkellinen (äärettömän lyhyt) ja (d) velkakirjan tuottoon ei kohdistu muita epävarmuuden lähteitä kuin korkoriski.

---

[1] Jos diskonttokorkona käytetään velkakirjan sisäistä korkoa, korkorakenteen täytyy lisäksi olla horisontaalinen. Ks. lukua 6.2.

Vain jos nämä edellytykset täyttyvät, velkakirjasalkun tuoton vaihtelujen ja modifioidun duraation suhde on lineaarinen. Tällöin voidaan esimerkiksi väittää, että "velkakirja, jonka modifioitu duraatio on kuusi, on kaksi kertaa riskillisempi kuin velkakirja, jonka modifioitu duraatio on kolme".

Kutakin näistä neljästä edellytyksestä on yritetty lieventää duraatiota käsittelevässä kirjallisuudessa. Pyrin luokittelemaan tässä luvussa esiteltävät perinteisten duraatioiden parannusehdotukset ja vaihtoehdot sen mukaan, mitä edellytystä ne lähinnä lieventävät.

Yksinkertainen ja rajoittava oletus (a) korkorakenteen paralleeleista liikkeistä on herättänyt voimakkaimpia vastalauseita. Tutkijat ovat joko esittäneet vaihtoehtoisia a priori -oletuksia korkorakenteen stokastisesta prosessista (6.4.1) tai pyrkineet estimoimaan korkorakenteen dynamiikkaa empiirisesti (6.4.2). Joissakin malleissa on luovuttu eripituisten nykykorkojen täydellisen korrelaation vaatimuksesta käyttämällä kahta tai useampaa selittävää faktoria. Kehittyneimmissä malleissa on käytetty hyväksi pääomamarkkinoiden tasapainoehtoa (6.4.3).

Vaikka korkorakenne muuttuisi juuri oletetulla tavalla, modifioitu duraatio on vain ensimmäisen asteen approksimaatio todellisesta hintamuutoksesta, joten se on tarkka vain hyvin pienille korkomuutoksille. Useimpiin duraatiomalleihin liittyy konveksi tuottofunktio, joten approksimaatiota suurten korkomuutosten tapauksessa (b) voidaan tarkentaa ottamalla huomioon Taylorin sarjan laajennuksen korkeampia tekijöitä (6.5.1). Approksimaation tarkentaminen duraatiovektorin avulla pienentää samalla stokastisen prosessin riskiä ja johtaa ääritapauksessa täysin riskittömään dedikaatiostrategiaan (6.5.2).

Luvussa 6.6 lievennetään edellytystä (c) tarkastelemalla suunnittelujakson pidentämisen vaikutusta ja arvioimalla ajan kulumisen vaikutusta immunisaatiostrategiassa. Muiden riskien kuin korkoriskin (d) vaikutuksia käsitellään luvussa 6.7: muiden riskien liittäminen duraatioanalyysiin on vaikea ja harvoin käsitelty tutkimusaihe.

Ennen edellä mainittujen lievennysten käsittelyä kuvailen Macaulay-duraatiota vastaan kohdistettuja teoreettisia argumentteja, jotka liittyvät sisäisen koron käyttöön diskonttokorkona (6.2) ja pääomamarkkinoiden tasapainoehdon rikkomiseen (6.3).

6.2 SISÄISEN KORON KÄYTTÖ DISKONTTOKORKONA

Perinteinen Macaulay-duraatio muuttaa kaikki maksusuoritukset nykyarvoisiksi käyttämällä velkakirjan sisäistä korkoa diskonttokorkona. Tähän liittyy implisiittinen oletus horisontaalisesta tuottokäyrästä ja sen paralleeleista liikkeistä.

Sisäisen koron käyttöön liittyy tiettyjä epäjohdonmukaisuuksia[2], jotka heijastuvat myös Macaulay-duraatioon. Sisäiset korot ovat nykykorkojen monimutkaisia keskiarvoja, joten tietynsuuruinen nykykorkojen muutos voi vaikuttaa eri tavalla eripituisten velkakirjojen sisäisiin korkoihin. Kaikkien velkakirjojen sisäiset korot eivät voi muuttua samaa määrää, jos korkorakenne on nouseva tai laskeva. Ainoastaan jos korkorakenne on horisontaalinen, tietty nykykorkojen muutos muuttaa kaikkia sisäisiä korkoja yhtä paljon ja sekä korkorakenne että tuottokäyrä pysyvät horisontaalisina.[3] Vain tässä erikoistapauksessa voidaan velkakirjan eri maksusuoritukset diskontata yhdellä (sisäisellä) korolla sekä ennen korkotason muutosta että sen jälkeen.

Fisher ja Weil esittivät vuonna 1971 vaihtoehdon sisäisen koron käyttämiselle diskonttokorkona duraation laskemi-

---

[2] Epäjohdonmukaisuuksista tarkemmin ks. lukua 2.1, jossa käsitellään myös tuottokäyrän ja korkorakenteen käsitteiden eroa.

[3] Ingersoll - Skelton - Weil (1978) s.631 - 632.

sessa: he muuttivat maksusuoritukset nykyarvoisiksi kunkin jakson nykykoron avulla.[4] Fisher ja Weil käsittelivät ensimmäisinä tutkijoina eksplisiittisesti duraation taustalla olevia oletuksia. He olettivat korkorakenteen odotushypoteesin olevan voimassa ja odottamattomien koronmuutosten olevan additiivisia, jolloin eripituiset nykykorot muuttuvat aina yhtä paljon. Fisher - Weil -duraation ero Macaulay-duraatioon on siis siinä, että korkorakenne voi edellisessä olla muunkinmuotoinen kuin horisontaalinen, mutta korkorakenteen oletetaan molemmissa muuttuvan paralleelisti.[5]

Kehittyneemmät duraatioversiot ovat yleensä käyttäneet Fisher - Weilin tapaan nykykorkoja (eivätkä sisäisiä korkoja) eripituisten maksusuoritusten diskonttaamisessa.

6.3 PÄÄOMAMARKKINOIDEN TASAPAINOEHDON RIKKOMINEN

Ingersoll, Skelton ja Weil (1978) osoittivat, että perinteisiin duraatioihin liittyvät oletukset korkorakenteen stokastisesta prosessista eivät olleet yhdenmukaisia pääomamarkkinoiden tasapainoehdon kanssa. Pääomamarkkinoiden tasapainoehdon (eli arbitraasin eliminointiehdon) mukaan kilpailullisilla markkinoilla ei tasapainossa ole mahdollista hankkia varmoja ylisuuria tuottoja riskittömän arbitraasin avulla.

Immunisoitu portfolio tuottaa aina vähintään suunnittelujakson lopussa erääntyvän nollakuponkilainan lupaaman tuoton, jos korkorakenne voi muuttua vain paralleelisti. Ingersoll - Skelton - Weil näyttivät, että tämä tilanne

---

[4] Macaulay oli itsekin esittänyt tätä vaihtoehdoksi sisäisen koron käyttämiselle diskonttokorkona. Ero kahden duraation laskutavan välillä on pieni: kymmenen vuoden velkakirjalle ero on historiallisesti ollut alle 1 %. (Ingersoll 1983 s.170.)

[5] Duraatiokirjallisuudessa additiivista korkotason muutosta kutsutaan usein paralleeliksi, vaikka tämä ilmaisu on epätarkka ei-horisontaalisen korkorakenteen tapauksessa.

implikoi arbitraasimahdollisuutta: mainitun nollakuponkilainan myyminen ja immunisoidun portfolion ostaminen ei voi tuottaa sijoittajalle tappiota, mutta tuo suurten korkotason muutosten tapahtuessa voittoja. Syynä on immunisoidun portfolion tuottofunktion konveksisuus koronmuutoksen suhteen: mitä suurempi korkoshokki, sitä korkeampi on immunisoidun portfolion tuotto, jos korkorakenne saa muuttua vain oletetulla tavalla. Voidaan myös näyttää, että korkeakuponkinen velkakirja dominoi matalakuponkista velkakirjaa, jos molemmilla on sama duraatio ja korkorakenne voi siirtyä vain paralleelisti.[6] Sekä Macaulay-duraation implikoima stokastinen prosessi että useat muut luvussa 6.4 esiteltävät vaihtoehtoiset stokastiset prosessit ovat epätasapainoprosesseja, koska ne mahdollistavat edellä kuvatun arbitraasin.

Tätä kritiikkiä vastaan voi todeta ainakin sen, että pääomamarkkinat eivät käytännössä ole täydelliset, joten kuvattua arbitraasia ei voi aina toteuttaa: sopivaa nollakuponkilainaa ei ehkä ole olemassa tai sen myyminen lyhyeksi on kielletty. Bierwag (1987b) on lisäksi osoittanut, että tietty duraatiomittari voi liittyä useampiin stokastisiin prosesseihin - ja samanaikaisesti tasapaino- ja epätasapainoprosesseihin. Bierwagin mukaan duraatiomittarin valinnassa ei tarvitse kiinnittää huomiota siihen, onko mittarin taustalla oleva stokastinen prosessi yhdenmukainen tasapainoehdon kanssa, koska sama mittari voidaan johtaa myös jostakin tasapainoprosessista. Useimpia epätasapainoprosesseja vastaa jokin tasapainoprosessi, jolla on sama duraatiomittari.[7] On kuitenkin olemassa stokastisia prosesseja, joita ei vastaa mikään korkoriskin poistava duraatiomittari.[8]

Varhaisimpia duraatiomalleja on arvosteltu myös siitä, että korkoliikkeet ovat niissä täysin deterministisiä. Jos korkoprosessin luonne tunnetaan varmasti, riskitön

---

[6] Bierwag - Kaufman - Toevs (1983c) s.312.

[7] Bierwag (1987b) s.192 - 199.

[8] Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b) s.112.

arbitraasi on yleensä mahdollista. Tämä voidaan kuitenkin helposti estää siirtämällä mallit epävarmuuden maailmaan, jossa on identifioitava yksi stokastinen prosessi useista mahdollisista.

Tietyt stokastiset prosessit estävät siis tuottavan riskittömän arbitraasin markkinatasapainossa. Luvussa 6.4.3 kuvataan kahta mallia (Cox - Ingersoll - Ross ja Brennan - Schwartz), jotka perustuvat eksplisiittisesti tällaiseen tasapainoprosessiin. Myös Bierwag - Kaufman - Toevs (1983c) ovat esitelleet stokastisen prosessin, jossa immunisoidun portfolion tuottofunktio ei ole konveksi ja joka ei siksi riko pääomamarkkinoiden tasapainoehtoa.

6.4 KORKORAKENTEEN STOKASTINEN PROSESSI JA DURAATIO

6.4.1 A PRIORI -OLETUKSET KORKORAKENTEEN STOKASTISESTA PROSESSISTA

Sijoituksen korkoriski riippuu siitä tavasta, jolla korkorakenne muuttuu jaksosta toiseen. Duraatio korkoriskin mittarina riippuu vastaavasti korkorakenteen oletetusta stokastisesta prosessista. Stokastinen prosessi pyrkii kuvaamaan korkorakenteen muutosta yhden tai useamman satunnaismuuttujan funktiona.[9]

Useimpia stokastisia prosesseja vastaa tietty duraatiomittari, mutta jokainen duraatiomittari voi liittyä useampaan prosessiin. Korkorakennetta ohjaavaa todellista stokastista prosessia ei tunneta varmuudella, joten tietyn stokastisen prosessin (ja sen mukana duraatiomittarin) valintaan liittyy riski, että prosessi on identifioitu väärin. Vasta jälkikäteen voidaan empiirisesti havaita, mikä stokastinen prosessi olisi parhaiten

---

[9] Stokastisista prosesseista tarkemmin ks. lukua 2.2.2. Vaatimus stokastisen prosessin määrittelystä ei siis edellytä korkomuutosten suunnan ennustamista. Sen sijaan on arvioitava, millä tavalla korot liikkuvat.

kuvannut korkorakenteen muutoksia tietyllä jaksolla ja mikä olisi ollut paras duraatiomittari.

Luvussa 6.2 todettiin, että eripituisten lainojen sisäiset korot voivat muuttua saman määrän ainoastaan jos korkorakenne on horisontaalinen eli $r(0, 1) = r(0, 2) = \ldots = y$.

Vain paralleeli korkoliike jättää korkorakenteen muodon horisontaaliseksi myös korkoshokin jälkeen. Macaulay-duraation kaavassa (3-1) käytetään sisäistä korkoa diskonttokorkona, joten taustalla on implisiittinen oletus stokastisesta prosessista, jossa horisontaalinen korkorakenne siirtyy vain paralleelisti.

(6-1) $r^*(0, t) = r(0, t) + \lambda$, s.e. $t = 1,2,\ldots$
ja $r(0, 1) = r(0, 2) = \ldots = y$

jossa $r(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko hetkellä 0 ennen korkorakenteen stokastista muutosta
$r^*(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko hetkellä 0 korkorakenteen stokastisen muutoksen jälkeen
λ = stokastista prosessia ohjaava satunnaismuuttuja
y = sisäinen korko

Koska korkorakenne on harvoin horisontaalinen, oletuksen epärealistisuus huomattiin jo 1970-luvulla, ja ensireaktio oli tehdä vaihtoehtoisia a priori oletuksia stokastisesta prosessista. Kuvaan tässä luvussa muutamia yksinkertaisia prosesseja diskreetissä muodossa sekä niiden implikoimia duraatiomittareita.[10]

Macaulay-duraation taustaoletuksena olevan stokastisen prosessin voi yleistää additiiviseksi prosessiksi myös ei-horisontaaliselle korkorakenteelle, kun diskonttokorkoina käytetään sisäisten korkojen sijasta nykykorkoja. Additiivisessa prosessissa kaikkien nykykorkojen oletetaan muuttuvan saman määrän.

(6-2) $r^*(0, t) = r(0, t) + \lambda$, s.e. $t = 1,2,\ldots$

---

[10] Bierwag (1987a) s. 258 - 265 ja Bierwag - Kaufman - Toevs (1983a) s.34 - 35.

Yleistä additiivista prosessia vastaava duraatiomittari voidaan esittää seuraavasti:

$$(6\text{-}3) \qquad \frac{D_A}{1 + r(0, D_A)} = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{t * CF_t}{[1 + r(0, t)]^{t+1}}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1 + r(0, t)]^{t}}}$$

jossa D_A = additiivista prosessia vastaava duraatio
$r(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko
CF_t = maksusuoritus hetkellä t

Nykykorkojen voi toisaalta olettaa muuttuvan samassa suhteessa eikä samaa prosenttiyksikkömäärää. Korkomuutokset ovat tällöin multiplikatiivisia eivätkä additiivisia: esimerkiksi positiivisen korkorakenteen vallitessa pitkät korot liikkuvat enemmän kuin lyhyet korot. Jos lyhyt korko nousee 8 %:sta 8.80 %:iin, pitkä korko nousee 10 %:sta 11 %:iin eikä 10.80%:iin. Empiiriset havainnot tukevat tätä oletusta sikäli, että korkovolatiilisuus on yleensä kasvanut korkotason noustessa. Multiplikatiivinen prosessi voidaan esittää muodossa:

$$(6\text{-}4) \qquad 1 + r^*(0, t) = \lambda * [1 + r(0, t)]$$
$$\text{s.e. } \lambda > 0 \text{ ja } t = 1,2,\ldots$$

Jos $\lambda > 1$, korot nousevat ja jos $\lambda < 1$, korot laskevat.

Multiplikatiivista prosessia vastaa duraatiomittari D_M:

$$(6\text{-}5) \qquad D_M = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{t * CF_t}{[1 + r(0, t)]^{t}}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1 + r(0, t)]^{t}}}$$

Lyhyet korot ovat historiallisesti vaihdelleet voimakkaammin kuin pitkät korot. Khang esitteli vuonna 1979 stokastisen prosessin, jossa satunnaisen korkoshokin vaikutus pienenee juoksuajan kasvaessa. Tällainen prosessi selittäisi lyhyiden korkojen suuremman volatiilisuuden.

Vaihtelemalla korkoshokin vaikutuksen pienenemisvauhtia juoksuajan kasvaessa voidaan kehittää hieman erilaisia stokastisia prosesseja ja duraatio-mittareita. Multiplikatiivinen juoksuajasta riippuva prosessi ja sitä vastaava duraatiomittari D_K voidaan esittää seuraavasti:

(6-6) $1 + r^*(0, t) =$
$[1 + \lambda * \ln(1 + \alpha * t) / \alpha * t] * [1 + r(0, t)]$
s.e. $\alpha \geq 0$ ja $t = 1,2,...$

$$(6\text{-}7)\quad \ln(1 + \alpha * D_K) = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t * \ln(1 + \alpha * t)}{[1 + r(0, t)]^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1 + r(0, t)]^t}}$$

jossa $r(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko hetkellä 0 ennen korkorakenteen stokastista muutosta
$r^*(0, t)$ = jakson (0, t) nykykorko hetkellä 0 korkorakenteen stokastisen muutoksen jälkeen
λ = stokastista prosessia ohjaava satunnaismuuttuja
α = parametri, joka varmistaa sen, että lyhyet korot vaihtelevat pitkiä enemmän
CF_t = maksusuoritus hetkellä t

Kaikki edellä kuvatut prosessit olettavat, että korkoepävarmuutta voi kuvata yhden satunnaismuuttujan avulla. Niitä kutsutaan tämän piirteen takia yhden faktorin malleiksi.

Bierwag - Kaufman - Toevs (1983c, s.312) luettelevat seuraavat kaikille yhden faktorin duraatiomalleille yhteiset taustaoletukset: (1) Sijoittajat pyrkivät maksimoimaan odotettua tuottoa kullakin riskitasolla tietyllä suunnittelujaksolla. (2) Korkoriski on ainoa epävarmuuden lähde. (3) Korkorakennetta ohjaava todellinen stokastinen prosessi tunnetaan tai arvioidaan oikein. (4) Eripituisten nykykorkojen muutokset korreloivat täydellisesti. (5) Stokastisen prosessin generoima tuottofunktio ei ole konveksi.

Jos jotakin kolmesta viimeisestä oletuksesta rikotaan, esimerkiksi korkorakenteen muoto muuttuu ei-oletetulla tavalla, syntyy stokastisen prosessin riskiä: malli ei selitä kaikkea tuoton varianssia. Seuraavissa luvuissa käsittelen joustamista näistä oletuksista.[11]

6.4.2 HERKKYYKSIEN ESTIMOINTI HISTORIALLISESTA AINEISTOSTA

Edellisen luvun duraatiomittarit perustuivat siis a priori -oletuksiin korkorakenteen dynamiikasta. Eripituisten nykykorkojen muutosten oletettiin korreloivan täydellisesti ja Macaulay-duraation tapauksessa kaikkien korkojen volatiilisuudet oletettiin yhtä suuriksi. Näillä oletuksilla ei ole empiiristä tukea, joten on ymmärrettävää, että korkoriskiä ja korkorakenteen dynamiikkaa on tutkittu myös historiallisen aineiston avulla.

Nelson - Schaefer tutkivat vuonna 1983, tuottaisiko faktoriherkkyyksien empiirinen estimointi parempia korkoriskin mittareita kuin a priori -oletukset. Nelson - Schaefer estimoivat historiallisesta aineistosta ensin korkorakenteen ja sitten eripituisten nykykorkojen muutosherkkyyden tiettyjen faktorien muutoksille. Uutta tutkimuksessa oli useamman kuin yhden faktorin käyttö ja riskimittarien perustuminen empiiriseen aineistoon.

Perinteisessä duraatioanalyysissa tietyn korkoshokin aiheuttama velkakirjan arvonmuutos saadaan kertomalla korkojen muutos duraatiolla. Nelson - Schaefer -kehikossa korkojen muutos kerrotaan duraation sijasta estimoidulla faktoriherkkyydellä. Tällöin eripituisten korkojen ei tarvitse reagoida samalla tavalla tiettyyn shokkiin.

Nelson - Schaefer käyttivät kahden faktorin mallia ja estimoivat velkakirjojen hintojen herkkyyttä lyhyen koron ja pitkän koron muutoksille. Kullakin velkakirjalla on

---

[11] Bierwag (1987a) s.253 - 265, Bierwag - Kaufman - Toevs (1983b) s. 145 - 147 ja Bierwag - Kaufman - Toevs (1983d).

siis "duraatio" eli faktoriherkkyys lyhyen koron suhteen ja toinen "duraatio" pitkän koron suhteen[12].

Gultekin - Rogalski (1984) ja Elton - Gruber - Nabar (1986) ovat myös estimoineet velkakirjasalkkujen korkoriskiä empiirisestä aineistosta faktorianalyysin ja regressioanalyysin avulla. He eivät estimoineet korkorakennetta kuten Nelson - Schaefer, vaan he rakensivat vakiojuoksuaikaisia salkkuja ja tarkastelivat, miten faktorimuutokset selittivät niiden tuottovaihteluja.[13]

Kaikki tässä luvussa mainitut mallit ovat usean faktorin malleja toisin kuin luvussa 6.4.1 esitellyt yksifaktorimallit. Usean faktorin mallit lähtevät siitä, että yksi tekijä ei pysty selittämään riittävästi koko korkorakenteen muutosta. Jos epävarmuuden lähteitä on useita, niiden vaikutusta korkorakenteeseen - ja erityisesti vaihtelevaa vaikutusta eripituisiin nykykorkoihin - on parempi arvioida erikseen. Usean faktorin mallissa jokaisella velkakirjalla on yhtä monta duraatiota (herkkyysmittaria), kuin on olemassa epävarmuuden lähteitä[14]. Laskennallisesti tämä on tietenkin monimutkaista, joten on pyrittävä löytämään mahdollisimman pieni määrä faktoreita, jotka selittävät korkorakenteen muutoksia riittävän tarkasti.

---

[12] Itse asiassa Nelson ja Schaefer (1983, s.67) käyttivät pitkän koron sijasta toisena faktorina lyhyen ja pitkän koron eroa. Tämä on perusteltua, koska empiirisesti on havaittu, että Yhdysvaltain pääomamarkkinoilla pitkän koron ja mainitun korkoeron muutokset ovat ortogonaalisia.

[13] Näitä faktorimalleja ja niiden empiirisiä tuloksia käsitellään tarkemmin luvussa 7.2.

[14] Nämä duraatiot ovat toisiaan täydentäviä, kun taas erilaisiin stokastisen prosessin oletuksiin liittyvät eri duraatiot (ks. lukua 6.4.1) ovat vaihtoehtoisia.

6.4.3 PÄÄOMAMARKKINOIDEN TASAPAINOEHTOON PERUSTUVA LÄHESTYMISTAPA

Pääomamarkkinoiden tasapainoehtoon perustuvat duraatiomallit käyttävät molempia edellä esitettyjä lähestymistapoja hyväksi. Korkorakenteen stokastisesta prosessista tehdään a priori -oletuksia, mutta tiettyjä parametrejä estimoidaan empiirisesti. Uutta on se, että valitun stokastisen prosessin täytyy olla yhdenmukainen pääomamarkkinoiden tasapainon kanssa. Tasapainoehtoon perustuvaa velkakirjojen hinnoittelumallia käytetään korkorakenteen johtamiseen.

Brennan ja Schwartz (1983, s.10) ovat kuvanneet perinteisten duraatiomallien ja tasapainomallien eroa seuraavasti. Perinteisten duraatiomallien taustalla on siis jokin a priori -oletus yhdestä satunnaismuuttujasta, joka määrittää koko korkorakenteen ja sen dynamiikan. Duraation voi laskea suoraan ja se on jollakin tavalla painotettu keskimääräinen juoksuaika. Missään vaiheessa ei tarkasteta, ovatko taustaoletukset yhdenmukaisia pääomamarkkinoiden tasapainoehdon kanssa.

Tasapainoehtoon perustuvat yksifaktorimallit lähtevät myös jostakin satunnaismuuttujasta ja tekevät oletuksia sen käyttäytymisestä. Muuttuja ei kuitenkaan määritä koko korkorakennetta vaan yhden sen pisteen. Satunnaismuuttujan - esimerkiksi lyhyen nykykoron - saaman arvon perusteella ja tasapainoehdon avulla johdetaan sitten kaikkien velkakirjojen hinnat ja koko korkorakenne.

Pääomamarkkinoiden tasapainoehto edellyttää, että kunkin velkakirjan odotettu tuotto on riskitön korko lisättynä kohtuullisella korvauksella otetusta riskistä. Kohtuullisen korvauksen suuruus riippuu siitä, mikä on kuhunkin epävarmuustekijään liittyvän riskin "markkinahinta". Erilaisten riskien "markkinahinnat" riippuvat sijoittajien preferensseistä. Immunisoidun portfolion on markkinatasapainossa annettava riskitön korko, koska sen riskiherkkyydet ovat nollia. Myös muiden velkakirjojen markkinahintojen on oltava yhdenmukaisia tasapainoehdosta johdetun hinnoitteluyhtälön kanssa.[15]

Duraatio on tässä lähestymistavassa pääoma-arvon herkkyysmittari kunkin riskitekijän suhteen, mutta siihen ei enää liity tulkintaa jonkinlaisesta keskimääräisestä juoksuajasta.

Tunnetuimpia tasapainomalleja ovat Cox - Ingersoll-Rossin (1979) kehittämä yksifaktorimalli sekä Brennan - Schwartzin (1983) kehittämä kahden faktorin malli.

Cox - Ingersoll - Ross -malli olettaa koko korkorakenteen määräytyvän hetkellisen nykykoron stokastisten muutosten perusteella, joten se olettaa velkakirjatuottojen korreloivan täydellisesti. CIR-mallissa nykykoron oletetaan seuraavan jatkuva-aikaista Markov-prosessia pitkän aikavälin keskiarvonsa ympärillä.[16]

(6-8) $dr = \theta * (\mu - r)dt + \sigma * \sqrt{r}\, dz$

jossa hetkellinen nykykorko r ajautuu sopeutuskertoimen θ määräämällä vauhdilla kohti pitkän aikavälin keskiarvotasoa μ, σ on nykykoron volatiilisuutta mittaava diffuusiokerroin ja dz on normaalijakautunut Wiener-prosessi.

Tämän prosessin mukainen "stokastinen duraatio" on varsin monimutkainen. Sen voi kuitenkin ratkaista suljetussa muodossa, kun korkorakenteen dynamiikkaa ja riskin "markkinahintaa" eli likvidiyspreemiota kuvaavat parametrit on estimoitu empiirisesti.[17]

Edellisessä luvussa käsiteltiin yhden ja usean faktorin mallien eroja. Brennan - Schwartz -mallin tärkein ero CIR-malliin on siinä, että edellisen mukaan eripituisten

---

[15] Tasapainomalleista ja -ehdosta tarkemmin ks. lukuja 2.2.3 ja 6.3.

[16] CIR-mallista tarkemmin ks. lukuja 2.2.2 - 2.2.3.

[17] Stokastisen duraation kaava on esitetty Cox - Ingersoll - Rossin (1979) sivulla 56.

korkojen muutokset eivät ole täysin korreloituneita. Velkakirjojen markkinahinnat ja korkorakenne määräytyvät kahden eri satunnaismuuttujan, hetkellisen lyhyen nykykoron ja pitkän konsolikoron, vaihtelujen perusteella.

Brennan - Schwartzin malli olettaa muuttujien seuraavan yhdistettyä jatkuva-aikaista Markov-prosessia:

(6-9a) $dr = [a_1 + b_1 * (m - r)]dt + \sigma_1 * \sqrt{r}\, dz_1$
(6-9b) $dm = m * (a_2 + b_2 * r + c_2 * m)dt + \sigma_2 * \sqrt{m}\, dz_2$

jossa r on hetkellisen lyhyt nykykorko ja m on pitkä konsolikorko, a_i, b_i * c_i ovat parametreja, t kuvaa aikaa, σ_i on korkovolatiilisuutta mittaava diffuusiokerroin ja dz_i on normaalijakautunut Wiener-prosessi.

Yhtälöiden (6-9 a ja b) oikean puolen alkuosa on muuttujan odotettu muutos ja loppuosa sen odottamaton muutos. Lyhyen koron oletetaan ajautuvan pitkää korkoa kohti ja korkovolatiilisuuden oletetaan kasvavan korkotason mukana. Korkorakenteen dynamiikkaa ja eri riskien "markkinahintaa" kuvaavat parametrit on tässäkin estimoitava empiirisesti.[18]

Brennan - Schwartz -malli hinnoittelee kaikki velkakirjat oletetun stokastisen prosessin ja pääomamarkkinoiden tasapainoehdon perusteella. Kunkin velkakirjan odotettu tuotto riippuu sen arvon herkkyydestä lyhyen koron ja pitkän koron muutosten suhteen sekä näiden riskien "markkinahinnoista". Jokaisella velkakirjalla on herkkyysmittari kumpaankin faktoriin nähden; näitä osittaisderivaattoja voidaan kutsua lyhyen koron duraatioksi ja pitkän koron duraatioksi.

Cox - Ingersoll - Ross ja Brennan - Schwartz -mallien duraatiomittarit ovat tietenkin teoreettisesti ongelmattomampia kuin a priori -oletuksiin perustuvat duraatiot, mutta ne ovat laskennallisesti paljon vaivalloisempia eivätkä ole osoittautuneet empiirisesti juuri paremmiksi. Lisäksi korkorakenteen dynamiikkaa ja eri riskien "mark-

---

[18] Mallin johtamisesta ja estimoinnista ks. tarkemmin Brennan - Schwartz (1983) s.11 - 17.

kinahintoja" kuvaavien parametrien ekonometrinen estimointi on altis virheille ja koko mallin virheellinen spesifikaatio on mahdollista. Tämä heikentää tasapainomalleista johdettujen duraatiomittareiden käyttöarvoa.[19]

6.5 KORKORAKENTEEN MUUTOKSEN VAIKUTUS VELKAKIRJAN ARVOON - DURAATIOAPPROKSIMAATION TARKENTAMINEN

6.5.1 VELKAKIRJAN KONVEKSISUUS

Vaikka korot muuttuisivat sijoittajan olettamalla tavalla, modifioitu duraatio on vain ensimmäisen asteen approksimaatio todellisuudessa konveksista markkina-arvo-sisäinen korko -suhteesta. Approksimaatio on hyvä vain jos korkomuutokset ovat pieniä. Mitä suurempi koronmuutos ja mitä konveksimpi suhde velkakirjan markkina-arvon ja sisäisen koron välillä on, sitä epätarkempi approksimaatio modifioitu duraatio on.

Tarkkuutta voi parantaa ottamalla huomioon Taylorin sarjan korkeampia tekijöitä. Modifioitu duraatio on siis Taylorin sarjan ensimmäinen tekijä, kun arvioidaan tietyn koronmuutoksen vaikutusta velkakirjan arvoon. Taylorin sarjan toisen asteen approksimaatio on muotoa:

$$\text{(6-10)} \quad \Delta P = \frac{dP}{dy} * \Delta y + \frac{1}{2} * \frac{d^2P}{dy^2} * (\Delta y)^2$$

$$= -P * D_{mod} * \Delta y + 0.5 * P * Cx * (\Delta y)^2$$

jossa P = velkakirjan markkina-arvo
y = sisäinen korko
D_{mod} = modifioitu duraatio
$Cx = (1 / P) * (d^2P / dy^2)$ = "konveksisuus"

Kaavan jälkimmäinen muoto on käytännön sovellutuksissa yleinen. "Konveksisuus" on käsitteenä hieman harhaan-

---

[19] Brennan - Schwartz itse artikkelissaan sekä Langetieg kommentissaan (1983, s. 28 ja 40) viittaavat virheellisen mallispesifikaation todennäköisyyteen empiiristen tulosten valossa.

johtava, koska se liittyy vain Taylorin sarjan toiseen tekijään, vaikka tämä ei selitä kaikkea markkina-arvo-sisäinen korko -suhteen konveksisuutta. Tätä korkeammat tekijät jätetään yleensä huomiotta, koska modifioitu duraatio ja konveksisuus approksimoivat todellista arvonmuutosta varsin tarkasti myös suurten koronmuutosten tapauksessa.[20]

Tavalliset kiinteäkorkoiset velkakirjat ovat positiivisesti konvekseja: niiden modifioitu duraatio kasvaa korkojen laskiessa ja pienenee korkojen noustessa. Positiivisesta konveksisuudesta täytyy yleensä maksaa (eli hyväksyä alempi sisäinen korko), koska se on sijoittajan kannalta toivottava piirre. Jos näet kahdella velkakirjalla on sama duraatio, tietty koronnousu laskee niistä (positiivisesti) konveksimman hintaa vähemmän ja tietty koronlasku nostaa sen hintaa enemmän kuin vähemmän konveksin velkakirjan hintaa.

Velkakirjan arvon ja sisäisen koron epälineaarisuus johtuu ennen kaikkea siitä, että korkotason muutos muuttaa velkakirjan eriaikaisten maksusuoritusten suhteellista painoa ja siten velkakirjan duraatiota.[21] Siksi velkakirjan "konveksisuus" riippuu olennaisesti sen maksusuoritusrakenteen hajanaisuudesta. "Konveksisuuden" suhde hajanaisuuteen voidaan ilmaista seuraavasti, jos Macaulay-duraation taustaoletukset ovat voimassa:[22]

$$\text{(6-11)} \quad Cx = \frac{1}{(1 + y / f)^2} * M^2 + D^2 + \frac{D}{f}$$

jossa Cx = "konveksisuus"
M^2 = hajanaisuus
D = Macaulay-duraatio
y = sisäinen korko
f = vuosittainen kuponginmaksufrekvenssi

---

20 Ks. esim. Bierwag - Kaufman - Latta (1988) s.23.

21 Ks. lukua 3.3.

22 Fage (1986) s.67 - 70. Hajanaisuuden käsitteestä tarkemmin ks. lukua 4.2 ja erityisesti kaavaa (4-12).

Konveksisuuden merkitys korkoriskin hallinnassa korostuu, kun arvioidaan optioita tai velkakirjoja, joihin sisältyy optioita kuten takaisinostoprovisio. Näiden konveksisuus saattaa näet olla negatiivinen.[23]

6.5.2 DURAATIOVEKTORI JA STOKASTISEN PROSESSIN RISKI

Kun oletus korkorakennetta ohjaavasta stokastisesta prosessista on tehty, koronmuutoksen hintavaikutuksen approksimaatiota voi siis tarkentaa Taylorin sarjan korkeampien tekijöiden avulla. Uusimmissa tutkimuksissa on havaittu, että näiden tekijöiden lisäämisellä duraatiovektoriin on toinenkin vaikutus: stokastisen prosessin riski vähenee.

Pystyäkseen arvioimaan velkakirjan korkoriskiä jonkin duraatiomittarin avulla sijoittajan on pakko tehdä jokin oletus korkorakenteen stokastisesta prosessista. Käytännössä on todennäköistä, että korkorakenne muuttuu muulla kuin oletetulla tavalla. Tätä stokastisen prosessin väärin identifioimisen riskiä ei voi välttää, elleivät sijoitussalkun maksusuoritukset vastaa ajoitukseltaan ja suuruudeltaan täsmälleen velkasalkun maksusuorituksia.[24] Tätä dedikaatiostrategiaa voi lähestyä asteittain replikoimalla yhä useampia duraatiovektorin komponentteja.

Garbade (1985b) ja Goodman - Vijayaraghavan (1987) johtivat duraatiovektorin seuraavasti. Jokaisen maksusuoritusvirran rakennetta voidaan kuvata tietyillä ominaispiirteillä, joista tärkein on nykyarvo. Garbade (1985b, s.3) kutsuu rakenteen muita keskeisiä ominaispiirteitä momenteiksi ja Goodman - Vijayaraghavan (1987) duraatiovektorin komponenteiksi. Ensimmäinen momentti on

---

[23] Konveksisuudesta tarkemmin ks. Garbade (1985a), Klotz (1985) ja Yawitz (1986).

[24] Velkasalkun maksusuoritusrakenteen replikoimiseen perustuvaa dedikaatiostrategiaa kuvattiin luvussa 4.2. Samassa luvussa käsiteltiin stokastisen prosessin riskin minimoimista hajanaisuuden käsitteen avulla.

Macaulay-duraatio. Vektorin muut komponentit (D_2, D_3, ..., D_m) perustuvat Taylorin sarjan laajennuksiin.

$$(6\text{-}12)\quad D_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i{}^j * PV(CF_i)}{\sum_{i=1}^{n} PV(CF_i)}$$

jossa D_j = duraatiovektorin j:s komponentti
s.e. j = 1,2,...,m
t_i = maksusuorituksen i juoksuaika
$PV(CF_i)$ = maksusuorituksen i nykyarvo

Duraatiovektorin kolmen ensimmäisen komponentin voi tulkita kuvaavan riskejä, jotka liittyvät korkorakenteen paralleeleihin tasomuutoksiin, korkorakenteen jyrkkyyden muutoksiin ja korkorakenteen käyryyden muutoksiin. Koska mainittujen muutosten on empiirisesti havaittu olevan ortogonaalisia, niiden riskimittareita voi tarkastella toisistaan erillään. Näiden kolmen faktorin vaihtelut selittävät toteutuneita korkorakenteen muutoksia erittäin tarkasti.[25]

Garbaden (1985b, s.5) yleisen immunisaatioteorian mukaan korkorakenteen muutoksen vaikutus maksusuoritusvirran arvoon riippuu (a) maksusuoritusvirran alkuperäisestä nykyarvosta, (b) korkorakenteen muutoksen luonteesta ja (c) maksusuoritusvirran rakenteesta, jota duraatio-vektori kuvaa. Sijoitus- ja velkasalkun duraatiovektorien ensimmäisen komponentin asettaminen yhtä suureksi suojaa korkorakenteen paralleeleja muutoksia vastaan. Toisenkin komponentin asettaminen yhtä suureksi suojaa tämän lisäksi sellaista korkorakenteen muodonmuutosta vastaan, jossa diskonttokoron muutos on suorassa suhteessa maksusuorituksen juoksuaikaan. Kolmannen komponentin asettaminen yhtä suureksi suojaa vielä tiettyä muunlaista korkorakenteen muodonmuutosta vastaan. Ääritapaus on siis dedikaatiostrategia, jolloin stokastisen prosessin riskiä ei ole lainkaan.

---

[25] Garbade (1986) ja Chambers - Carleton - McEnally (1988).

On syytä korostaa, että duraatiovektorin komponenttien määrän lisääminen sekä tarkentaa edellisiin faktoreihin liittyvän riskin approksimaatiota että antaa ensimmäisen asteen suojaa jonkin uuden faktorin riskiä vastaan. Esimerkiksi sijoitus- ja velkasalkun D_1:n ja D_2:n asettaminen yhtä suuriksi antaisi toisen asteen suojaa korkorakenteen paralleeleja tasomuutoksia vastaan (modifioitu duraatio ja konveksisuus) ja ensimmäisen asteen suojaa jyrkkyysmuutoksia vastaan.

Taulukko 3. Duraatiovektorin suhde eri faktoreihin.
[Lähde: Goodman - Vijayaraghavan (1987) s.98.]

Duraatio-vektorin komponentti	Tasomuutos	Jyrkkyysmuutos	Käyryysmuutos
D_1	1. aste	-	-
D_2	2. aste	1. aste	-
D_3	3. aste	2. aste	1. aste

Duraatiovektorin käyttö vaatii vähemmän rajoittavia oletuksia korkorakenteen muutostavoista kuin luvussa 6.4 esitetyt duraatiomallit sellaisenaan: niissä immunisaation onnistuminen edellyttää stokastisen prosessin valinnan osumista oikeaan. Duraatiovektorin korkodynamiikalle antamaa vapautta ei kuitenkaan saada ilman kustannuksia: useampien komponenttien replikointi vähentää vapausasteita sijoitussalkun rakentamisessa ja pakottaa yleensä heikentämään diversifikaatiota tai hyväksymään alhaisemman sisäisen koron.[26]

6.6 SUUNNITTELUJAKSON PIDENTÄMISEN VAIKUTUS

Modifioitu duraatio mittaa vain sijoituksen hintariskiä eikä lainkaan jälleensijoitusriskiä, joten se on sel-

---

[26] Chambers - Carleton - McEnally (1988) s.90 - 91 ja Garbade (1985b) s.9.

laisenaan mielekäs korkoriskin mittari vain, jos suunnittelujakso on hetkellinen (äärettömän lyhyt). Jos suunnittelujakso ei ole hetkellinen, sijoituksen korkoriskiä mittaa sen Macaulay-duraation ja suunnittelujakson jäljellä olevan pituuden erotus. Tietyn suunnittelujakson nimellistuotto voidaan varmistaa täydellisesti sijoittamalla jakson lopussa erääntyvään nollakuponkilainaan. Immunisaatioteoreeman mukaan tämä tuotto voidaan tiettyjen oletusten vallitessa varmistaa myös asettamalla sijoitusten Macaulay-duraatio suunnittelujakson pituiseksi.

Ajan kulumisen vaikutus duraatioon ei yleensä ole lineaarinen. Vain nollakuponkilainan Macaulay-duraatio lyhenee samaa vauhtia kuin suunnittelujakso. Samanduraatioiset salkut voivat lisäksi lyhentyä eri vauhdilla, jos niillä on erilainen maksusuoritusrakenne. Tämän vuoksi immunisaatiostrategia edellyttää ajoittain toistuvaa duraation ja suunnittelujakson keston (tai saatavien ja velkojen duraatioiden) yhtäsuuruuden palauttamista.

Ajan kulumisen vaikutus velkakirjan duraatioon ja korkoriskillisyyteen tekee epämielekkääksi velkakirjan tuoton varianssin laskemisen historiallisesta aineistosta. Duraation ja tuoton varianssin historiallista suhdetta voi kuitenkin verrata rakentamalla ja ylläpitämällä vakioduraatioisia portfolioita. Näiden duraatio ei lyhene ajan kuluessa, joten suunnittelujakso pysyy hetkellisenä ja on mahdollista mitata modifioidun duraation menestystä hetkellisen tuoton vaihtelujen selittäjänä.

6.7 KORKORISKIN SUHDE MUIHIN RISKILÄHTEISIIN

Sijoittajan kannalta on tärkeintä tarkastella portfolion kokonaisriskiä eli kaikkien riskilähteiden yhteisvaikutusta. Kokonaisriskin arviointi on vaikeaa, muun muassa koska sekä eri riskilähteiden että eri sijoituskohteiden välinen korrelaatio on epätäydellistä ja vaihtelevaa ja koska yhteinen mittayksikkö puuttuu. Kokonaisriskiä kuvannee parhaiten sijoitusportfolion kokonaistuoton varianssi (tai keskihajonta), mutta sijoittajaa kiinnostaa toki myös se, mitkä tekijät ovat aiheuttaneet tuoton vaihtelut. Käytännössä sijoittaja ei näet voi valita tuoton varianssia etukäteen, vaan hänen on otettava kantaa yksittäisiin riskitekijöihin. Usean faktorin mallit voivat olla tässä avuksi, ja ne kuvaavat todellisuutta todennäköisesti paremmin kuin yksifaktorimalli, koska reaalimaailmassa on useita epävarmuuden lähteitä.

Velkakirjasijoitusten tapauksessa tärkeimpiä muita epävarmuuden lähteitä kuin korkoriski ovat luottoriski, inflaatioriski, valuuttakurssiriski, likvidiysriski ja takaisinostoriski. Näiden yhteisvaikutusta tai keskinäisiä suhteita ei ole juuri käsitelty alan kirjallisuudessa.

Luottoriskin vaikutuksen velkakirjasalkun kokonaisriskiin voi yrittää ottaa huomioon usean faktorin mallilla. Luottoriski ei ilmeisesti ole luonteeltaan yhtä systemaattista kuin korkoriski, joten sitä voi vähentää hajauttamisella.[27]

Luottoriskin ja korkoriskin yhteisvaikutusta on vaikea mitata, koska riskit eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan liittyvät toisiinsa monin tavoin. Luottotappioiden määrän on empiirisesti havaittu kasvavan korkotason noustessa. Tätä ilmiötä on selitetty (1) lainanottajien rahoitusvelvoitteiden odottamattomalla kasvulla korkotason noustessa (esimerkkinä kehitysmaiden velkakriisi 1980-luvun alussa) ja (2) lainamarkkinoiden epätäydellisyydellä: korkea korkotaso saattaa johtaa huonoimpien luottoriskien valikoitumiseen lainanottajakannassa ja muuttaa lainansaajien käyttäytymistä riskillisemmäksi (ns. adverse selection ja moral hazard -ilmiöt).[28] Korkovolatiilisuuden kasvu kasvattaa korkoriskiä suora-

---

[27] Bierwag (1987a) s.329 - 331 ja Jacob - Pettit (1984) s.473 - 481.

[28] Luottotappioiden ja korkotason välistä suhdetta ovat käsitelleet luotonsäännöstelyn näkökulmasta mm. Stiglitz - Weiss (1981) ja Devinney (1986).

naisesti ja luottoriskiä välillisesti. Lisäksi on ilmeistä, että lainan duraation pidentäminen kasvattaa maksuhäiriön todennäköisyyttä ja että toisaalta luottoriskin olemassaolo vaikuttaa lainan duraatioon.

Bierwag ja Kaufman (1988) ovat tarkastelleet, miten luottoriskillisiä velkakirjoja voidaan analysoida perinteisen yhden faktorin duraatiomallin avulla. Koska luottoriskillisten velkakirjojen maksusuoritukset eivät ole varmoja, Macaulay-duraation suoranainen käyttö ei ole perusteltua.

Luottotappion mahdollisuuden takia luottoriskillisiltä velkakirjoilta vaaditaan korkeampaa korkoa, riskipreemiota. Maksuhäiriön todennäköisyys voidaan arvioida juuri riskipreemion perusteella, mutta ei häiriön tapahtumisajankohtaa. Maksuhäiriöille tulee määritellä stokastinen prosessi, joten luottoriskillisen velkakirjan arvoon vaikuttaa kaksi eri stokastista prosessia. Jos lainanottaja myöhästyy maksuissaan, velkakirjan duraatio pitenee. Jos hän taas laiminlyö maksuja täysin, vaikutus duraatioon riippuu siitä, kohdistuuko laiminlyönti lähinnä velkakirjan ensimmäisiin vai viimeisiin maksusuorituksiin.

Bierwag ja Kaufman (1988, s.42) esittävät maksuhäiriösopeutetun duraation laskukaavan, joka diskonttaa odotetut maksusuoritukset nykyarvoisiksi maksuhäiriösopeutetulla sisäisellä korolla. Duraation laskukaavalla ei ole yleistä muotoa, vaan se riippuu korkojen stokastisen prosessin lisäksi maksuhäiriöiden stokastisesta prosessista tehdystä oletuksesta.

Korkoriskin käsite liittyy sijoituksen nimellistuoton varmuuteen ja inflaatioriski reaalituoton varmuuteen. Määritelmällisesti korkoriskittömään sijoitukseen saattaa liittyä inflaatioriski, koska immunisaatio takaa pitkälle suunnittelujaksolle vain nimellistuoton eikä reaalituottoa.[29] Inflaatioriski ei - toisin kuin korkoriski - siis riipu suunnittelujakson pituudesta, vaan kasvaa velkakirjan duraation mukana. Inflaatioriski on nimenomaan pitkän suunnittelujakson ongelma, koska lyhyen jakson aikana odottamattomat inflaatiomuutokset[30] eivät ole yhtä voimakkaita. Lyhyellä suunnittelujaksolla korkoriskin ja inflaatioriskin minimointitavoitteiden välillä ei ole ristiriitaa. Pitkän suunnittelujakson reaalituoton voi varmistaa parhaiten lyhyillä tai vaihtuvakorkoisilla tai inflaatioindeksoiduilla sijoituksilla, mutta näihin liittyy epävarma nimellistuotto.[31]

Valuuttakurssiriski vaikuttaa ulkomaisen valuutan määräisten velkakirjasijoitusten tuottoon. Valuuttakurssiriskin ja korkoriskin yhteisvaikutus kokonaistuoton vaihteluun riippuu siitä, miten valuuttakurssivaihtelut korreloivat korkorakenteen muutosten kanssa. Valuuttakurssiriski on suhteessa sitä tärkeämpi, mitä lyhyempi velkakirja on, koska lyhyen velkakirjan arvon korkoherkkyys on hyvin pieni.

Likvidiysriskiä (uhka ettei ole käteistä silloin kun tarvitaan) on vaikea mitata, mutta se on luonnollisesti suurempi sijoituksissa, joissa rahat sidotaan pitkäksi

---

29 Jos immunisoija pyrkii jatkuvasti ylläpitämään sijoitus- ja velkasalkkujen nykyarvoja ja korkoherkkyyksiä yhtä suurina (eikä varmistamaan tietyn pidemmän jakson nimellistuottoa), inflaatioriskit ovat yhtä suuria taseen kummallakin puolella ja siten kumoutuvat.

30 Odotettu inflaatio vaikuttaa tietenkin nimelliskorkoihin, joten inflaation ei sinänsä täydy kasvattaa velkakirjan riskiä. Tarkemmin ks. esim. Sharpe (1985) s.257 - 264 ja Virén (1988) s.21 - 30.

31 Nimellisiin suureisiin keskittyminen on useiden rahoitusalan teorioiden perusongelma; onhan se ilmeisessä ristiriidassa sen yleisen talousteoreettisen oletuksen kanssa, että taloudenpitäjät ovat kiinnostuneita reaalisuureista maksimoidessaan odotettua hyötyään. Kirjallisuudessa on kuvattu, miten reaalista hyötyään maksimoivien taloudenpitäjien pyrkimys suojautua inflaatioepävarmuutta vastaan vaikuttaa mm. indeksoitujen velkakirjojen kysyntään (Bodie 1988 ja Fischer 1975), rahan kysyntään (Boonekamp 1978) sekä laajemmin optimaalisen portfolion valintaan ja sijoituskohteiden markkinahintoihin (Fama - Farber 1979 ja Poncet 1983).

ajaksi kerrallaan. Likvidiysriski kasvaa siten duraation kasvaessa, mutta likvidiyserot selittyvät usein paremmin velkakirjojen luottoriskieroilla kuin duraatioeroilla.

Moniin velkakirjoihin liittyy lainanottajan takaisinosto-oikeus (ns. call-provisio). Jos velkakirja todennäköisesti maksetaan takaisin ennen lopullista eräpäivää, tämä pitää ottaa huomioon duraatiolaskelmassa. Takaisinostoriskin vaikutusta velkakirjan duraatioon voi onneksi tarkastella optioteorian avulla, koska takaisinostoprovisiolla varustetun velkakirjan ostaminen vastaa yhtä pitkän tavallisen velkakirjan ostamista ja siihen liittyvän osto-option myymistä lainanottajalle.[32]

Takaisinostoriski on ainoa ei-korkoriski, johon voi helposti soveltaa duraatioanalyysia. Tämä vahvistaa ajatusta, että duraatioanalyysin suoraviivainen soveltaminen velkakirjoihin, joihin liittyy muuta kuin koroista johtuvaa epävarmuutta, on vaarallista ja vaatii korkoriskin ja muiden epävarmuuden lähteiden suhteen huolellista arvioimista.

---

[32] Bookstaber (1987), Dunetz - Mahoney (1988) ja Toevs (1986b) esittävät hieman toisistaan poikkeavat tavat laskea takaisinostoprovisiolla varustetun velkakirjan duraation.

7 EMPIIRISTEN TUTKIMUSTEN TULOKSIA

7.1 IMMUNISAATIOSIMULAATIOT

Duraatiota koskevat empiiriset tutkimukset voidaan jakaa kahteen luokkaan: erilaisten yksifaktorimallien immunisaatiokykyä simuloiviin tutkimuksiin (7.1) sekä korkorakenteen dynamiikkaa regressio- tai faktorianalyysin avulla selvittäviin tutkimuksiin (7.2).[1] Tutkimuksia on tehty lähes ainoastaan amerikkalaisella aineistolla. Yhdysvaltojen velkakirjamarkkinat ovat maailman suurimmat ja kehittyneimmät ja - mikä tärkeintä - niiltä on saatavilla paras historiallinen data.

Useimmat immunisaatiosimulaatiot vertaavat Macaulay-duraation tehokkuutta korkoriskin poistajana muihin yksinkertaisiin strategioihin. Immunisaatiolla pyritään varmistamaan tietyn suunnittelujakson nimellistuotto esimerkiksi jakson lopussa erääntyvän velan kattamiseksi. Suunnittelujakson lopussa erääntyvän - joko todellisen tai korkorakenteen implikoiman - nollakuponkilainan lupaama tuotto on luonnollinen tavoitetuotto. Eri strategioiden onnistumista mittaa niiden toteutuneiden tuottojen keskimääräinen absoluuttinen poikkeama tavoitetuotosta tai vaihtoehtoisesti keskineliövirhe (RMSE).

Macaulay-duraatiota on simulaatiotutkimuksissa verrattu sekä yksinkertaisempiin vaihtoehtoihin, kuten juoksuaikastrategiaan (suunnittelujakson lopussa erääntyvän kuponkilainan ostamiseen ja kuponkien jälleensijoittamiseen samaan velkakirjaan), että muihin yhden ja kahden faktorin duraatiomalleihin. Usean faktorin malleja käsitellään luvussa 7.2.

Fisher - Weil (1971) simuloivat immunisaatiostrategiaa eripituisilla (5, 10 ja 20 vuotta) suunnittelujaksoilla käyttäen vuosien 1925 - 1968 amerikkalaista dataa.

---

[1] Bierwag (1987a) s.287 - 312.

Juoksuaikastrategian ja duraatiostrategian[2] tulosten vertailu kertoi, että jälkimmäinen oli ollut tarkempi 77 - 96 % ajasta ja että duraation suhteellinen paremmuus korostui, kun suunnittelujaksoa pidennettiin.

Bierwag - Kaufman - Schweitzer - Toevs (1983) vertasivat Macaulay-duraatiota juoksuaikastrategian lisäksi muihin stokastisiin prosesseihin perustuviin duraatioihin, kuten Fisher - Weil -duraatioon ja Khang-duraatioon, johon liittyy oletus, että lyhyet korot vaihtelevat enemmän kuin pitkät korot. Tutkimuksessa käytettiin kymmenen vuoden pituisia suunnittelujaksoja ja vuosien 1925 - 1978 amerikkalaista korkodataa. Alla on osa tutkimuksen koko mittausjakson ja sen viimeisen alajakson tuloksista.

Taulukko 4. Eri riskimittarien käyttö immunisaatiostrategiassa. [Lähde: Bierwag - Kaufman - Schweitzer - Toevs (1983)]

(a) 1925 - 1978 Luvattu tavoitetuotto: 3.364 %

	Toteutunut tuotto	Parempi kuin juoksuaika-strategia	0.05 %-yksikön sisällä luvatusta tuotosta
Macaulay	3.286 %	86 % (ajasta)	48 %
Fisher - Weil	3.289 %	89 %	48 %
Khang	3.236 %	82 %	27 %
Juoksuaika	3.329 %	-	16 %

(b) 1954 - 1978 Luvattu tavoitetuotto: 4.064 %

	Toteutunut tuotto	Parempi kuin juoksuaika-strategia	0.05 %-yksikön sisällä luvatusta tuotosta
Macaulay	4.026 %	87 % (ajasta)	80 %
Fisher - Weil	4.027 %	87 %	80 %
Khang	3.930 %	67 %	13 %
Juoksuaika	4.234 %	-	13 %

---

[2] Fisher - Weil -duraatio perustuu additiivisen ja multiplikatiivisen stokastisen prosessin yhdistelmään. Se poikkeaa hieman Macaulay-duraatiosta, mutta empiiristen tulosten valossa ne ovat hyvin samanlaisia.

Tutkimus osoitti, että Macaulay-duraation käyttöön perustuva immunisaatiostrategia antaa parempia tuloksia kuin juoksuajan käyttö ja yleensä yhtä hyvän tuloksen kuin monimutkaisempiin stokastisiin prosesseihin liittyvien yksifaktoriduraatioiden käyttö immunisaatiossa. Useat muut tutkimukset ovat vahvistaneet nämä tulokset.[3] Myöskään Cox - Ingersoll - Rossin (1979) stokastinen duraatio ei ole menestynyt empiirisissä immunisaatiosimulaatioissa paremmin kuin Macaulay-duraatio.[4]

Ingersollin (1983) tutkimus on ainoa, jossa juoksuaikastrategia on immunisoinut yhtä hyvin kuin duraatiostrategia. Syytä poikkeavaan tulokseen on etsitty Ingersollin käyttämästä hintadatasta, korkorakennemallista sekä portfolioiden juoksuaikastrategiaa suosivasta koostumuksesta. Yleisemminkin on havaittu, että suunnittelujakson lopussa erääntyvän lainan sisällyttäminen portfolioon parantaa immunisaation tuloksia, koska tällä osalla portfoliosta ei ole lainkaan hintariskiä.[5]

Chambers - Carleton - McEnally (1988) osoittivat, että Macaulay-duraation immunisaatiotulosta voi parantaa käyttämällä duraatiovektorin korkeampia momentteja. Tulos on odotettu, koska näin päästään lähemmäksi täysin riskitöntä dedikaatiostrategiaa. Seuraavassa luvussa käsitellään toista tapaa parantaa Macaulay-duraation immunisaatiotulosta: usean faktorin malleja.

7.2 REGRESSIO- JA FAKTORIANALYYSIIN PERUSTUVAT TUTKIMUKSET

Regressio- ja faktorianalyysin avulla pyritään tunnistamaan stokastinen prosessi, joka kuvaa korkorakenteen

---

[3] Babbel (1983), Bierwag - Kaufman - Latta (1988), Chambers - Carleton - McEnally (1988) ja Nelson - Schaefer (1983).

[4] Ks. Haugen (1986) s.345 - 347.

[5] Bierwag (1987a) s.314 - 315 ja Bierwag - Kaufman - Latta (1988) s.15.

muutoksia mahdollisimman tarkasti ja joka voidaan kiteyttää yhteen tai muutamaan selittävään tekijään.

Macaulay-duraation taustaoletus horisontaalisen korkorakenteen paralleeleista liikkeistä edellyttää eripituisten korkojen täydellistä korrelaatiota ja samoja volatiilisuuksia. Useiden empiiristen tutkimusten mukaan lyhyet korot ovat pitkällä aikavälillä vaihdelleet voimakkaammin kuin pitkät korot.[6] Korrelaatio eripituisten korkojen muutosten välillä on yleensä korkea, mutta ei täydellinen.

Taulukko 5. Yhdysvaltojen valtionlainojen nykykorkorakenne kesäkuun 1983 ja joulukuun 1985 välillä: viikottaisten koronmuutosten keskihajonnat ja korrelaatiot. [Lähde: Garbade (1986)]

Sektori:	2 v.	6 v.	10 v.	20 v.
Koronmuutoksen keskihajonta:	0.208 %	0.228 %	0.215 %	0.191 %
Korrelaatio 2 v:n kanssa:	1.0	0.931	0.860	0.769
6 v:n kanssa:		1.0	0.979	0.863
10 v:n kanssa:			1.0	0.883
20 v:n kanssa:				1.0

Macaulay-duraatio on menestynyt yllättävän hyvin myös empiirisessä vertailussa kahden faktorin mallien kanssa. Useimmissa tutkimuksissa kahden faktorin käyttö on toki parantanut immunisaation tarkkuutta.[7] Yhdessä tutkimuksessa Macaulay-duraatio on immunisoinut jopa hieman paremmin kuin Nelson - Schaeferin (1983) empiirisesti estimoituihin korkoherkkyyksiin perustuva kahden faktorin

---

6 Esim. Ingersoll (1983) s.175 ja Yawitz - Marshall (1981). Macaulay-duraation on tämän vuoksi väitetty yliarvioivan pitkien velkakirjojen suhteellista korkoriskiä. Toisaalta lyhyet korot eivät ole aina vaihtelevampia kuin pitkät korot - eivät esimerkiksi taulukon 5 melko lyhyellä tarkastelujaksolla.

7 Bierwag - Kaufman - Latta (1988), Brennan - Schwartz (1983) ja Ingersoll (1983).

malli. Syyksi Nelson - Schaefer epäilivät sitä, että heidän malliinsa ja Macaulay-duraatioon perustuvat immunisoivat portfoliot ovat rakenteeltaan hyvin samanlaisia, koska velkakirjan faktoriherkkyys pitkän koron suhteen - selvästi tärkein riskilähde - korreloi vahvasti Macaulay-duraation kanssa.

Elton - Gruber - Nabar (1986) vertasivat Macaulay-duraation immunisaatiokykyä monimutkaisempiin vaihtoehtoihin tuottoa generoivan prosessin[8] muodossa. Elton - Gruber-Nabar (EGN) uskoivat tuottoa generoivaan prosessiin perustuvan testaustapansa pystyvän erottamaan eri mallien keskinäisen paremmuuden selvemmin kuin aikaisemmat immunisaatiosimulaatiot, joissa verrattiin suunnittelujakson aikana toteutunutta tuottoa sen alussa luvattuun tuottoon. EGN seurasivat arbitraarisesti valitun velkasalkun hintakehitystä koko suunnittelujakson ajan ja mittaavat, minkä mallin immunisoiva salkku[9] replikoi tämän hintakehityksen tarkimmin. Koska yksittäisen velkakirjan riskiominaisuudet muuttuvat ajan kuluessa, EGN ylläpitivät vakiojuoksuaikaisia salkkuja.[10] He käyttivät Yhdysvaltojen valtionlainojen hintadataa vuosilta 1963 - 1982.

EGN päätyivät Macaulay-duraation kannalta huonompiin tuloksiin kuin aiemmat tutkijat. Kahden faktorin duraatiomalli immunisoi paremmin kuin Macaulay-duraatio ja regressio- ja faktorianalyysiin[11] perustuvat yhden ja

---

[8] Tuottoa generoiva prosessi on funktio, joka suhteuttaa arvopaperin tuoton yhteen tai useampaan yleiseen faktoriin ja arvopaperin uniikkiin tekijään. (Elton - Gruber - Nabar 1986 s.1.)

[9] Immunisoiva salkku on APT:n näkökulmasta salkku, jonka herkkyydet ovat nollia kaikkien tuottoa generoivan prosessin faktorien suhteen.

[10] Niihin liittyvistä ongelmista ks. lukua 5.2.

[11] Regressio- ja faktorimallit poikkeavat sikäli toisistaan, että edellisessä faktoriherkkyydet estimoidaan empiirisesti, mutta selittävät muuttujat (faktorit) määritellään etukäteen. Faktorianalyysissa empiirinen aineisto määrää sekä muuttujat että faktoriherkkyydet.

kahden faktorin mallit immunisoivat selvästi paremmin kuin duraatiomallit. Macaulay-duraatio immunisoi kuitenkin edelleen selvästi paremmin kuin juoksuaikastrategia ja muut naiivit strategiat. Kaikkien immunisaatiotekniikoiden tulos parani suunnittelujaksoa pidennettäessä.

EGN tutkivat myös eri mallien kykyä ennustaa tuottoja tarkasti sekä kykyä selittää ja ennustaa tuottojen välisiä kovariansseja. Jälleen kahden faktorin mallit menestyivät paremmin kuin yksifaktorimallit ja duraatiomallien ennustamiskyky oli heikompi kuin empiirisesti johdettujen mallien. Kuitenkin myös Macaulay-duraatio pystyi selittämään yli puolet tuottojen välisestä korrelaatiosta.

Gultekin - Rogalski (1984) tutkivat empiirisesti eri duraatiomallien kykyä selittää 1 - 12 kuukauden pituisten tarkastelujaksojen toteutuneita tuottoja käyttäen Yhdysvaltain valtionlainojen hintadataa vuosilta 1947 - 1976. He pyrkivät selvittämään, onko velkakirjan tuoton vaihtelujen ja duraation välinen suhde lineaarinen, sekä onko duraatio täydellinen korkoherkkyyden mittari.

Ristiriitaisia kannanottoja herättäneen tutkimuksen tulokset eivät olleet kannustavia. Gultekin - Rogalskin mukaan mikään duraatiomalli ei selittänyt toteutuneita tuottoja kovin hyvin. Macaulay-duraatio ja jopa juoksuajan käyttö antoivat yhtä hyvän - tai huonon - tuloksen kuin esimerkiksi Khang-duraation ja Cox - Ingersoll-Rossin stokastisen duraation käyttö. Lineaarisuuden ja täydellisyyden hypoteesit hylättiin kaikissa tapauksissa. Lisäksi Gultekin - Rogalski totesivat, että heidän empiirisesti estimoimansa neljän faktorin malli selittää suuremman osan tuotosta kuin yksikään yksifaktoriduraatiomalli.

Gultekin - Rogalskin tutkimuksen teoreettista osaa ja empiiristä analyysia on kritisoitu voimakkaasti.[12] Tutkimuksessa oletettiin velkakirjan suhteellisen arvon-

---

[12] Kritiikistä tarkemmin ks. Bierwag (1987a) s.311 - 312 ja Bierwag - Kaufman - Latta - Roberts (1987).

muutoksen kuvaavan hyvin velkakirjan tuottoa usean kuukauden tarkastelujaksolla; tällöinhän erilaiset kuponkitulot jäävät kokonaan huomiotta. Gultekin-Rogalskin lineaarisuustestissä oletettiin eripituisten korkojen olevan yhtä volatiileja, mikä on empiiristen havaintojen vastaista. Muut mallit kuin Macaulay-duraatio eivät oleta korkovolatiilisuuksia yhtä suuriksi, joten niiden osalta testistä saadut kerroinestimaatit ovat harhaisia. Juoksuaikastrategian hyvää menestystä on selitetty edellisen lisäksi tarkastelujaksojen lyhyydellä.

Lineaarisuus- ja täydellisyyshypoteesien hylkääminen sekä neljän faktorin mallin parempi tuottojen selityskyky eivät sinänsä olleet yllättäviä. Luvussa 6 esiteltiin monia syitä tuoton vaihtelu - duraatio -suhteen epälineaarisuuteen ja duraation epätäydellisyyteen korkoherkkyyden mittarina: stokastisen prosessin riski, lyhyiden korkojen pitkiä suurempi volatiilisuus ja todellisen tuottofunktion konveksisuus. Lienee sitä paitsi kohtuullista odottaa, että usean faktorin malli tarkentaa yksifaktorimallin tuloksia.

7.3 YHTEENVETO

Yksinkertainen Macaulay-duraatio on menestynyt yllättävän hyvin empiirisissä tutkimuksissa. Sen käyttöön perustuva immunisaatiostrategia on yleensä antanut tuloksen, joka on ollut erittäin lähellä suunnittelujakson luvattua tuottoa. Duraation käyttöön perustuva immunisaatio poistaa siis pääosan korkoriskistä, mutta ei kaikkea. Vastaavasti Macaulay-duraatio selittää huomattavan osan velkakirjatuottojen vaihtelusta, mutta ei kaikkea: yksi faktori on Yhdysvalloissa selittänyt mittausjaksosta riippuen 50 - 95 % korkorakenteen muutoksista. Garbade (1986) kutsuu tätä faktoria approksimatiivisesti paralleeliksi tasomuutokseksi.

Suhteellisessa vertailussa Macaulay-duraatio on yleensä voittanut juoksuaikastrategian ja immunisoinut yhtä hyvin kuin muut yksifaktoriduraatiot, jotka ovat yhdenmukaisia realistisempien korkorakenteen dynamiikkaa koskevien oletusten kanssa. Tuloksia voi ilmeisesti parantaa jonkin verran käyttämällä usean faktorin malleja, estimoimalla faktoriherkkyydet empiirisesti tai tarkentamalla approksimaatiota duraatiovektorin korkeampien momenttien avulla.

Empiirisesti on havaittu, että lyhyet korot vaihtelevat pitkällä aikavälillä enemmän kuin pitkät korot, joten Macaulay-duraatio yliarvioi pitkien velkakirjojen suhteellista riskiä. Eripituisten velkakirjojen välinen korrelaatio on yleensä sitä suurempi, mitä lähempänä näiden juoksuajat ovat toisiaan. Korrelaatio luonnollisesti heikkenee, jos vertaillaan eri lainaajien eri valuutoissa liikkeellelaskemia velkakirjoja. Samoin korkovolatiilisuudet voivat vaihdella eri markkinoiden kesken. Nämä tekijät vähentävät duraation hyödyllisyyttä epähomogeenisten velkakirjojen korkoriskin mittarina. On mahdollista, että Macaulay-duraatio sopii erityisen hyvin korkoriskittömän portfolion rakentamiseen (immunisaatioon), mutta ei pysty mittaamaan velkakirjaportfolion positiivista korkoriskiä yhtä hyvin kuin monimutkaisemmat mallit.

8 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Duraatio kehitettiin alunperin korvaamaan juoksuaika kiinteäkorkoisen velkakirjan korkoriskin mittarina. Macaulay-duraatio on maksusuoritusten nykyarvoilla painotettu keskimääräinen juoksuaika. Merkittävämpää on kuitenkin se, että Macaulay-duraation modifioitu versio mittaa tiettyjen oletusten vallitessa velkakirjan arvon korkoherkkyyttä varsin tarkasti.

Duraatio on tärkeä apuväline useissa korkoriskin hallintastrategioissa. Keskeisin sovellutus on immunisaatiostrategia, jossa pyritään varmistamaan tietyn jakson nimellistuotto pitämällä sijoitussalkun duraatio suunnittelujakson pituisena. Immunisaatiostrategia havainnollistaa, miten velkakirjan korkoriski riippuu sen omien piirteiden lisäksi suunnittelujakson pituudesta ja oletetusta stokastisesta prosessista. Korkoriskin voi poistaa täydellisesti vain dedikaatiostrategialla, jossa sijoitussalkun maksusuoritukset vastaavat ajoitukseltaan ja suuruudeltaan täsmälleen velkasalkun maksusuorituksia. Yhden velkaerän tapauksessa tämä tarkoittaa sijoittamista suunnittelujakson lopussa erääntyvään nollakuponkilainaan.

Korkorakennetta ohjaavasta stokastisesta prosessista tehty oletus on duraatioanalyysissa keskeinen. Useimpiin stokastisiin prosesseihin liittyy jokin duraatiomalli, jota voidaan käyttää korkoriskin mittaamiseen ja poistamiseen. Macaulay-duraation taustalla on oletus horisontaalisen korkorakenteen paralleeleista muutoksista. Duraatioanalyysin soveltaminen sijoituskohteisiin, joihin kohdistuu korkoriskin lisäksi muita epävarmuuksia, on hankalaa ja aihetta on tutkittu vähän. Duraatiota voi käyttää korkoriskin lisäksi vain takaisinostoriskin ja osittain inflaatioriskin analysoimiseen. Muiden sijoituskohteiden riskin arvioimisessa käytetään yleensä keskiarvovarianssianalyysia. Se ei kuitenkaan sovellu velkakirja-analyysiin, koska velkakirjan riskiominaisuudet muuttuvat ajan kuluessa.

Tutkimukseni tavoitteena oli arvioida vaihtoehtoisia tapoja mitata velkakirjan korkoriskiä, kun korkoriski on määritelty tietyn suunnittelujakson nimellistuoton epävarmuudeksi, joka johtuu korkorakenteen muutoksista. Ei ole olemassa yksiselitteisesti parasta korkoriskin mittaria, koska todellinen korkoja generoiva prosessi on tuntematon ja lisäksi ilmeisesti epävakaa yli ajan. Korkoriskin mittarin empiirinen osuvuus on tällöin ratkaisevaa, mutta historiallista kokemusta ei voi peilata tulevaisuuteen ilman riskiä. Koska korkoriskin mittari on työväline riskinhallinnassa, myös laskennallinen helppous ja nopeus ovat tärkeitä ominaisuuksia.

Macaulay-duraatio on menestynyt empiirisissä tutkimuksissa yllättävän hyvin sekä absoluuttisessa mielessä että verrattaessa monimutkaisempiin duraatiomittareihin. Sen käyttö immunisaatiosimulaatioissa on pienentänyt tietyn suunnittelujakson korkoriskiä tehokkaammin kuin juoksuaikastrategian käyttö ja vähintään yhtä hyvin, kuin sellaisten yksifaktoriduraatioiden käyttö, jotka liittyvät realistisempiin oletuksiin korkorakenteen stokastisesta prosessista.

Macaulay-duraation immunisaatiotuloksia voi ilmeisesti parantaa (a) estimoimalla faktoriherkkyydet empiirisesti, (b) käyttämällä usean faktorin malleja ja (c) tarkentamalla koronmuutoksesta johtuvan arvonmuutoksen approksimaatiota duraatiovektorin korkeampien momenttien avulla. Kaikki nämä vaihtoehdot ovat kuitenkin työläämpiä ja hitaampia kuin Macaulay-duraatio. Parantuneesta tarkkuudesta saatua lisähyötyä lienee siksi syytä verrata lisäkustannuksiin.

Kohtuullisen hyvän empiirisen osuvuutensa, laskennallisen helppoutensa ja intuitiivisen ymmärrettävyytensä vuoksi Macaulay-duraatio on käytännössä yleisin korkoriskin mittari kehittyneillä velkakirjamarkkinoilla. Sitä käytettäessä on kuitenkin hyvä ottaa huomioon, että taustaoletukset edellyttävät kaikkien korkojen yhtä suuria muutoksia. Riskistä, joka liittyy korkorakenteen muodon muuttumiseen ja eripituisten korkojen erilaiseen volatiilisuuteen, Macaulay-duraatio ei kerro mitään.

Duraatiovektorin korkeampien momenttien lisääminen immunisaatiostrategiaan pienentää korkoriskiä kahdella tavalla: approksimaatio koronmuutoksen hintavaikutuksesta tarkentuu, jos oletus stokastisesta prosessista osuu oikeaan, ja toisaalta saadaan suojaa uutta faktoria vastaan siltä varalta, että stokastinen prosessi arvioidaan väärin. Vektorin momenttien määrän lisääminen pienentää siten stokastisen prosessin riskiä ja johtaa yhä lähemmäksi täysin korkoriskitöntä dedikaatiostrategiaa, esimerkiksi suunnittelujakson lopussa erääntyvän nollakuponkilainan ostamista.

Jatkotutkimuksen aiheita voisivat olla (1) portfolioteorian ja duraatioanalyysin yhteyksien - esimerkiksi intertemporaalisten CAP-mallien ja duraatiomallien suhteen - tarkempi kartoittaminen; (2) korkorakenteen vaihteluja parhaiten kuvaavan stokastisen prosessin etsiminen empiirisesti; (3) näkökulman laajentaminen nimellissuureista reaalisuureisiin: korkoriskin ja inflaatioriskin suhteen analysoiminen.

LÄHTEET

AALTONEN ARI Duraatioanalyysi pankkien korkoriskin hallinnassa. Suomen Pankin rahapolitiikan osaston keskustelualoitteita. Helsinki 1986.

AHLSTEDT MONICA - HALME LIISA Suomalaisten pankkien riskit ja kansainvälisen toiminnan seuranta. Suomen Pankin ulkomaisen rahoituksen osaston keskustelualoitteita. Helsinki 1987.

BABBEL DAVID Duration and the Term Structure of Interest Rate Volatility. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

BIERWAG GERALD O. Duration Analysis. Managing Interest Rate Risk. Cambridge, Mass. 1987. (1987a)

BIERWAG GERALD O. Bond Returns, Discrete Stochastic Processes, and Duration. Journal of Financial Research, vol. X, no. 3, Fall 1987. (1987b)

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. Durations of Non-Default-Free Securities. Financial Analysts Journal, July-August 1988.

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - LATTA CYNTHIA M. Duration Models for Interest Rate Risk Management: An Integrated Approach. Julkaisematon esitys New Orleans'ssa 21.10.1988.

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - LATTA CYNTHIA M. - ROBERTS GORDON S. Duration: Response to critics. Journal of Portfolio Management, Fall 1987.

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - SCHWEITZER ROBERT - TOEVS ALDEN The Art of Risk Management in Bond Portfolios. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management. Financial Analysts Journal, July/August 1983. (1983a)

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN Recent Developments in Bond Portfolio Immunization Strategies. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983. (1983b)

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN Single-Factor Duration Models in a Discrete General Equilibrium Framework. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983. (1983c)

BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN Bond Portfolio Immunization and Stochastic Process Risk. Journal of Bank Research, Winter 1983. (1983d)

BODIE ZVI Inflation, Index-Linked Bonds and Asset Allocation. NBER Working Paper No. 2793, December 1988.

BOOKSTABER RICHARD The Valuation and Exposure Management of Bonds with Imbedded Options. Teoksessa FABOZZI FRANK J. - POLLACK IRVING M. (toim.) The Handbook of Fixed Income Securities. Dow Jones-Irwin, 1987.

BOONEKAMP C. F. J. Inflation, Hedging and the Demand for Money. The American Economic Review, December 1978.

BOQUIST JOHN A. - RACETTE GEORGE A. - SCHLARBAUM GARY G. Duration and Risk Assessment for Bonds and Common Stocks. Journal of Finance, vol. XXX, no. 5, December 1975.

BRENNAN MICHAEL J. - SCHWARTZ EDUARDO S. Duration, Bond Pricing and Portfolio Management. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

CAKS JOHN The Coupon Effect on Yield to Maturity. Journal of Finance, vol. XXXII, no. 1, March 1977.

CAMPBELL JOHN Y. A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. Journal of Finance, vol. XLI, no. 1, March 1986.

CHAMBERS DONALD - CARLETON WILLARD - McENALLY RICHARD Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, no.1, March 1988.

CHANCE DON M. - MORGAN GEORGE E. Immunization of Floating Rate Notes. Teoksessa FABOZZI FRANK J. (toim.) Floating Rate Instruments. Probus Publishing, 1988.

CHRISTENSEN PETER E. - FABOZZI FRANK J. Bond Immunization: An Asset Liability Optimization Strategy. Teoksessa FABOZZI FRANK J. - POLLACK IRVING M. (toim.) The Handbook of Fixed Income Securities. Dow Jones-Irwin, 1987.

COPELAND THOMAS E. - WESTON J. FRED Financial Theory and Corporate Policy (3. ed.). Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

COX JOHN C. - INGERSOLL JONATHAN E. - ROSS STEPHEN A. Duration and the Measurement of Basis Risk. Journal of Business, vol 52, no. 1, January 1979.

COX JOHN C. - INGERSOLL JONATHAN E. - ROSS STEPHEN A. A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. Journal of Finance, vol. XXXVI, no. 4, September 1981.

COX JOHN C. - INGERSOLL JONATHAN E. - ROSS STEPHEN A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, vol. 53, no 2, March 1985.

DEVINNEY TIMOTHY M. Rationing in a Theory of the Banking Firm. Studies in Contemporary Economics. Berlin, 1986.

DOUGLAS LIVINGSTON Yield Curve Analysis. The Fundamentals of Risk and Return. New York Institute of Finance, 1988.

DUNETZ MARK L. - MAHONEY JAMES M. Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds. Financial Analysts Journal, May-June 1988.

DYM STEVEN - GARBADE KENNETH D. Duration: An Introduction to the Concept and its Uses. Bankers Trust Company, Topics in Money and Securities Markets, January 1984.

ELTON EDWIN J. - GRUBER MARTIN J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. New York 1987.

ELTON EDWIN J. - GRUBER MARTIN J. - NABAR PRAFULLA G. Bond Returns, Immunization and The Return Generating Process. European Finance Associationin kokouksessa Madridissa esitelty paperi, syyskuu 1986.

FAGE PAUL Yield Calculations. Credit Suisse First Boston Research, October 1986.

FAMA EUGENE F. - FARBER ANDRE Money, Bonds and Foreign Exchange. The American Economic Review, September 1979.

FISCHER STANLEY The Demand for Index Bonds. Journal of Political Economy, June 1975.

FISHER LAWRENCE - WEIL ROMAN L. Coping with the Risk of Market-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. Journal of Business, October 1971.

FONG H. GIFFORD - FABOZZI FRANK J. Fixed Income Portfolio Management. Dow Jones-Irwin, 1985.

FONG H. GIFFORD - VASICEK OLDRICH A. Return Maximization for Immunized Portfolios. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

FULLER RUSSELL J. - FARRELL JAMES L. Modern Investments and Security Analysis. McGraw-Hill, New York 1987.

GARBADE KENNETH D. Bond Convexity and Its Implications for Immunization. Bankers Trust Company, Topics in Money and Securities Markets, March 1985. (1985a)

GARBADE KENNETH D. Managing Yield Curve Risk: A Generalized Approach to Bond Immunization. Bankers Trust Company, Topics in Money and Securities Markets, August 1985. (1985b)

GARBADE KENNETH D. Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components. Bankers Trust Company, Topics in Money and Securities Markets, June 1986.

GOODMAN LAURIE S. - VIJAYARAGHAVAN N. R. Generalized Duration Hedging with Futures Contracts. The Review of Futures Markets, vol. 6, no. 1, 1987.

GULTEKIN N. BULENT - ROGALSKI RICHARD J. Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk. Empirical Tests. Journal of Business, vol. 57, no.2, 1984.

HAUGEN ROBERT A. Modern Investment Theory. Prentice-Hall, New Jersey 1986.

HICKS J.R. Value and Capital. Oxford 1939.

HOMER SIDNEY - LEIBOWITZ MARTIN Inside the Yield Book. Englewood Cliffs 1972.

HOPEWELL MICHAEL - KAUFMAN GEORGE Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification. The American Economic Review, September 1973.

INGERSOLL JONATHAN E. Is Immunization Feasible?: Evidence from the CRSP Data. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

INGERSOLL JONATHAN E. Theory of Financial Decision Making. New Jersey, 1987.

INGERSOLL JONATHAN E. - SKELTON JEFFREY - WEIL ROMAN L. Duration Forty Years Later. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. XIII, no. 4, November 1978.

JACOB NANCY L. - PETTIT R. RICHARDSON Investments. Irwin, Homewood, Ill. 1984.

KAUFMAN GEORGE G. Duration, Planning Period, and Tests of the Capital Asset Pricing Model. Journal of Financial Research, Spring 1980.

KHANG CHULSOON Bond Immunization When Short-Term Rates Fluctuate More Than Long-Term Rates. Journal of Financial and Quantitative Analysis, November 1979.

KLOTZ RICHARD Convexity of Fixed Income Securities. Salomon Brothers, 1985.

KOPPRASCH ROBERT Understanding Duration and Volatility. Teoksessa FABOZZI Frank J. - POLLACK Irving M. (toim.) The Handbook of Fixed Income Securities. Dow Jones-Irwin, 1987.

LANDSKRONER YORAM - RUTHENBURG DAVID Bank Duration and Immunization Under Variable Interest Rates. European Finance Associationin kokouksessa Istanbulissa esitetty paperi, elokuu 1988.

LANSTEIN RONALD - SHARPE WILLIAM F. Duration and Security Risk. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. XIII, no. 4, November 1978.

LEIBOWITZ MARTIN L. Total Portfolio Duration. A New Perspective on Asset Allocation. Salomon Brothers, 1986.

LIVINGSTON MILES Duration and Risk Assessment for Bonds and Common Stocks: A Note. Journal of Finance, vol. XXXIII, no. 1, March 1978.

LIVINGSTON MILES - CAKS JOHN A "Duration" Fallacy. Journal of Finance, vol. XXXII, no 1, March 1977.

MACAULAY FREDERICK Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856. New York 1938.

McENALLY RICHARD W. The Term Structure of Interest Rates. Teoksessa FABOZZI FRANK J. - POLLACK IRVING M. (toim.) The Handbook of Fixed Income Securities. Dow Jones-Irwin, 1987.

MORGAN, GEORGE E. Floating Rate Securities and Immunization: Some Further Results. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 21, no. 1, March 1986.

NELSON CHARLES R. The Term Structure of Interest Rates: Theories and Evidence. Teoksessa BICKSLER JAMES L. (toim.) Handbook of Financial Economics. North-Holland Publishing, 1979.

NELSON JEFFREY - SCHAEFER STEPHEN The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunisation Strategies. Teoksessa BIERWAG GERALD O. - KAUFMAN GEORGE G. - TOEVS ALDEN (toim.) Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization. Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis, vol 41. Greenwich, Conn. 1983.

PONCET PATRICE Optimal Consumption and Portfolio Rules with Money as an Asset. Journal of Banking and Finance 7, 1983.

RANTALA OLAVI Tasapainokorko, korkopolitiikka ja korkojen aikarakenne. Suomen Pankin kansantalouden osaston keskustelualoitteita. Helsinki 1988.

REDINGTON F. M. Review of the Principle of Life-Office Valuations. Journal of the Institute of Actuaries 78, 1952.

ROGERS, JOHN Management of Interest Rate Risk by Financial Institutions. Pro gradu -tutkielma Helsingin Yliopistossa, huhtikuu 1988.

ROLL RICHARD Investment Diversification and Bond Maturity. Journal of Finance, March 1971.

ROSS STEPHEN A. The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory, December 1976.

SAMUELSON PAUL The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System. The American Economic Review, March 1945.

SCHAEFER STEPHEN Immunisation and Duration: A Review of Theory, Performance and Applications. Midland Corporate Finance Journal, vol. 2, no. 3, 1984.

SHARPE WILLIAM Investments. Englewood Cliffs, 1985.

SHILLER ROBERT J. - McCULLOCH J. HUSTON The Term Structure of Interest Rates. NBER Working Paper no. 2341. Cambridge, Mass. 1987.

STIGLITZ JOSEPH E. - WEISS ANDREW Credit Rationing in Markets with Imperfect Information. The American Economic Review, June 1981.

TOEVS ALDEN Uses of Duration Analysis for the Control of Interest Rate Risk. Teoksessa PLATT ROBERT (toim.) Controlling Interest Rate Risk. New Techniques and Applications for Money Management. New York 1986. (1986a)

TOEVS ALDEN Hedging Interest Rate Risk of Fixed-Income Securities with Uncertain Lives. Teoksessa PLATT ROBERT (toim.) Controlling Interest Rate Risk. New Techniques and Applications for Money Management. New York 1986. (1986b)

TOEVS ALDEN - JACOB DAVID Hedging with Financial Futures. Teoksessa PLATT ROBERT (toim.) Controlling Interest Rate Risk. New Techniques and Applications for Money Management. New York 1986.

VANHANEN VESA Korkoriskin hallinta velkakirjamarkkinoilla. Suomen Pankin keskustelualoitteita. Helsinki 1988.

VASICEK OLDRICH A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. Journal of Financial Economics, no.5, 1977.

VASICEK OLDRICH A. - FONG H. GIFFORD Term Structure Modeling Using Exponential Splines. Journal of Finance, vol. XXXVII, no. 2, May 1982.

VIRÉN MATTI Korot, korkorakenne ja inflaatio: tuloksia kansainvälisellä aikasarja-aineistolla. Suomen Pankki D:66. Helsinki 1988.

YAWITZ JESS B. Convexity: An Introduction. Goldman Sachs Financial Strategies Group, 1986.

YAWITZ JESS B. - MARSHALL WILLIAM J. The Shortcomings of Duration as a Risk Measure for Bonds. Journal of Financial Research, Summer 1981.

Puhelinhaastattelut

BIERWAG GERALD O.	20.3.1989
TOEVS ALDEN	2.3.1989

LIITE: KÄSITTEIDEN KÄÄNNÖKSISTÄ

Seuraavassa on aakkosellinen luettelo keskeisistä käyttämistäni suomennoksista. Rahoitusalan sanasto ei ole vielä vakiintunut suomen kielessä, joten valitsemieni käännösten ja alkuperäisten englanninkielisten käsitteiden läpikäynti lienee paikallaan. Muitakin käännösehdotuksia on useista käsitteistä esitetty.

dedikaatio	dedication
horisontaalinen	flat
immunisaatio	immunization
juokseva korko	current yield
juoksuaika	maturity
korkorakenne	term structure of interest rates
koronkorko	compounding
kuponkikorko	coupon rate
maksuhäiriö	default
maksusuoritus	cash flow
nollakuponkilaina	zero coupon bond
nykykorko	spot rate
sisäinen korko	yield to maturity
suojaus	hedging
suunnittelujakso	investment horizon, planning period
takaisinostoprovisiolla varustettu velkakirja	callable bond
termiinikorko	forward rate
tuottokäyrä	yield curve
velkakirja, laina	bond
(tarkemmin: kiinteäkorkoinen joukkovelkakirjalaina	fixed-income security)

SUOMEN PANKIN KESKUSTELUALOITTEITA

ISSN 0785-3572

1/89 PAULA LÄHDEMÄKI Neuvostoliiton kokonaistaloudelliset tunnusluvut kansantalouden tilinpidon pohjalta tarkasteltuna. 1989. 57 s. (ISBN 951-686-182-2)

2/89 MATTI VIRÉN A note on interest rate policy during the great depression. 1989. 20 s. (ISBN 951-686-183-0)

3/89 ERKKI KOSKELA - MATTI VIRÉN International differences in saving rates and the life cycle hypothesis: a comment. 1989. 20 s. (ISBN 951-686-184-9)

4/89 SAMPO ALHONSUO Rahoitus- ja pankkitoiminnan tehokkuus Suomessa. 1989. 81 s. (ISBN 951-686-185-7)

5/89 AMY SKOLNIK The U.S. - Canada free trade agreement: a model for Finland? 1989. 26 s. (ISBN 951-686-186-5)

6/89 JUHA TARKKA - ALPO WILLMAN - CHRIS-MARIE RASI Labour supply, wages and prices in the BOF4 quarterly model of the Finnish economy. 1989. 50 s. (ISBN 951-686-187-3)

7/89 JARMO KONTULAINEN Valuuttakurssien määräytyminen yleisen tasapainon mallissa. 1989. 80 s. (ISBN 951-686-188-1)

8/89 ESKO SYDÄNMÄKI Uusprotektionismi. 1989. 41 s. (ISBN 951-686-189-X)

9/89 JUHA TARKKA - ALPO WILLMAN - HANNA-LEENA MÄNNISTÖ Consumption and investment in the BOF4 quarterly model of the Finnish economy. 1989. 59 s. (ISBN 951-686-190-3)

10/89 SAMPO ALHONSUO - KJELL PETER SÖDERLUND - JUHA TARKKA Joukkovelkakirjalainojen tuotto Suomessa 1948 - 1986. 1989. 34 s. (ISBN 951-686-193-8)

11/89 PENTTI PIKKARAINEN - MATTI VIRÉN Granger causality between money, output, prices and interest rates: some cross-country evidence from the period 1875 - 1984. 1989. 19 s. (ISBN 951-686-195-4)

12/89 HELVI KINNUNEN Vaihtotaseen ennakkotietojen arviointi lyhyen aikavälin ennustemenetelmien avulla. 1989. 20 s. (ISBN 951-686-196-2)

13/89 PERTTI HAAPARANTA - JARMO KONTULAINEN Real exchange rate as an unobservable variable. 1989. 17 s. (ISBN 951-686-197-0)

14/89 MATTI VIRÉN Saving, investment and the current account: a review of recent evidence. 1989. 17 s. (ISBN 951-686-198-9)

15/89 HARRI LAHDENPERÄ Informaation vaikutus rahoitusmarkkinoiden toimintaan ja keskuspankkipolitiikan tehokkuuteen - katsaus kirjallisuuteen. 1989. 55 s. (ISBN 951-686-199-7)

16/89 PAAVO PEISA Aggregate versus industry-specific sources of economic growth and business cycle fluctuations. 1989. 35 s. (ISBN 951-686-202-2)

17/89 TIMO TYRVÄINEN Unions, wages and employment in Finland. 1989. 56 s. (ISBN 951-686-203-9)

18/89 ANTTI ILMANEN Duraatioanalyysin käyttö joukkovelkakirjan korkoriskin arvioinnissa ja hallinnassa. 1989. 116 s. (ISBN 951-686-204-7)